GARA DI MATEMATICA ON-LINE (14/11/2022)

1. LA MACIGNO MOBILE [5995]

Visto che i numeri non sono troppo grandi da calcolare, possiamo risolvere il problema semplicemente eseguendo il calcolo: $10^4-9^4+8^4-7^4+\ldots-1^4=10000-6561+4096-2401+1296-625+256-81+16-1=5995$.

2. IL DIABOLICO COUPÉ [23]

Siccome $p^3+2p^2+p=p(p+1)^2$, per avere 42 divisori postivi, deve accadere che $(p+1)^2$ ne deve avere $42:2=21$ e quindi $(p+1)^2=a^2\cdot b^6$ con a e b primi, cioè $p+1=a\cdot b^3$. Il più piccolo possibile è $p+1=2^3\cdot 3=24$ che funziona in quanto $p=23$ è primo.

3. LA MULTIUSO [439]

Se fossero tutti dei "$+$" avremmo che $p(2)=64+32+16+8+4+2+1=127$.

Dobbiamo scegliere degli addendi che facciano somma 50 in modo che cambiando segno il risultato possa essere quello richiesto. Notiamo che $32+16+2=50$. Il polinomio cercato è $p(x)=+x^6-x^5-x^4+x^3+x^2-x+1$.

$p(3)=729-243-81+27+9-3+1=439$.

4. LO SCARAFAGGIO VOLANTE [700]

Siano A, B C e D le quattro parti in cui le due diagonali dividono il quadrilatero, in modo che $A+B=525$, $C+D=1050$, $B+C=525$ e $C+D=1050$. Dalla prima e dalla terza relazione si deduce che $A=C$ e quindi che il quadrilatero è un trapezio. Se a queste informazioni aggiungiamo la nota proprietà dei trapezi $BD=A^2$, abbiamo tutti gli elementi per risolvere il problema attraverso un sistema:

$$\begin{cases} A+B=525\text{ cm}^2 \\ A+D=1050\text{ cm}^2 \\ A^2=BD \end{cases}\text{, che risolto permette di trovare } \begin{cases} A=350\text{ cm}^2 \\ B=175\text{ cm}^2 \\ D=700\text{ cm}^2 \end{cases}$$

La risposta richiesta è 700 cm^2.

5. IL VEZZOSO COUPÉ [145]

$$MCD\left(x^9+2x^5+3x^3+x^2+1;x^9+2x^5+3x^3\right)=MCD\left(x^9+2x^5+3x^3+x^2+1-(x^9+2x^5+3x^3);x^9+2x^5+3x^3\right)=$$

$$MCD\left(x^2+1;x^9+2x^5+3x^3\right)=MCD\left(x^2+1;x^3(x^6+2x^2+3)\right)=MCD\left(x^2+1;x^6+2x^2+3\right).$$

Eseguendo l'ultima divisione si scopre che x^2+1 divide esattamente x^6+2x^2+3.

$h(x)=x^2+1$. La soluzione richiesta è $h(12)=145$.

6. L'ARMATA SPECIALE [15]

Sappiamo che $HM=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{54}{10}$ (la media armonica) e che $GM=\sqrt{ab}=9$ (la media geometrica). Cerchiamo il valore di $AM=\dfrac{a+b}{2}$.

Intanto, dalla GM abbiamo $ab=81$. Facciamo i calcolo su HM :

$\dfrac{2}{\frac{a+b}{ab}}=\dfrac{27}{5}$, cioè $\dfrac{81\cdot 2}{(a+b)}=\dfrac{27}{5}$ da cui si ottiene $a+b=30$ e quindi $\dfrac{a+b}{2}=15$.

7. LA ANTIPROIETTILE [198]

n non può avere una sola cifra.

Supponiamo sia formato da due cifre: $n=\overline{ab}$.

Deve accadere che $20a+b=2(13a+b)$, cioè $6a+b=0$ che è impossibile.

Supponiamo sia formato da tre cifre: $n=\overline{abc}$: $20^2a+20b+c=2(13^2a+13b+c)$, cioè $62a=6b+c$. Potendo essere b al massimo 9, l'unica soluzione possibile è $a=1$ e di conseguenza $b=9$ e $c=8$: $n=198$.

Con quattro cifre non esistono soluzioni.

8. L'INSETTO SCOPPIETTANTE [40]

Sia $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$.

Sappiamo che $A = \frac{63a}{2} = \frac{28}{2}b = \frac{27}{2}c$; e possiamo anche scrivere $A = \frac{ax}{2} + \frac{4b}{2} + \frac{6c}{2}$ dove x è la distanza cercata.

Dalla prima equazione possiamo ricavare $b = \frac{63}{28}a$ e $c = \frac{63}{27}a$. La seconda equazione diventa:

$\frac{63a}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{4}{2} \cdot \frac{63}{28}a + \frac{6}{2} \cdot \frac{63}{27}a$. Semplificando a e i valori numerici ci rimane un'equazione nella sola x:

$\frac{63}{2} = \frac{x}{2} + \frac{9}{2} + 7$ che risolta ci porta a determinare $x = 40\ \text{cm}$.

9. LA SEI CILINDRI [5920]

Siccome il tetraedro è stato ottenuto sezionando un cubo, ci devo essere tre spigoli tra loro a due a due perpendicolari. Cerchiamoli: eleviamo tutti i valori noti al quadrato e confrontiamoli alla ricerca di terne pitagoriche: siccome $44^2 + 117^2 = 125^2$, $117^2 + 240^2 = 267^2$ e $44^2 + 240^2 = 244^2$, i tre spigoli cercati sono $44\ \text{mm}$, $117\ \text{mm}$ e $240\ \text{mm}$.

Il volume è $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot 117 \cdot 240 = 205.920\ \text{mm}^2$

10. LA SPACCATUTTO [34]

Sommiamo tra loro le tre equazioni:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{a^2}{a+c} + \frac{b^2}{b+a} + \frac{c^2}{c+b} + 34 - x.$$

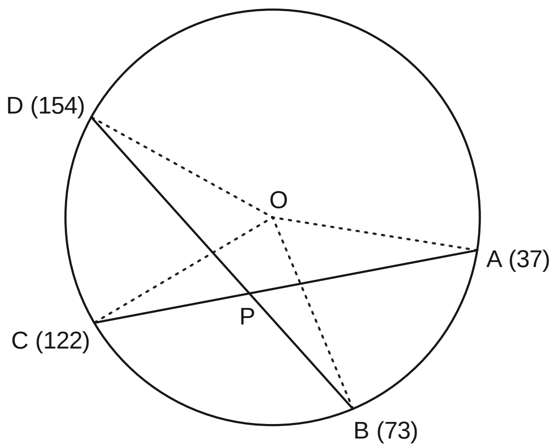
Accoppiamo tra loro quelli con lo stesso denominatore:

$\frac{a^2 - b^2}{a+b} \frac{b^2 - c^2}{b+c} + \frac{c^2 - a^2}{c+a} = 34 - x$ e semplifichiamo numeratori e denominatori:

$a - b + b - c + c - a = 34 - x$. Semplificando ancora si ottiene $x = 34$.

11. LA VETTURA 00 [68]

Se uniamo tutte le posizioni delle statue al centro, otteniamo angoli di $2°$. La situazione e simile a quella in figura, dove l'obiettivo è quello di calcolare l'angolo $D\hat{P}C$.



Sappiamo che l'angolo $C\hat{O}A = (122 - 37) \cdot 2° = 170°$, quindi l'angolo $O\hat{C}A = 5°$.

Analogamente l'angolo $D\hat{O}B = (154 - 73) \cdot 2° = 162°$, quindi l'angolo $O\hat{B}D = 9°$.

L'angolo $C\hat{O}B = (122 - 73) \cdot 2° = 98°$.

Del quadrilatero $COBP$ ci manca il solo angolo (concavo) $C\hat{P}B = 360° - 98° - 9° - 5° = 248°$.

$D\hat{P}C = C\hat{P}B - 180° = 248° - 180° = 68°$

12. PARTITI [142]

Raccogliamo a fattor comune $\frac{1}{x}$ ed otteniamo: $\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \ldots\right) = 71$. Nella parentesi riconosciamo una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{x^2}$: $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 71$ che semplificata ci porta a $\frac{x}{x^2 - 1} = 71$.

$$y = f(x+1) + f(x-1) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Sfruttando quelle che abbiamo appena scoperto, $y = 2 \cdot \frac{x}{x^2 - 1} = 2 \cdot 71 = 142$.

13. LA FRANA [156]

Ricordiamo che $M.C.D.(a,b)\cdot m.c.m.(a,b)=ab$, quindi $ab=12\cdot 432=2^6\cdot 3^4$.

Cerchiamo di ricostruire i valori di a e b rispettando i vincoli e cercando di fare in modo di minimizzare la loro somma. Nelle due scomposizioni in fattori dovranno comparire solo i numeri primi 2 e 3 con almeno $2^2\cdot 3$ in ciascuno. Siccome $432=2^4\cdot 3^3$, almeno uno dei due deve avere il fattore 2^4 e almeno uno dei due deve avere il fattore 3^3. La situazione migliore la otteniamo con $a=2^4\cdot 3=48$ e $b=2^2\cdot 3^3=108$ la cui somma vale $48+108=156$.

14. LA MACIGNO MOBILE VUOLE PASSARE IN TESTA [1655]

Sia k il primo addendo. La somma di n addendi consecutivi a partire da k è:

$$k+(k+1)+(k+2)+...+(k+n-1)=nk+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(2k+n-1)}{2}.$$

Deve accadere che $n(2k+n-1)=2000$. n deve essere un divisore di 2000.

Notiamo che se n è pari, $2k+n-1$ è dispari, quindi l'unico valore pari da provare è $n=16$ che porta a trovare $k=55$.

La soluzione richiesta è 1655.

15. UNA DISTRAZIONE FATALE [91]

Siano x_1, kx_1 e k^2x_1 le tre soluzioni in progressione geometrica ($k\neq\pm1$ per la condizione di radici distinte).

Le reciproche sono $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{kx_1}$ e $\frac{1}{k^2x_1}$.

Verifichiamo se in questo ordine possono formare una progressione aritmetica:

$\frac{1}{k\cancel{x_1}}-\frac{1}{\cancel{x_1}}=\frac{1}{k^2\cancel{x_1}}-\frac{1}{k\cancel{x_1}}$ diventa $k-k^2=1-k$ cioè $(k-1)^2=0$. La soluzione $k=1$ non è accettabile.

Verifichiamo se $\frac{1}{kx_1}$, $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{k^2x_1}$, in quest'ordine possono formare una progressione aritmetica:

$\frac{1}{\cancel{x_1}}-\frac{1}{k\cancel{x_1}}=\frac{1}{k^2\cancel{x_1}}-\frac{1}{\cancel{x_1}}$ diventa $k^2-k=1-k^2$ cioè $2k^2-k-1=0$ che ha per soluzioni $k=1$ (non permessa) e $k=-\frac{1}{2}$. Una possibile terna di soluzioni è x_1, $-\frac{x_1}{2}$ e $\frac{x_1}{4}$

Verifichiamo se $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{k^2x_1}$ e $\frac{1}{kx_1}$, in quest'ordine possono formare una progressione aritmetica:

$\frac{1}{\cancel{x_1}}-\frac{1}{k^2\cancel{x_1}}=\frac{1}{k\cancel{x_1}}-\frac{1}{\cancel{k^2x_1}}$ diventa $k^2-1=1-k$ cioè $k^2+k-2=0$ che ha per soluzioni $k=1$ (non permessa) e $k=-2$. Una possibile terna di soluzioni è x_1, $-2x_1$ e $4x_1$.

Dal polinomio, sappiamo che la somma dei prodotti a due a due deve valere -24. Determiniamo le soluzioni:

Nel primo caso: $-\frac{x_1^{\ 2}}{2}+\frac{x_1^{\ 2}}{4}-\frac{x_1^{\ 2}}{8}=-24$ ci permette di trovare $x_1^{\ 2}=64$ e quindi abbiamo due possibilità: $(8;-4;2)$ e $(-8;+4;-2)$.

Nel secondo caso otteniamo $-2x_1^{\ 2}+4x_1^{\ 2}-8x_1^{\ 2}=-24$ che ci porta a $x_1^{\ 2}=4$. Le possibili terne di soluzioni sono $(2;-4;8)$ o $(-2;4;-8)$, che sono le stesse di prima solo permutate.

Delle soluzioni trovate dobbiamo scartare $(8;-4;2)$ in quanto la somma dei valori vale 6 ed avremmo che $a=-6$ contro le ipotesi del problema.

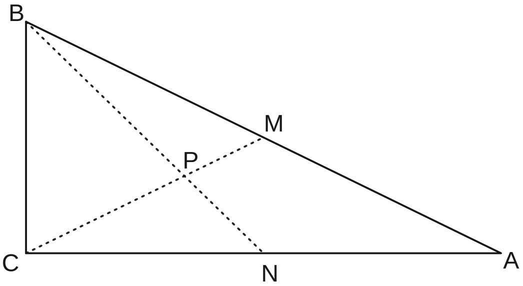
Il polinomio cercato è $p(x)=(x+8)(x-4)(x+2)$.

$p(5)=(5+8)(5-4)(5+2)=91$.

16. PAURA? [90]

Se i quadrati dei lati sono proporzionali ai numeri 1, 2 e 3, vuol dire che i tre lati verificano il teorema di Pitagora, infatti $3k = 2k + k$.

Risolviamo il problema per il triangolo di lati $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ e $BC = 1$ (come in figura).



$CM = BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ in quanto raggi della circonferenza circoscritta al triangolo che ha centro proprio nel punto medio dell'ipotenusa.

$CP = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ per le note proprietà del baricentro P.

$$BN = \sqrt{BC^2 + CN^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$BP = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Osserviamo il triangolo BPC e notiamo che $BC^2 = PC^2 + BP^2$, infatti $1^2 = \dfrac{3}{9} + \dfrac{6}{9}$ e quindi $B\hat{P}C = 90°$.

17. TRAPPOLA GEOMETRICA [120]

I lati di $O_1O_2O_3O_4$ sono gli assi dei quattro segmenti che congiungono i vertici con P. Pertanto il quadrilatero è un parallelogrammo, il quale è ciclico se e solo se i suoi angoli sono retti. Pertanto anche le diagonali di $ABCD$ devono essere perpendicolari tra di loro. Ora, O_1O_2 corrisponde alla metà di una diagonale mentre O_2O_3 corrisponde a metà dell'altra diagonale. In un quadrilatero con le diagonali perpendicolari, l'area è uguale a $A = \dfrac{d_1 d_2}{2}$. $A_{ABCD} = \dfrac{(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 12)}{2} = 120\ \text{m}^2$.

18. PRIMO POSTO [296]

Prima di tutto sfruttiamo il quadrato di trinomio per determinare il valore di $ab + ac + bc$:

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$. Sostituendo i valori noti: $6^2 = 50 + 2(ab+ac+bc)$ e di conseguenza $ab + ac + bc = -7$.

Facciamo lo stesso per il cubo di trinomio che può essere scritto:

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+ac+bc) + 3abc$.

Inserendo i valori noti otteniamo: $6^3 = 1230 + 3\cdot 6(-7) + 3abc$ da cui si ottiene che $abc = 296$.

19. SECONDO POSTO [XX]

[PROBLEMA ANNULLATO]

20. TERZO POSTO [5324]

Dalla prima affermazione concludiamo che B siede vicino ad E, che messo assieme alla quarta affermazione ci assicura che si deve presentare la sequenza B-E-A-D o D-A-E-B. Siccome F non può sedere a fianco di D, deve sedere al fianco di F ma non alla sua sinistra, quindi la sequenza corretta è la prima. l'ordine secondo i posti numerati diventa A(1)-D(2)-C(3)-F(4)-B(5)-E(6).

La soluzione richiesta è 5324.