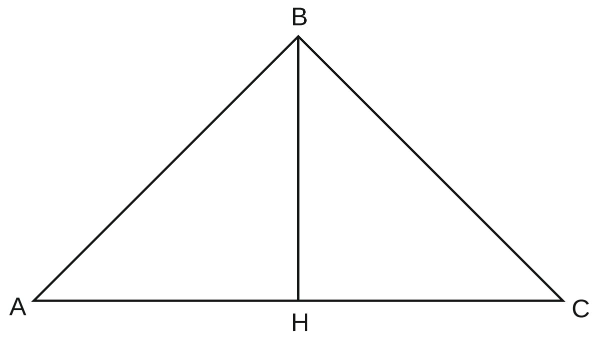
QUESITO 1

È dato un triangolo ABC, rettangolo in B. Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se la misura dell'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa

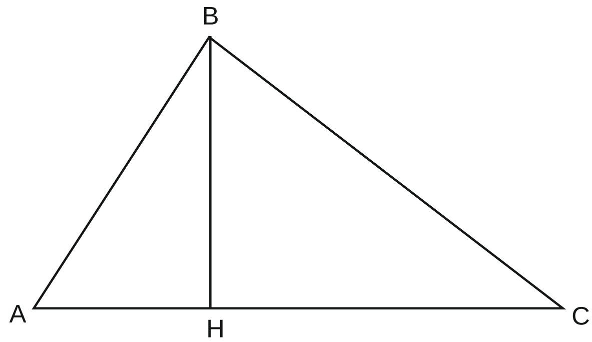
Soluzione:

Supponiamo il triangolo sia isoscele $\rightarrow$ dimostriamo che la misura dell'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa



L'implicazione è banale in quanto l'altezza relativa alla base, essendo anche mediana, divide il triangolo in due triangoli isosceli di angoli 45°-45°-90°.

Supponiamo la misura dell'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa $\rightarrow$ dimostriamo che il triangolo è isoscele



Per il secondo Teorema di Euclide abbiamo:

$BH^2 = AH \cdot HC$ ma per ipotesi $BH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AH + HB)$.

Segue che

$$\frac{1}{4}(AH + HB)^2 = AH \cdot HC$$

$$AH^2 + 2AH \cdot HC + HB^2 = 4AH \cdot HC$$

$$AH^2 - 2AH \cdot HC + HB^2 = 0$$

$$(AH - HB)^2 = 0$$

$$AH = HB.$$

Oppure

Sapendo che in un triangolo rettangolo la mediana relativa alla base è congruente a metà dell'ipotenusa in quanto raggio della circonferenza circoscritta, si ha che la mediana e l'altezza coincidono, cosa che accade unicamente nel triangolo isoscele.