

GARA DI MATEMATICA ON-LINE (7/12/2022)
SOLUZIONI

1. PRIMA SOMMA [867]

Si tratta di effettuare la somma dei numeri: $3+9+15+\dots+99$ dove l'addendo successivo è ottenuto dal precedente aggiungendo 6. Raccogliendo un fattore 3 otteniamo $3\cdot(1+3+5+\dots+33)$. La somma dei primi k numeri dispari vale k^2 e quindi $3\cdot(1+3+5+\dots+33)=3\cdot17^2=867$.

2. SECONDA SOMMA [1734]

Si tratta di togliere dalla somma dei multipli di 2 la somma dei multipli di 6:

$$(2+4+6+\dots+100)-(6+12+\dots+96)=2(1+2+\dots+50)-6(1+2+\dots+16)=2\cdot\frac{50\cdot51}{2}-6\cdot\frac{16\cdot17}{2}=$$

$$50\cdot51-3\cdot16\cdot17=1734.$$

3. TERZA SOMMA [196]

Se il risultato è un numero di tre cifre, può essere solo $\triangle\triangle\triangle=111$ e quindi $\square\square=99$ visto che non può essere $\square\square=88$ (la differenza tra 111 e 88 è un numero dispari).

La soluzione è $6+6+99=111$. La risposta richieste è $\triangle\square\circ=196$.

4. QUARTA SOMMA [21]

Dobbiamo effettuare la somma $1980+1981+\dots+2022$. Possiamo procedere in due modi equivalenti.

Prima soluzione

Se tolgo da tutti gli anni 1980 avrò da sommare $0+1+2+\dots+42=\frac{42\cdot43}{2}=903$

Ho tolto $1980\cdot43=85140$.

Il totale è $85140+903=86043$ la cui somma delle cifre vale 21.

Seconda soluzione

$$1980+1981+\dots+2022=1+2+3+\dots+1980+\dots+2022-(1+2+3+\dots+1979)=\frac{2022\cdot2023}{2}-\frac{1979\cdot1980}{2}=86043,$$

la cui somma delle cifre vale 21.

5. LA TARGA [12]

Le prime tre informazioni ci dicono che la targa è del tipo $\boxed{9}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{8}$ con $a\neq b\neq c$.

L'informazione del quarto testimone diventa $a+b+c=5$. Ottenere 5 sommando tre numeri diversi è possibile solo con $4+1+0$ e $3+2+0$.

Permutandole in tutti i modi possibili si ottengono 12 possibili targhe.

6. LA RANA, IL CANGURO E LA LEPRE [96]

Le caselle dove ci saranno tutte le impronte saranno i multipli del $m.c.m(3,6,4)=12$, senza dimenticare la casella di partenza. La casella finale sarà $12\cdot8=96$.

7. SE FAI LA FIGURA... [704]

Sappiamo che $A_{PEQ}=32\text{ cm}^2$ e che $A_{RCD}=2\cdot A_{PEQ}$. Osserviamo, inoltre,

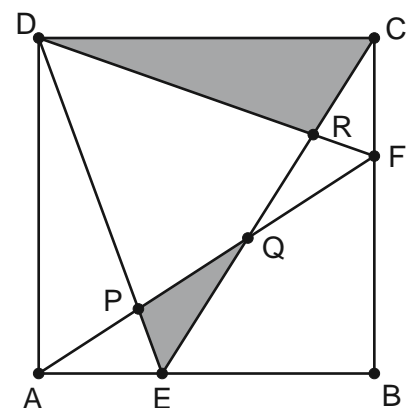
che $A_{DEC}=\frac{1}{2}A_{ABCD}$. Da tutto questo otteniamo:

$$A_{QRDP}=\frac{1}{2}A_{ABC}-A_{PEQ}-A_{RCD}=\frac{1}{2}40^2-32-64=704\text{ cm}^2.$$

8. CALORIE [20]

Se un cioccolatino avesse 100 cal, la mela ne avrebbe 5 cal. Servono

$$\frac{100}{5}=20\text{ mele per avere le stesse calorie.}$$



9. QUALCUNO MENTE... [6496]

Un furfante il posto pari ci assicura la presenza di due cavalieri ai suoi lati. Un cavaliere in posto dispari ci assicura di avere a fianco sia un cavaliere che un furfante. La configurazione che ottimizza la presenza dei cavalieri è quella in cui sono seduti alternativamente due cavalieri ed un furfante.

Il massimo numero possibile dei cavalieri è $\frac{2}{3} \cdot 6744 = 6496$.

10. DIVIDENDO UN QUADRATO [80]

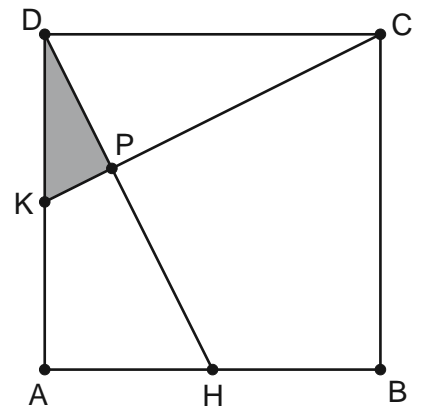
Sia P il punto di intersezione tra DH e CK . Per come sono stati costruiti, il DH e CK sono perpendicolari. Il triangolo DPK è simile al triangolo DAH . Determiniamo il rapporto di similitudine tra i due triangoli.

Per il Teorema di Pitagora $DH = \sqrt{40^2 + 20^2} = \sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ cm.

Il rapporto di similitudine $k = \frac{DH}{DK} = \frac{20\sqrt{5}}{20} = \sqrt{5}$. Il rapporto tra le aree è

$$k^2 = 5.$$

$$A_{DKP} = \frac{1}{5} A_{ADH} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 40 = 80 \text{ cm}^2.$$



11. MONEY [54]

Le monete da 50 centesimi sono $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ del totale. Se Giulia possiede x monete, queste devono verificare $\frac{5}{12}x = 20$ e quindi sono $x = 48$.

Il valore complessivo è $V = \frac{1}{4} \cdot 48 \cdot 1 \text{ €} + \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 2 \text{ €} + 20 \cdot \frac{1}{2} \text{ €} = 54 \text{ €}$.

12. LE FIGURINE [90]

Per risolvere il problema dobbiamo trovare il più grande divisore di 1260 che sia più piccolo di 100. Siccome $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, il divisore cercato è 90.

13. IN PERCENTUALE [40]

Dovendo calcolare una percentuale, supponiamo siano esattamente 100 gli alunni della classe e compilando una tabella, riportiamo le informazioni conosciute:

	BIONDI	CASTANI	TOTALE
MASCHI			50
FEMMINE	$\frac{75}{100} \cdot 40 = 30$		50
TOTALE	$\frac{40}{100} \cdot 100 = 40$	60	100

A questo punto completare la tabella è semplice:

	BIONDI	CASTANI	TOTALE
MASCHI	10	40	50
FEMMINE	30	20	50
TOTALE	40	60	100

La percentuale richiesta è 40%

14. UNA FRAZIONE [25]

$$\frac{\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{1}}}{\frac{1}{2}} : \frac{1}{\frac{2}{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{4}{3} : 2\right) : \left\{1 : \left[2 : \left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) : \left\{1 : \left[2 \cdot \frac{4}{3}\right]\right\} = \frac{2}{3} : \left\{1 : \frac{8}{3}\right\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{9}.$$

La soluzione richiesta è $16+9=25$

15. PER QUATTRO [8]

Prima osservazione: il numero deve essere pari, e quindi le sole cifre possibili sono 2, 4, 6 e 8.

Un numero è divisibile per 4 solo se lo è anche il numero composto dalle sue due ultime cifre.

Dovendo permutare le cifre all'interno del numero, se le ultime due cifre risultano formare un numero divisibile per 4 lo dovrà essere anche il numero ottenuto invertendole. Questo ci limita la scelta alle sole cifre 4 e 8. I numeri possibili sono solo $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ tutti posso scrivere usando le sole cifre 4 e 8.

16. NON SI COPIA !!! [339]

Riportiamo le informazioni note:

$$\begin{array}{r} 1 \square \square \cdot \\ 2 \square \square = \\ \hline 7 \square \square \\ 12 \square - \\ 246 - - \\ \hline 265 \square \square \end{array}$$

La penultima riga ci rivela che il primo fattore è $246 : 2 = 123$.

A questo punto il resto dell'operazione è facile da ricostruire:

$$\begin{array}{r} 1 \boxed{2} \boxed{3} \cdot \\ 2 \boxed{1} \boxed{6} = \\ \hline 7 \boxed{3} \boxed{8} \\ 12 \boxed{3} - \\ 246 - - \\ \hline 265 \boxed{6} \boxed{8} \end{array}$$

La risposta richiesta è $123+216=339$.

17. IL PIANETA DEGLI IMMORTALI [506]

Il peggiore dei casi è che dopo 2024 tutti gli abitanti abbiano ricevuto esattamente quattro tatuaggi.

Solo così al 2025-esimo anno ci sarà almeno uno con un quinto tatuaggio. Gli abitanti sono $\frac{2024}{4} = 506$.

18. SOLO DISPARI [31]

Le cifre dispari sono 5 quindi da una sola cifra ne abbiamo 5.

Da due cifre: 13, 15, 17, 19, 35, 37, 39, 57, 59 e 79. Ce ne sono 10.

Altrettanti da tre cifre, usando esattamente le cifre non usate nei numeri di due cifre.

5 da quattro cifre (sempre costruiti usando le cifre non usate nei numeri da una cifra).

Un solo numero da 5 cifre: 13579.

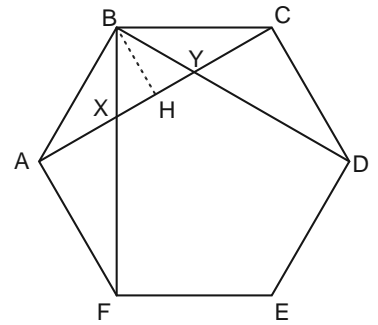
In totale ne abbiamo $5+10+10+5+1=31$.

19. DENTRO AD UN ESAGONO [173]

Osserviamo che i triangoli AXB e BYC sono isosceli e congruenti, inoltre BXY è equilatero. Da questo si deduce che $AX = XY = YC$.

Tracciando la perpendicolare ad AC da B e detto H il piede della perpendicolare, si osserva che i triangoli BHC e BHA sono congruenti e sono metà di un triangolo equilatero che ha il lato lungo come quello dell'esagono.

$$XY = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot HC = \frac{2}{3} \cdot \frac{300}{2} \sqrt{3} = 100\sqrt{3} \text{ cm} \cong 173 \text{ cm}.$$



20. PIÙ GRANDE [33]

Rappresentiamo la situazione mediante una tabella:

Barbara\Alberto	54	53	52	51	43	42	41	32	31	21
43	A	A	A	A	P	B	B	B	B	B
42	A	A	A	A	A	P	B	B	B	B
41	A	A	A	A	A	A	P	B	B	B
32	A	A	A	A	A	A	A	P	B	B
32	A	A	A	A	A	A	A	A	P	B
21	A	A	A	A	A	A	A	A	A	P

Dove A=vince Alberto, P=pareggio e B=Vince Barbara.

Su 60 casi, Alberto vince 39 volte, quindi

$$P(\text{vince Alberto}) = \frac{39}{60} = \frac{13}{20}$$