SOLUZIONI

1. **Al Secondo anno (28)**

Procediamo per casi:
Usando la cifra 6 vi sono i numeri 6, 60 e 600.
Usando 5 e 1 ci sono i numeri 15, 51, 105, 150, 501 e 510.
Usando 4 e 2 ci sono i numeri 24, 42, 204, 240, 402 e 420.
Usando 4, 1 e 1 ci sono i numeri 114, 141 e 411.
Usando 3 e 3 ci sono i numeri 33, 303 e 330.
Usando 3, 2 e 1 ci sono i numeri 123, 132, 213, 231, 312 e 321.
Rimane un'ultima possibilità data dal numero 222.
In totale i numeri richiesti sono **28**.

2. **I nuovi docenti (144)**

Nel calcolo combinatorio esiste un "*Principio Fondamentale del Contare*" (***PFC***)**: s**e una decisione, o un'azione, comprende più passaggi in cui nel primo si hanno n_1 possibilità, nel secondo n_2, nel terzo n_3 e così via, allora il numero totale delle possibilità è dato dal prodotto: $\boldsymbol{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots}$
Ciò premesso, per incontrare i 7 docenti in modo alternato, si dovrà considerare una sequenza del tipo MFMFMFM.
Quindi, per ottenerla, si devono fare 7 passaggi in cui le possibilità sono: 4 per il primo M, 3 per la prima F, 3 per il secondo M, 2 per la seconda F e così via.
Pertanto, per il "*Principio Fondamentale del Contare*" (***PFC)***, si hanno: $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{144}$ modi diversi di poterli incontrare.

3. **L'armadietto personale (7)**

Il codice che Luca deve indovinare è un numero divisibile per 15, per cui deve rispettare due condizioni:
a) l'ultima cifra deve essere 0 o 5,
b) la somma delle cifre deve essere multiplo di 3.
Se l'ultima cifra è 0, la seconda condizione è verificata mettendo nell'altra posizione il 2, il 5 o l'8.
Se l'ultima cifra è 5, nell'altra posizione vanno bene 0, 3, 6 o 9.
Pertanto i casi possibili che Luca dovrà provare sono **7**.

4. **Magia dei numeri (1098)**

Tutti i numeri di una cifra sono ovviamente palindromi, e sono 9.
Numeri di due cifre palindromi sono tutti i multipli di 11, che sono 9.
I numeri palindromi di tre cifre sono del tipo aba, quindi abbiamo 9 possibili scelte per a e 10 possibili scelte per b, per un totale di 90 numeri.
Di quattro cifre ne abbiamo tanti quanti di tre, infatti i numeri dovranno essere del tipo $abba$.
Infine quelli di 5 cifre, del tipo $abcba$: abbiamo 9 scelte per a, 10 scelte per b e 10 per c; in totale 900 numeri.
In totale abbiamo $9 + 9 + 90 + 90 + 900 = \mathbf{1098}$ numeri palindromi minori di 100.000.

5. **La nursery (24)**

Per sistemare i 6 barattoli di spezie, Sara compie un'azione in tre fasi. Nella prima sistema quello con la cannella (2 possibilità), poi passa a sistemare i due che vanno al centro (2 possibilità) e infine deve sistemare i tre barattoli rimasti in altrettante posizioni (3! = 6 possibilità).
Pertanto, per il *PFC*, le possibilità sono in tutto $2 \cdot 2 \cdot 6 = \mathbf{24}$.

6. **Origami (11)**

Premessa: Se si deve calcolare la probabilità di un evento che si realizza attraverso gli esiti favorevoli di più mosse in cui nella prima il successo ha probabilità p_1, nella seconda p_2, nella terza p_3 e così via, allora la probabilità dell'***evento composto*** dagli esiti di più mosse è dato dal prodotto delle probabilità dei successi: $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots..$

L'evento di cui si richiede la probabilità (*ottenere, nei tre lanci, tre colori diversi*) può essere riformulato dicendo: "*nel primo lancio si può ottenere un colore qualsiasi* (p = 1), *nel secondo il colore deve essere diverso dal precedente* (p = 2/3) e *nel terzo lancio il colore deve essere diverso dai precedenti* (p = 1/3)".
Si tratta, pertanto, di un ***evento composto*** per cui la probabilità è data dal prodotto:
$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$; per cui la risposta diventa **11**.

7. **L'interrogazione di zoologia (384)**

Ogni diversa sistemazione delle quattro coppie studentessa-modellino avviene in 5 mosse.
Nella prima si stabilisce in quale ordine, da sinistra a destra, vanno messe le 4 studentesse (4!=24 possibili permutazioni) poi, accanto a ciascuna, si mette il suo modellino che può stare a destra o a sinistra (2 possibilità per ciascuna). In totale, per il ***PFC***, le quattro studentesse avrebbero potuto sedersi in $24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{384}$ modi diversi.

8. **Malattie da draghi (20)**

Per il criterio di divisibilità per 3, un numero è divisibile per 3 se la somma delle cifre è multipla di 3.
Con una cifra ci sono 2 e 7 che non sono multipli di 3.
Usando due cifre, 27 e 72 sono le uniche possibilità.
Usando 3 cifre, possiamo ottenere multipli di 3 solamente con 222 e 777.
Usando 4 cifre si ottengono multipli di 3 usando due cifre 2 e due cifre 7 in tutti i modi possibili: 2277, 2727, 2772, 7227, 7272 e 7722.
Usando 5 cifre, i multipli di 3 sono 77772, 77727, 77277, 72777 e 27777.
E altri 5 con una cifra 7 e quattro 2.
Non ci sono altre possibilità. In totale abbiamo trovato **20** multipli di 3.

9. **Al campo di OffBall (90)**

Premessa: se per andare da P al punto medio o dal punto medio a O si percorrono gli archetti, ci sono in ogni caso $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilità.

Poiché ogni percorso passa per il punto medio fra P e O allora possiamo pensare che ogni percorso si realizzi in due tempi. Nel primo si sceglie come arrivare al punto medio: se lungo i tre archetti (3a) o lungo l'arco grande (A).
Nel secondo si decide come arrivare dal punto medio a O: se lungo i tre archetti (3a) o lungo l'arco grande sopra (A^s) o lungo l'arco grande sotto (A_s).
Quindi i percorsi possono essere: (3a, A^s) (3a, A_s) (3a, 3a) (A, 3a) (A, A_s) (A, A^s)
in tutto 8 + 8 + 64 + 8 + 1 + 1 = 90

10. **L'imitazione (52)**

L'evento *E*: "*il minore dei numeri estratti è il 3*", di cui è richiesta la probabilità, è unione di due *eventi "incompatibili"* (*disgiunti*), ed entrambi ***composti***, E_1 ed E_2 .

E_1: "*Il primo estratto è un numero maggiore di 3* e *poi si estrae il 3*"; per cui $p(E_1) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{90}$

E_2: "*prima si estrae il 3* e *poi un numero maggiore*"; per cui $p(E_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{90}$

In conclusione: $p(E) = p(E_1) + p(E_2) = \frac{7}{90} + \frac{7}{90} = \frac{7}{45}$ e la risposta diventa **52.**

11. **Chi sporca, pulisce! (145)**

Premessa: Per contare il numero di esiti delle estrazioni "*in blocco*" si fa ricorso ai "*binomiali*". Usiamo, infatti, le due lettere S ed N, per associare a ciascun numero da 1 a 20 la lettera S se il numero fa parte di una coppia estratta e la lettera N se il numero è escluso.
In tal modo, se ad esempio vengono estratti i numeri 2 e 8, allora associamo a questa coppia la "*parola binaria*" NSNNNNNSNNNNNNNNNNNN.
Viceversa, alla "parola binaria" SNNNNNNNNNNNNNNNNNNS, corrisponde la coppia 1 e 20.
Quindi, ogni coppia è associata ad una sequenza di 20 lettere, 2 delle quali sono (S) e 18 sono (N).
Ogni anagramma di questa parola di 20 lettere indica una coppia.
A questo punto, per contare il numero delle coppie che si possono formare prendendo in blocco due numeri da 1 a 20 basta calcolare il numero degli anagrammi di una parola binaria, cioè calcolare il BINOMIALE $\binom{20}{2}$.
Le coppie il cui prodotto dei numeri è pari sono quelle con almeno uno dei 2 numeri è pari.
Pertanto, i casi favorevoli ad Anna sono le coppie che rimangono togliendo dal totale quelle con entrambi i numeri dispari.
In definitiva sono $\binom{20}{2} - \binom{10}{2} = 190 - 45 = 145$

12. **Aula inagibile (23)**

Quando si lanciano due dadi i casi possibili sono 36.
I casi favorevoli all'evento sono le coppie di punteggi:
(1,2)(2,1)(2,3)(3,2)(3,4)(4,3)(4,5)(5,4)(5,6)(6,5).
Pertanto, la probabilità che si ottengano due numeri consecutivi è: $\frac{n° \; casi \; favorevoli}{n° \; casi \; possibili} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.
Per cui la risposta diventa: 5+18 = **23.**

13. **Lo smeraldo finlandese (4536)**

Si tratta di calcolare quanti sono i numeri di 4 cifre con le cifre tutte diverse.
Per scrivere un numero di 4 cifre si compiono 4 "*mosse*", una per ciascuna delle cifre da scrivere.
Per la prima cifra, che non può essere zero, si hanno 9 possibilità, per la seconda cifra ancora 9 (perché delle 10 cifre possibili devo escludere quella già scritta), poi 8 e poi 7.
Pertanto, per il già visto ***PFC***, i numeri richiesti sono $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \mathbf{4536}$.

14. **Test rapido (63)**

Indichiamo con ***E***: "*lo studente indovina **almeno** una risposta del test*" l'evento del quale viene chiesta la probabilità. Quando nell'enunciato di un evento c'è la parola "*almeno*" può essere una buona idea quella di considerare l'evento contrario che, nel caso del problema, corrisponde ad affermare $\bar{E}$: "*lo studente sbaglia tutte le risposte*".
Si tratta di un ***evento composto*** e, pertanto, la sua probabilità si ottiene dal prodotto delle probabilità degli esiti (sbagliare la risposta, p=1/2) nelle singole mosse.
Per cui $p(\bar{E}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$.
Poiché $p(E) = 1 - p(\bar{E})$, allora $p(E) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$ e la risposta diventa 63.

15. **Né trevisane né napoletane (304)**

I casi favorevoli corrispondono alle coppie di carte che rimangono togliendo, dal totale delle coppie estraibili, quelle con nessun asso.
In totale, le coppie che possono essere estratte sono $40 \cdot 40 = 1600$ e quelle senza assi sono $36 \cdot 36 = 36 = 1296$.
Pertanto in totale i casi favorevoli sono $1600 - 1296 = \mathbf{304}$.

16. **La lingua autentica - lessico (120)**

Quando si lanciano 3 dadi, i casi possibili sono 216, mentre i casi favorevoli all'evento previsto sono le terne con i tre numeri diversi fra loro.
Per ottenere una terna di questo tipo bisogna che: nel primo dado si ottenga un qualsiasi numero da 1 a 6 (6 possibilità), nel secondo ci sia un numero diverso dal precedente (5 possibilità) e nel terzo un numero diverso dai precedenti due (4 possibilità).
Pertanto, applicando il *PFC*, i casi favorevoli sono: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

17. **La lingua autentica - verbi (134)**

<u>Prima soluzione</u>
Abbiamo già visto (problema 11) che per contare il numero dei risultati delle estrazioni in blocco basta calcolare il numero degli anagrammi di una parola binaria, cioè calcolare un BINOMIALE.
Pertanto, estraendo in blocco due numeri da 1 a 90, i casi possibili sono $\binom{90}{2} = \frac{90 \cdot 89}{2} = 45 \cdot 89$.
Ora vediamo i casi favorevoli: sono le coppie la cui somma è dispari.
Ciò succede se i numeri sono uno pari (45) e uno dispari (45), quindi le coppie favorevoli sono $45 \cdot 45$. Pertanto la probabilità è $\frac{45 \cdot 45}{45 \cdot 89} = \frac{45}{89}$ e il risultato diventa 134.
<u>Seconda soluzione</u>
Consideriamo di estrarre una pallina alla volta senza reinserimento e di dover ottenere due numeri la cui somma sia dispari. Si tratta di un ***evento composto*** che, riformulato, corrisponde a dichiarare che: "<u>*Nella prima estrazione si può ottenere un qualsiasi numero da 1 a 90*</u> (p=1) e <u>*nella seconda il numero deve essere pari*</u> (se il primo è dispari) <u>*oppure dispari*</u> (se il primo è pari)". In ogni caso: p=45/89. Pertanto $p = 1 \cdot \frac{45}{89} = \frac{45}{89}$. Per cui la risposta diventa **134**.

18. **Il labirinto (21)**

Ogni percorso è formato da sei spostamenti; indichiamo con D quelli verso destra e con B quelli verso il basso. In tal modo ad ogni percorso corrisponde una *parola binaria* di sei lettere.
Per scrivere una tale parola, avendo a disposizione solo due lettere (D e B), bisogna fare sei mosse, in ciascuna delle quali bisogna scegliere una fra le due lettere.
Pertanto il numero delle parole richieste, cioè dei percorsi, è dato da: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = \mathbf{64}$
Quelli favorevoli sono quelli che finiscono al centro, ognuno dei quali corrisponde ad una parola binaria con tre D e tre B, come ad esempio DBDBDB.
Il numero di tali parole binarie, abbiamo già visto, è dato dal binomiale: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$
Quindi la probabilità vale $\frac{n° \; casi \; favorevoli}{n° \; casi \; possibili} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$ e la risposta diventa **21.**

19. **Il distributore di merende (43)**

Calcoliamo questa probabilità determinando i casi possibili (tutti i percorsi della moneta) e quelli favorevoli (i percorsi in cui la moneta esce in A).
Nella sua discesa la moneta passa per 6 livelli di punti. Ogni volta che trova un punto, se devia a destra associamo la lettera D mentre se devia a sinistra associamo S.
In questo modo ad ogni percorso facciamo corrispondere una parola di 6 lettere.
Per scrivere una qualsiasi parola di 6 lettere, avendo a disposizione solo due lettere (S e D), bisogna fare 6 mosse, in ciascuna delle quali ho da scegliere una fra le due lettere.
Pertanto il numero delle parole richieste, cioè dei percorsi, è dato da: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = \mathbf{64}$.
Quelli favorevoli sono: il percorso SSSSSS, quello DDDDDD e quelli che finiscono al centro i quali, essendo parole binarie con tre S e tre D, sono $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.
In totale si hanno 22 casi favorevoli.

Pertanto la probabilità vale $\frac{n° \; casi \; favorevoli}{n° \; casi \; possibili} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$ e la risposta diventa **43** .

20. **La cerimonia dei privilegi (35)**

Se alla premiazione vengono distribuiti 4 privilegi fra 4 allievi, dire che "*nessuno dei quattro allievi rimane senza un privilegio*" significa che "*ogni allievo riceve un privilegio*".
Si tratta di un ***evento composto*** che, riformulato, equivale ad ***E***: "*il primo privilegio va ad uno dei 4 allievi* (p=1), *il secondo privilegio va ad un allievo diverso dal precedente* (p=3/4), *il terzo va ad un allievo diverso dai precedenti* (p=2/4) e *il quarto privilegio va all'ultimo allievo* (p=1/4)".
Pertanto $p(E) = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$ Di conseguenza la soluzione è **35.**