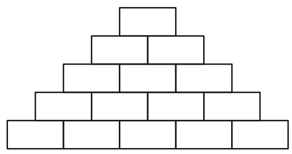
ALLENAMENTO di ARITMETICA – Soluzioni

1. **Le Uniformi [69]**
   Siccome il numero delle uniformi diviso per 11 dava resto 3 mentre diviso per 7 dava resto 6, allora per risolvere il problema possiamo considerare l'insieme *A* dei numeri del tipo $11k + 3$ e l'insieme *B* dei numeri del tipo $7h + 6$ (minori di 90) e cercare un valore comune.
   I numeri dell'insieme *A* sono $\{14, 25, 36, 47, 58, 69, 80\}$
   Mentre quelli di *B* sono $\{13, 20, 27, 34, 41, 48, 55, 62, 69, 76, 83\}$
   La soluzione del problema è allora il valore comune $\mathbf{69}$.

2. **GLI AMMESSI AL PRIMO ANNO [126]**
   Se fattorizziamo 756 si ottiene: $756 = 4 \cdot 189 = 4 \cdot 9 \cdot 21 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$.
   Per avere il più piccolo multiplo di 756 che sia un quadrato perfetto bisogna che ci siano gli stessi fattori 2, 3 e 7 con esponenti tutti pari e maggiori o uguali ai precedenti.
   Pertanto il multiplo di 756 cercato è: $2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = (2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1)^2 = 126^2$.
   Quindi il più piccolo numero naturale il cui quadrato è multiplo di 756 è **126**.

3. **LA PIRAMIDE [6105]**
   
   Il numero dei mattoni di ciascuna riga della piramide supera sempre di 1 il numero dei mattoni della riga precedente.
   Per calcolare il numero totale dei mattoni dobbiamo quindi calcolare la somma seguente: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots \ldots \ldots + 108 + 109 + 110$ cioè una somma nella quale ogni addendo differisce dal precedente per il valore costante 1.
   Una somma di questo tipo viene chiamata SERIE ARITMETICA e si calcola utilizzando questa formula: $\frac{\boldsymbol{n° \text{ degli addendi} \cdot (\text{primo addendo} + \text{ultimo addendo})}}{\mathbf{2}}$
   Quindi: $\frac{\mathbf{110 \cdot (1+110)}}{\mathbf{2}} = \mathbf{55} \cdot 111 = \mathbf{6105}$.

4. **IL MANUALE DI ZOOLOGIA [1680]**
   Dobbiamo trovare il primo numero maggiore di 1000 che sia anche multiplo del *minimo comune multiplo* dei numeri da 1 a 8, cioè di $mcm(1,2,3,4,5,6,7,8) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$.
   Pertanto il numero che serve deve essere $840 \cdot 2 = 1680$.

5. **MIRARE AL CENTRO! [61]**
   Il numero che sta a metà tra i due valori $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}$ e $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}}$ è la media aritmetica dei due numeri:
   Cioè: $x = \frac{\frac{7}{12}+\frac{7}{15}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{35+28}{60} = \frac{63}{2 \cdot 60} = \frac{21}{40}$. Pertanto la risposta è **61**.

6. **I NUOVI DRAGHI [126]**
   Da $n^{32} > 5^{96} = (5^3)^{32}$ si ottiene $n^{32} > 125^{32}$ per cui $n = \mathbf{126}$.

7. **LA DIETA DEL DRAGO [421]**
   Se il numero ***n*** diviso per 2 o per 3 o per 4 o per 5 o per 6 o per 7 dà sempre resto 1 significa che il numero $n - 1$ diviso per 2, per 3, per 4, per 5, per 6, per 7 ha sempre resto 0.
   Questo significa che $n - 1$ è multiplo di tutti questi numeri.
   Siccome il problema richiede di trovare il numero più piccolo allora, fra tutti i multipli di 2, 3, 4, 5, 6 e 7, prendiamo il minore, cioè il *minimo comune multiplo* di questi numeri.
   Quindi: $n - 1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ e allora $n = \mathbf{421}$.

8. **LA LEZIONE DI STORIA [21]**
Il numero totale di ananas che gli sconfitti devono consegnare ai vincitori deve essere divisibile per 252 e per 120. Inoltre, dovendo essere la minima quantità possibile, corrisponde al *mcm* di 252 e 120.
Essendo $252 = 4 \cdot 63 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ e $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ allora $mcm = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ che, diviso per 120 sconfitti, corrisponde a **21** ananas che ciascuno deve consegnare.

9. **MAGIA DEI NUMERI [5]**
$1250 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$ si trasforma in $125 \cdot 10 \cdot \frac{1}{5^n} = \frac{5^3 \cdot 5 \cdot 2}{5^n} = \frac{\mathbf{5^4 \cdot 2}}{\mathbf{5^n}}$ che risulta intera se l'esponente del 5 a denominatore assume i valori 0, 1, 2, 3 o 4. In totale per **5** valori.

10. **LA NURSERY [1310]**
Per ottenere il minimo, dobbiamo usare il più possibile contenitori da 8 uova, per il massimo dobbiamo usare il più possibile contenitori da 5.
Il massimo lo otteniamo usando 13 contenitori: 10 da cinque e 3 da otto.
Il minimo lo otteniamo con 10 contenitori: 2 da cinque e 8 da otto.
Pertanto la risposta è: **1310**

11. **LA SELLA DI UN DRAGO [18]**
Un rettangolo di lati interi (***a***,***b***) ha area uguale a 2100 se ***a*** divide 2100 e $b = \frac{2100}{a}$.
Quindi per contare i rettangoli diversi basta contare i divisori di 2100 e poi dividere per 2, in quanto ogni rettangolo che ha per lati la coppia (*a*,*b*) è considerato uguale al rettangolo di lati (*b*,*a*).
Dato che $2100 = 21 \cdot 100 = 3 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$ allora ogni divisore di 2100 deve essere un numero del tipo $3^\alpha \cdot 7^\beta \cdot 2^\gamma \cdot 5^\delta$ con $\boldsymbol{\alpha} = 0 \; o \; 1,$ $\boldsymbol{\beta} = 0 \; o \; 1,$ $\boldsymbol{\gamma} = 0 \; o \; 1 \; o \; 2$ e $\boldsymbol{\delta} = 0 \; o \; 1 \; o \; 2$.
Pertanto possiamo dire che il numero dei suoi divisori: $d(2100) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.
Di conseguenza il numero di rettangoli diversi è 36:2 = **18**.

12. **IL TEST DI CHIMICA [6]**
Poiché $630 = 2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 7$ i divisori positivi dispari di 630 che sono multipli di 5 sono tutti e soli i numeri del tipo $5 \cdot 3^\alpha \cdot 7^\beta$ con $\boldsymbol{\alpha}$ = 0, 1, 2 e $\boldsymbol{\beta}$ = 0, 1 .
Di conseguenza i casi possibili sono $3 \cdot 2 =$ **6** .

13. **SCHEDE ANATOMICHE [713]**
10^{80} è un numero formato da un 1 seguito da 80 zeri (81 cifre).
Se gli tolgo 35, mi resterà un numero di 80 cifre, tutte 9 tranne quelle delle decine e delle unità che saranno rispettivamente 6 e 5. Il numero cercato è dunque: $78 \cdot 9 + 6 + 5 = 713$.

14. **EDUCAZIONE FISICA [2352]**
Dato il numero naturale n , la cui scomposizione in *fattori primi* è $n = p_1{}^{\alpha_1} \cdot p_2{}^{\alpha_2} \ldots\ldots p_k{}^{\alpha_k}$ il numero dei suoi divisori è dato da: $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots . (\alpha_k + 1)$.
Pertanto bisogna ottenere la scomposizione del numero $n = 5^5 \cdot 6^6 \cdot 7^7$ in fattori primi.
$n = 5^5 \cdot 6^6 \cdot 7^7 = 5^5(2 \cdot 3)^6 7^7 = 5^5 2^6 3^6 7^7$.
Dalla scomposizione ottenuta si conclude che i divisori sono: $d(n) = 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 = 2352$.

15. **RIPOSO O RECUPERO? [13]**
Siccome $20 = 4 \cdot 5$, allora 20 divide esattamente tutti i fattoriali maggiori di $4!$.
Infatti $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathbf{4} \cdot \mathbf{5}$, $6! = 5! \cdot 6$, $7! = 6! \cdot 7$, $8! = 7! \cdot 8$ ......
Pertanto il resto della divisione dipende solo dai fattoriali che precedono 5!
Precisamente dalla somma dei loro resti nella divisione per 20, cioè: $1 + 2 + 6 + 4 = 13$.

16. **STRATEGIE IN BATTAGLIA [4040]**

Consideriamo l'insieme ***A*** di tutti i numeri da 1 a 100: $\{1, 2, 3, 4, \dots\dots, 97, 98, 99, 100\}$ e l'insieme ***B*** dei numeri centrali di ogni terna, che sono quelli da cancellare: $\{3, 8, 13, 18, \dots\dots, 93, 98\}$

La somma richiesta si ottiene dalla differenza fra la somma dei numeri di ***A*** e la somma dei numeri dell'insieme ***B***. Entrambe le somme costituiscono delle serie aritmetiche, perché in entrambe i numeri differiscono sempre per un valore costante. Pertanto, entrambe le somme si calcolano applicando la formula: $\frac{n° \; degli \; addendi \cdot (primo \; addendo + ultimo \; addendo)}{2}$

Nel caso dell'insieme A si ottiene: $\frac{100 \cdot (1 + 100)}{2} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101$

Mentre nel caso dell'insieme B: $\frac{20 \cdot (3 + 98)}{2} = 10 \cdot 101$

Pertanto il risultato è $50 \cdot 101 - 10 \cdot 101 = 40 \cdot 101 = \mathbf{4040}$.

17. **ESERCITAZIONE CON L'ARCO [130]**

Scriviamo le basi delle due potenze secondo la loro scomposizione in fattori primi e poi applichiamo le proprietà delle potenze:

$$40^{50} \cdot 50^{40} = (2^3 \cdot 5)^{50}(2 \cdot 5^2)^{40} = (2^{150} \cdot 5^{50})(2^{40} \cdot 5^{80}) = 2^{190} \cdot 5^{130}.$$

Siccome il numero di zeri con cui termina un numero è uguale al minimo fra i valori degli esponenti del 2 e del 5 presenti nella sua scomposizione in fattori primi, avremo 130 zeri.

18. **SUL QUADERNO [12]**

Per determinare il *minimo comune multiplo* bisogna prima scomporre i numeri in *fattori primi*.

Poiché $a = 6^3 \cdot 10^6 \cdot 15^9 = (2 \cdot 3)^3(2 \cdot 5)^6(3 \cdot 5)^9 = 2^9 \cdot 3^{12} \cdot 5^{15}$

$b = 6^9 \cdot 10^3 \cdot 15^6 = (2 \cdot 3)^9(2 \cdot 5)^3(3 \cdot 5)^6 = 2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 5^9$

$c = 6^6 \cdot 10^3 \cdot 15^9 = (2 \cdot 3)^6(2 \cdot 5)^3(3 \cdot 5)^9 = 2^9 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12}$

Allora, dovendo prendere tutti i fattori primi, comuni e non comuni, con il massimo esponente, si ha: $mcm = 2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 5^{15}$.

Per quanto riguarda il numero di zeri con cui termina questo numero è sufficiente guardare al minimo tra gli esponenti del 2 e del 5. Essendo 12, il numero di zeri è allora **12**.

19. **IL PETARDO ROSSO [36]**

Trasformiamo il prodotto in modo opportuno: $7^2 \cdot 4^{18} \cdot 5^{33} = 7^2 \cdot (2^2)^{18} \cdot 5^{33} = 7^2 \cdot 2^{36} \cdot 5^{33}$

Questo equivale a $49 \cdot 2^3 \cdot 10^{33} = 49 \cdot 8 \cdot 10^{33} = 392$ seguito da 33 zeri = **36** cifre.

20. **IL LUCENTE BLU [31]**

Sappiamo che il numero di zeri con cui termina un numero è uguale al minimo fra i valori degli esponenti del 2 e del 5 presenti nella sua scomposizione in fattori primi.

Poiché nei numeri del tipo $n!$ il fattore 5 è presente sempre meno volte rispetto al 2, allora per determinare con quanti zeri termina il numero $125!$ basta contare quante volte è presente il 5.

Esso è presente 3 volte nel 125; 2 volte nel 25, nel 50, nel 75 nel 100 mentre è presente una sola volta in tutti gli altri 20 multipli di 5.

In totale il 5 è presente 3+2+2+2+2+20 =31 volte e **31** è il numero di zeri di $125!$.

21. **FAME DA DRAGHI [1000]**

Poiché $5^{2017} \cdot 2^{2023} = 5^{2017} \cdot 2^{2017} \cdot 2^6 = 10^{2017} \cdot 64 = 64$seguito da 2017 zeri, allora la somma delle cifre è semplicemente = 10**.**

Pertanto, lo spinato verde alpino si è mangiato 10 quintali = **1000** chilogrammi di mele.