GARA DI MATEMATICA ON-LINE (9/11/2022)
(Soluzioni)

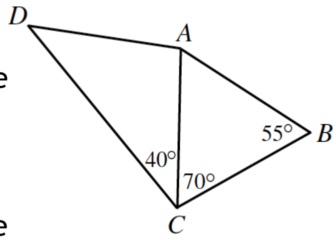
1. SOLO CONTI [40]
Notiamo che $137 \cdot 73 = 10001$ e quindi qualunque numero (fino a 4 cifre) moltiplicato per 10001 darà come risultato lo stesso numero, scritto due volte con qualche zero in mezzo.
La soluzione richiesta è $(1+1+1+2+1+3+1+4+1+5) \cdot 2 = 40$.

2. IL PRIMO NON PRIMO [27]
Escludiamo i numeri da 1 cifra e tutti i numeri di due cifre della decina da 10 a 19 in quanto tutti i numeri sono divisibili per 1. Analizziamo i numeri a partire da 20
20 --> Divisibile per 2;
21 --> Divisibile per 1;
22 --> Divisibile per 2;
23 --> Numero primo
24 --> Divisibile per 2;
25 --> Divisibile per 5;
26 --> Divisibile per 2;
27 --> Soluzione cercata.

3. UNA SEMPLICE DIFFERENZA [27]
Riscriviamo il calcolo in maniera differente:
$$1-2+3-4+5-6+7+\ldots-52+53=(53-52)+(51-50)+\ldots+(3-2)+1=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{27\ addendi}=27.$$

4. NUMERI PARI [5]
Se il numero è pari ed ha prodotto delle cifre 6, la cifra delle unità deve essere 2 e deve esserci un 3 da qualche parte, oppure è 6 e la altre cifre sono tutte 1.
Il primo caso è risolto dai numeri 11132, 11312, 13112, e 31112, mentre il secondo caso dal solo 116 per un totale di 5 casi.

5. UN ANGOLO [100]
L'angolo $C\hat{A}B = 180° - 70° - 55° = 55°$, quindi ACB è isoscele e $AC = CB$. Siccome $DA = CB$, anche il triangolo DAC è isoscele. $C\hat{D}A = 40°$ e $DAC = 180° - 40° - 40° = 100°$.

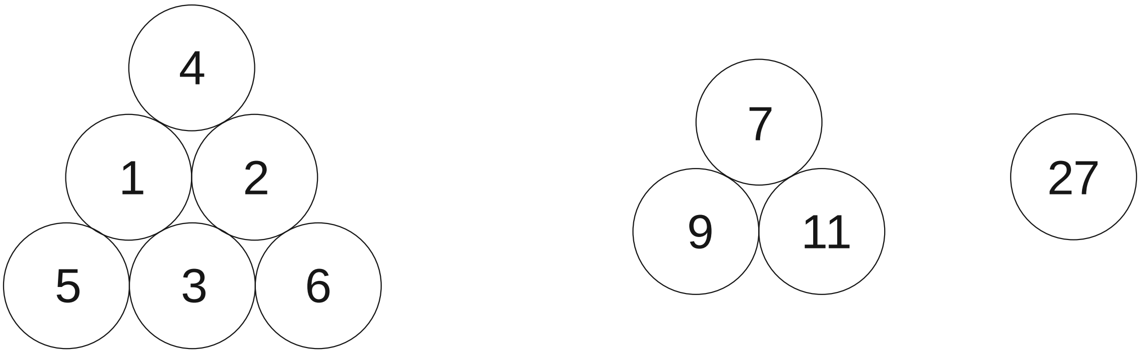


6. IL MASSIMO [792]
$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. L'unico modo per avere 11 come somma di due cifre, utilizzando le possibili cifre date dalla fattorizzazione di 126 è $9+2$. Il numero cercato è 792.

7. IN MEZZO AL TRIANGOLO [4]
Per le proprietà delle mediane, $AO = \frac{2}{3}AM$, $OM = \frac{1}{3}AM$, $BO = \frac{2}{3}BN$ e $ON = \frac{1}{3}BN$.
$$\frac{AO \cdot BO}{OM \cdot ON} = \frac{\frac{2}{3}\cancel{AM} \cdot \frac{2}{3}\cancel{BN}}{\frac{1}{3}\cancel{AM} \cdot \frac{1}{3}\cancel{BN}} = 4.$$

8. NUMERI PERFETTI [2]
La somma dei reciproci dei divisori di un numero prefetto è sempre costante ed è uguale a 2.
Ad esempio per 6: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=2$.
Notare che scrivendo in ordine i divisori, a numeratore ritroviamo la somma di tutti i divisori più il numero stesso. Per la proprietà dei numeri perfetti la somma a numeratore è sempre il doppio del numero dato e quindi il rapporto è sempre 2.

9. A FORMA DI PIRAMIDE [27]
Per cercare di minimizzare il valore sulla sommità, è necessario posizionare nelle tre sfere al centro della base i numeri più bassi.
La soluzione è la seguente.

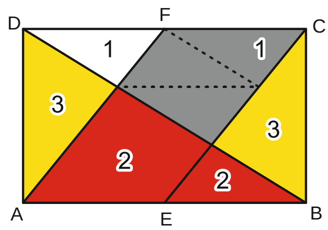


10. UNA GARA DI PESCA [13]
Abbiamo le seguenti possibilità: tutti con lo stesso numero, 1 caso;
due pareggiano: $2 \cdot 3 = 6$ possibilità (3 modi per scegliere chi pareggia e due modi per scegliere se il terzo sta sopra o sotto in classifica);
tutti con numeri diversi: 6 modi.
In totale $1+6+6=13$ possibili classifiche.

11. LA SCALA DEL NONNO [24]
$28\ \text{cm}$ è la media tra la misura del primo piolo e la misura del terzo, quindi $\frac{32+x}{2}=28$ da cui si ricava $x=24\ \text{cm}$.

12. DIFFERENZA E QUOZIENTE [21]
Sia $x>y$. Se $\frac{x}{y}=\frac{\cancel{105}}{\cancel{100}}=\frac{21}{20}$, allora $x=\frac{21}{20}y$. Siccome $x-y=\frac{21}{20}$ allora $\frac{1}{20}y=\frac{21}{20}$, e quindi $y=21$

13. DIVIDENDO UN RETTANGOLO [250]
Si osserva che la figura è scomposta in pezzi che ricomposti a due a due (come indicato in figura) forma tre rettangoli congruenti. Inoltre la parte grigia è 3 volte la parte bianca.
L'area cercata vale $\frac{3}{4}\frac{1}{3}1000=250\ \text{cm}^2$



14. NUMERI E CASO [13]
Il numero finale è della forma $2^a \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^b$ per le regole assegnate dove a è il numero di volte che è uscito testa e b è il numero di volte che è uscito croce.
Siccome $1944=2^3 \cdot 3^5=2^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot 2^5=2^8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$. Hanno lanciato la moneta $8+5=13$ volte.

15. CARTE [17]
Supponiamo io abbia preso $c+q+n$ carte (c cuori, q quadri e n carte nere).
Dalle informazioni del problema abbiamo che $c+q=14$; $q+n=11$ e $c+n=9$. Se sommiamo le ultime due equazioni e sottraiamo le prima otteniamo che $2n=6$, cioè $n=3$.
Sono state scelte $14+3=17$ carte.

16. UN CONTO… COMPLESSO? [7]

Usando la proprietà distributiva: $\dfrac{5\cdot 7^4+4\cdot 7^3+3\cdot 7^2+2\cdot 7}{5\cdot 7^3+4\cdot 7^2+3\cdot 7+2}=\dfrac{7\cancel{\left(5\cdot 7^3+4\cdot 7^2+3\cdot 7+2\right)}}{\cancel{5\cdot 7^3+4\cdot 7^2+3\cdot 7+2}}=7$.

17. LE MELE ROSSE [10]

Scelgo la prima mela rossa con probabilità $\dfrac{2}{5}$ e la seconda rossa con probabilità $\dfrac{1}{4}$ (le mele rosse sono una in meno, così come le mele totali).

La probabilità cercata è $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10}=10\%$.

18. MONETE [17]

Visto che 12 è possibile ottenerlo con 3 monete da 4 possiamo non prenderlo in esame.
Ci rimangono i due tagli da 4 e da 7. Osserviamo che:

$4+14=18$

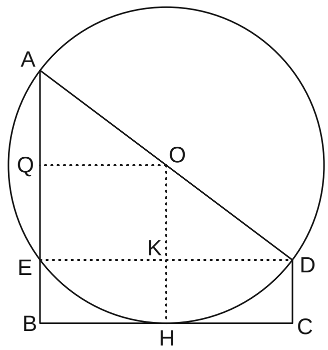
$4+4+4+7=19$

$4+4+4+4+4=20$

$7+7+7=21$

Tutti i valori successivi si otterranno sommando a ciascuno dei casi appena visti una moneta da 4.
Il valore 17 non è raggiungibile in alcun modo. Infatti $4\cdot 4=16$ e $7+4+4=15$, $7+7=14$, ma né 10 né 13 si riescono a raggiungere in alcuna maniera.
La risposta richiesta è 17.

19. UN TRAPEZIO NEL CERCHIO [160]



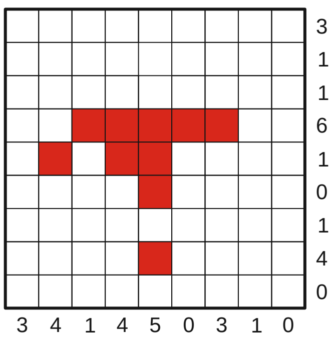
Tracciamo ED. Osserviamo che $A\hat{E}D$ è retto e quindi AD è il diametro della circonferenza. Tracciamo OH che risulta perpendicolare a BC e quindi ad ED.
La perpendicolare manda da O su AE divide il segmento in due parti uguali.

Mettendo assieme tutte le deduzioni abbiamo che $OH=\dfrac{12}{2}+4=10$, raggio della circonferenza. Per Pitagora $ED=\sqrt{20^2-12^2}=16\text{ cm}$.

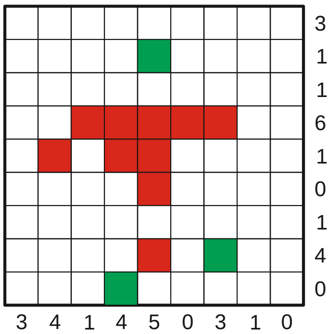
L'area cercata vale $A_{ABCD}=\dfrac{(16+4)\cdot 16}{2}=160\text{ cm}^2$.

20. UN GIOCO [3231]

Come prima cosa osserviamo i numeri 6,5 e 4 che escludono alcune caselle a partire dal centro della riga o della colonna.



A causa delle caselle appena eliminate, altre caselle risultano inaccessibili non potendo garantire la distanza indicata o sulla riga o sulla colonna:



Si può continuare in questo modo scartando altre caselle diventate inaccessibile, oppure si può procedere per ipotesi. Ad esempio dove le possibilità sono poche, magari due (colonna del 5 o riga del 6). Se si giunge ad un assurdo, si scarta la possibilità indagata e si procede con certezza con l’altra.
Alla fine l’unica soluzione possibile è:

		x				x			3
	x		x						1
		x		x					1
x							x		6
						x		x	1
							x	x	0
	x		x						1
x					x				4
				x	x				0
3	4	1	4	5	0	3	1	0	

La soluzione richiesta è 3231