PROBLEMA 1

Considerare $f_{a,b}(x)=\dfrac{ax^3+b}{x^2}$, con a e b $\in \mathbb{R}$

a) Determinare i valori dei parametri in modo che la retta t, di equazione $7x+y-12=0$ sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ nel suo punto P di ascissa $x=1$.

Si ponga d'ora in avanti, $a=1$ e $b=4$.

b) Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ e tracciarne il grafico γ. Scrivere l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P.

c) al variare del parametro reale m, determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione $y-5=m(x-1)$ e la curva γ

d) Sia $S(k)$, con $k>\dfrac{3}{2}$, l'area della regione finita di piano compresa tra la curva γ, il suo asintoto obliquo, la retta t e la retta di equazione $x=k$. Calcolare il $\lim\limits_{k\to+\infty} S(k)$ fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

Soluzione

a) il dominio della funzione è $\mathbb{R}-\{0\}$.

Determiniamo le coordinate di P sfruttando la retta: $P(1;5)$

Sostituiamo le coordinate di P nella funzione ed otteniamo

$$5=a+b$$

Calcoliamo la derivata prima in funzione dei parametri a e b : $f_{a,b}^{'}(x)=\dfrac{ax^3-2b}{x^3}$.

Siccome la curva possiede è tangente in P ad una retta di coefficiente angolare $m=-7$ dovrà accadere che

$-7=a-2b$

Mettendo a sistema si ottiene $a=1$ e $b=4$

b)

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}-\{0\}$, non possiede simmetrie. Non potendo intersecare l'asse delle ordinate, interseca l'asse delle ascisse nel solo punto $A\left(-\sqrt[3]{4};0\right)$. Visto che il denominatore è sempre positivo, a destra del punto A la funzione è sempre positiva, mentre alla sua sinistra è sempre negativa.

Calcoliamo i limiti sugli estremi del dominio:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+4}{x^2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty$ $x=0$ è un asintoto verticale.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty$

Verifichiamo se la funzione ammette asintoto obliquo:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=1;\ q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+4-x^3}{x^2}\right)\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}=0$$

$y=x$ è asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

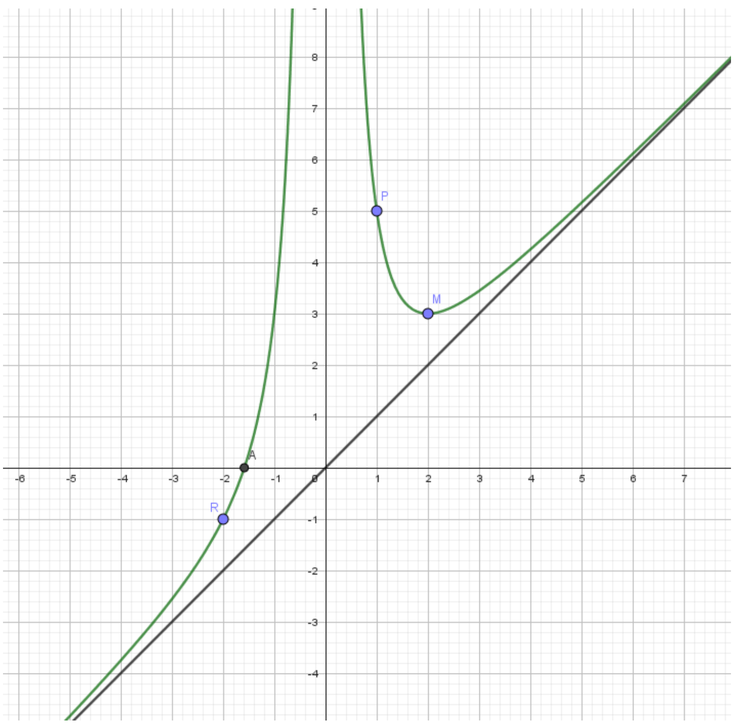
Studiamo la derivata prima: $f^{'}(x)=\dfrac{x^3-8}{x^3}$

La derivata si annulla solamente per $x=2$ e il suo segno è:

```
        0          2
 -------+----------+--------
 +++++++X----------0++++++++
    ↗        ↘         ↗
```

Il punto $M(2;3)$ è un minimo relativo per la funzione.

Con le informazioni fin qua raccolte possiamo tracciare il grafico della nostra funzione:



Resta da determinare una retta tangente alla curva passante per P.
Sia $R\left(k; f(k)\right)$ il punto di tangenza.

La tangente avrà equazione $y - f(k) = f'(k)(x-k)$ cioè $y - \frac{k^3+4}{k^2} = \frac{k^3-8}{k^3}(x-k)$ e dovrà passare per $P(1;5)$, quindi dovrà essere verificata l'equazione $5 - \frac{k^3+4}{k^2} = \frac{k^3-8}{k^3}(1-k)$. Semplificando otteniamo $k^3 - 3k + 2 = 0$. Sappiamo già, per aver risolto la prima parte dell'esercizio che due soluzioni dovranno essere $k=1$ visto che la retta $y = -7x + 12$ risulta essere proprio tangente nel punto P.
Usando Ruffini due volte, otteniamo:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	/
1		1	2	
	1	2	/	

Che ci da come soluzione ulteriore $k = -2$ corrispondente alla retta $y = 2x + 3$ passante per il punto $R(-2;-1)$.

c)

Il fascio di rette assegnato $y-5=m(x-1)$ ha il centro proprio nel punto $P(1;5)$.

Abbiamo già tutte le informazioni per completare l'analisi:

Se $m<-7$ 3 soluzioni.
Se $m=-7$ 2 soluzioni.
Se $-7<m<2$ 3 soluzioni, tranne quando $m=1$ che avremo 2 sole soluzioni in quanto la retta del fascio è parallela all'asintoto obliquo.
Se $m=2$ 2 soluzioni.
Se $m>2$ 1 soluzione.

d)

Determiniamo l'ascissa del punto di intersezione tra la retta t e l'asintoto obliquo:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -7x+12 \end{cases}$$ ed otteniamo $x = \frac{3}{2}$

$$S(k) = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(f(x)+7x-12 \right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left(f(x)-x \right) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x^3+4}{x^2}+7x-12 \right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left(\frac{x^3+4}{x^2}-x \right) dx$$

Calcoliamo i due pezzi dell'integrale separatamente:

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x^3+4}{x^2}+7x-12 \right) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(x+\frac{4}{x^2}+7x-12 \right) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(8x-12+\frac{4}{x^2} \right) dx = \left[4x^2-12x-\frac{4}{x} \right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{k} \left(\frac{x^3+4}{x^2}-x \right) dx = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left(\frac{x^3+4-x^3}{x^2} \right) dx = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \frac{4}{x^2}\, dx = 4\int_{\frac{3}{2}}^{k} \frac{1}{x^2}\, dx = 4\left[-\frac{1}{x} \right]_{\frac{3}{2}}^{k} = 4\left(-\frac{1}{k}+\frac{2}{3} \right)$$

$$S(k) = -\frac{4}{k}+3$$

$\lim_{k \to +\infty} S(k) = 3$ e rappresenta l'area della regione di piano infinita tra la curva, il suo asintoto obliquo e la retta t.