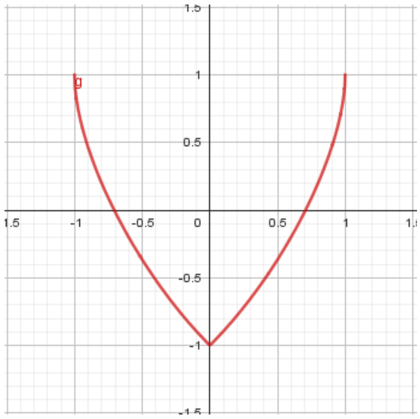
PROBLEMA 2

«All'inizio e alla fine, abbiamo il mistero. [...] A questo mistero la matematica ci avvicina, pur senza penetrarlo». (E. De Giorgi)

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x)=\sqrt[n]{x^2}-\sqrt{ax^2+bx+1}$ con $n\in\mathbb{N}$, $n>1$ e $a,b\in\mathbb{R}$, $a<0$

a) Verificare che , qualunque sia il valore di n la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x=0$. Determinare il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri a,b il grafico α in figura, rappresenta la funzione $f_2(x)=|x|-\sqrt{ax^2+bx+1}$. Determinare i parametri a e b considerando che f_2 è definita in $[-1;1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



Si ponga d'ora in avanti $a=-1$ e $b=0$.

b) Studiare la funzione $g(x)=|x|+\sqrt{1-x^2}$ verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa $x=0$. Indicare con β il suo grafico e tracciare la curva $\gamma=\alpha\cup\beta$.

c) La retta r di equazione $x=k$, $-1<k<1$ interseca γ nei punti P e Q. Dimostrare che la misura del segmento PQ è massima quando r è asse di simmetria di γ.

d) Verificare che la funzione $H(x)=\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x+x\sqrt{1-x^2})$ è una primitiva della funzione $h(x)=\sqrt{1-x^2}$. Con il metodo che si ritiene più opportuno, calcolare l'area delle regione finita di piano delimitata da γ.

«Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle: le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto perenne per la matematica brutta». (G. H. Hardy)

SOLUZIONE

a) limitiamoci al caso $x \geq 0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ calcoliamo la derivata della funzione

$$f_n(x) = x^{\frac{2}{n}} - \sqrt{ax^2+bx+1}$$

$$f\,'_n(x) = \frac{2}{n} x^{\frac{2-n}{n}} - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}$$

Se $n \geq 2$ l'esponente della prima parte è negativo e quindi la funzione non è derivabile nei punti $x=0$ e in quelli in cui si annulla la radice

Osserviamo che per $n=2$ l'esponente diventa nullo.

In $x=0$ si ha una cuspide $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 2$ ed un punto angoloso per $n=2$.

Affinché $f_2(x)$ sia pari con dominio $[-1;1]$ dovrà essere $b=0$ (non sarebbe pari altrimenti) e $a=-1$.

b) Studiamo ora la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$

La funzione ha dominio $D = [-1;1]$ ed è pari. Limiteremo il suo studio al domino $D' = [0;1]$ duplicando i risultati ottenuti per parità.

La funzione interseca gli assi cartesiani nel solo punto $(0;1)$ e per sua natura è sempre positiva.

Essendo il dominio chiuso e limitato non ci serve calcolare alcun limite, ci limitiamo a determinare un ulteriore punto quando $x=1$, la funzione vale 1 e quindi passa per $(1;1)$.

Calcoliamo la derivata prima: $g(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ (visto che stiamo lavorando in D'), $g\,'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Osserviamo subito che nel punto $x=1$ la derivata non è definita e che dovremmo analizzare la situazione in $x=0$ a causa della presenza del valore assoluto.

Risolviamo intanto $g\,'(x) \geq 0$ alla ricerca di massimi/minimi.

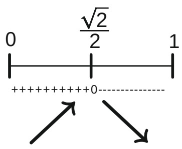
$1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0$ moltiplichiamo per $\sqrt{1-x^2}$ visto che è un termine positivo

$\sqrt{1-x^2} - x \geq 0$

$\sqrt{1-x^2} \geq 2x$ è una disequazione irrazionale in cui sappiamo già che $1-x^2 \geq 0$ e che $x \geq 0$ quindi ci basta procedere elevando al quadrato:

$1-x^2 \geq x^2$

$2x^2 \leq 1$ e ricordando sempre che $x \geq 0$ abbiamo

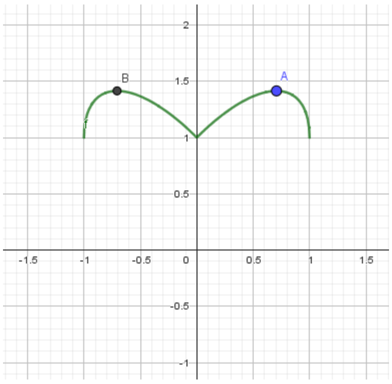


Il punto $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$ è un punto di massimo (assoluto).

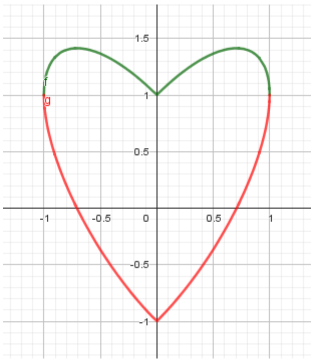
Osserviamo che $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 1$ e quindi il punto $(0;1)$ è un punto angoloso

Osserviamo che $\lim_{x\to 1^-}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=-\infty$ e quindi il punto $(1;1)$ è un punto a tangente verticale.

Rappresentiamo il grafico β di $g(x)$ sfruttando la parità:



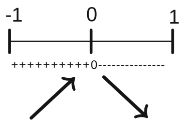
Tracciamo ora il grafico $\gamma=\alpha\cup\beta$



c) Sia r la retta verticale di equazione $x=k$ con $-1<k<1$ L'asse di simmetria per γ si ha quando $k=0$.
Proviamo che il segmento PQ è massimo per $k=0$.

Siccome $P\left(k;|k|+\sqrt{1-k^2}\right)$ e $Q\left(k;|k|-\sqrt{1+x^2}\right)$, $PQ(k)=2\sqrt{1-k^2}$ la cui derivata vale

$PQ'(k)=-\frac{2k}{\sqrt{1-k^2}}$ che ha il massimo proprio per $k=0$



Massimo che vale $PQ(0)=2$.

d) Calcoliamo la derivata della funzione $H(x)=\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2})$:

$$H'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}\right)=\sqrt{1-x^2}$$

$H(x)$ è quindi la primitiva di $h(x)$.

L'area racchiusa dalla curva γ vale:

$$A=2\left(\int_0^1\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)dx-\int_0^1\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)dx\right)=$$

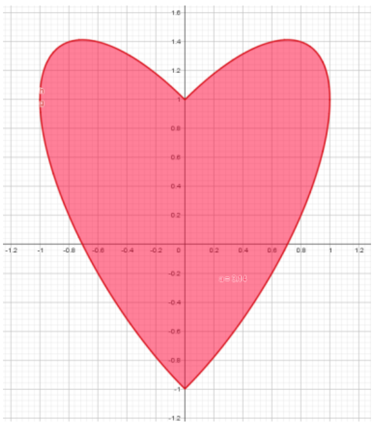
$$2\left(\int_0^1\left(x+\sqrt{1-x^2}-x+\sqrt{1-x^2}\right)dx\right)=$$

$$2\left(\int_0^1\left(2\sqrt{1-x^2}\right)dx\right)=$$

$$4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

L'ultimo integrale può essere risolto sfruttando $H(x)$ oppure osservando che $\sqrt{1-x^2}$ è l'equazione di una semicirconferenza di raggio 1 e quindi $4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ altro non è che l'area del cerchio.

$A=\pi$

I  **MATH**