QUESTITO 4

Dimostrare che l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ammette un'unica soluzione positiva.

Soluzione

Sia $f(x) = x^3 + x - \cos x$. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ in quanto somma di tre funzioni continue su $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata: $f'(x) = 3x^2 + 1 + \operatorname{sen} x$

Osserviamo che $3x^2 + 1 - 1 \le 3x^2 + 1 + \operatorname{sen} x \le 3x^2 + 1 + 1$, cioè

$3x^2 \le 3x^2 + 1 + \operatorname{sen} x \le 3x^2 + 2$, quindi $f'(x) \ge 0$ su tutto il dominio. La funzione è strettamente crescente.

Osserviamo inoltre che $f(0) = -1$ e che $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\pi}{2} > 0$.

Per il teorema degli zeri esiste una soluzione nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ e per la stretta crescenza della funzione, la soluzione è unica.