**QUESITO 6**

Si consideri la funzione integrale $F(x)=\int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$ , con $x \geq a$, in cui $a$ indica un parametro reale positivo. Determinare il più grande valore di $a$ in modo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{1}{2}$.

Soluzione
Risolviamo semplicemente il calcolo di

$F\left(\frac{2}{\pi}\right)=\int_a^{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$. Osserviamo che la derivata di $\frac{1}{t}$ è $-\frac{1}{t^2}$ e quindi,. Cambiando la variabile con $k=\frac{1}{t}$ abbiamo:

$$F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \cos k\ dk=-\left[\operatorname{sen} k\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{\pi}{2}}=-1+\operatorname{sen}\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$$

L'ultima equazione ci porta a determinare le soluzioni di

$\operatorname{sen}\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ e quindi $\frac{1}{a}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ oppure $\frac{1}{a}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Dovendo essere $0<a<\frac{2}{\pi}$, $a$ il più grande valore possibile, abbiamo che $\frac{1}{a}>\frac{\pi}{2}$ con $\frac{1}{a}$ il minore possibile. La soluzione cercata è $\frac{1}{a}=\frac{5\pi}{6}$, cioè $a=\frac{6}{5\pi}$