GARA DI MATEMATICA ON-LINE (16/1/2023)
SOLUZIONI

1. UN PRODIGIO [96]

Semplificando si ha che $a_0 = 11$, $a_1 = 12$, … $a_{170} = 181$. La loro media è $M = \dfrac{\frac{181 \cdot 182}{2} - \frac{10 \cdot 11}{2}}{171} = 96$.

2. LE MIGLIORI AMICHE [7505]

Per le proprietà del triangolo, $95 - 40 < x < 95 + 40$, quindi $55 < x < 135$.

$$56 + 57 + \ldots + 134 = \frac{134 \cdot 135}{2} - \frac{55 \cdot 56}{2} = 7505.$$

3. LE LORO PASSIONI [7448]

Procediamo per casi:

un solo simbolo "♥": ♥$xxxxx$ (calcolo gli anagrammi della stringa e poi moltiplico per 4 per ogni x): $6 \cdot 4^5$;

tre simboli "♥": ♥♥♥xxx: $\binom{6}{3} \cdot 4^3$;

Cinque simboli "♥": ♥♥♥♥♥x: $\binom{6}{5} \cdot 4$.

In totale $6144 + 1280 + 24 = 7448$ parole possibili.

4. IL TEMPIO DI FAMIGLIA [1043]

Il resto della divisione è $r = p(1) = 2 + k + 5 = k + 7$.

Il quoziente della divisione è:

$$q(x) = \frac{p(x) - r}{x - 1} = \frac{2x^{2022} + kx + 5 - k - 7}{x - 1} = \frac{2\left(x^{2022} - 1\right) + k(x - 1)}{x - 1} = 2\left(x^{2021} + x^{2020} + \ldots + 1\right) + k.$$

Dalle ipotesi $q(1) = 5080 = 2(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{2022 addendi}}) + k$, quindi $k = 1036$.

$r = 1036 + 7 = 1043$.

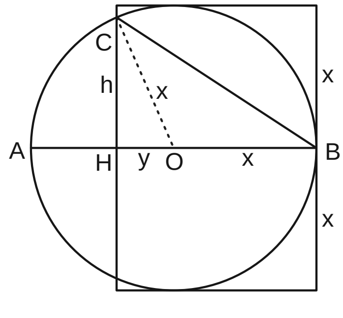
5. UNA SORPRESA [143]

Stiamo cercando il più piccolo intero positivo n tale che esistono a e b tali che $77n = 91a$ e $91n = 77b$, che semplificate diventano $11n = 13a$ e $13n = 11b$.

Ricavando n da entrambe ed uguagliandole si ottiene $169a = 121b$ da cui $a = 121$ e $b = 169$.

Il valore più piccolo è $n = \dfrac{13}{11} 121 = 143$.

6. DEVON [144]



Prima soluzione

Sia x il raggio della circonferenza di centro O, sia H l'intersezione tra il lato del rettangolo e il diametro AB e sia $OH = y$.

Per Pitagora $h^2 = x^2 - y^2$ e $h^2 = 12^2 - (x + y)^2$. Uguagliando le due relazioni si ottiene $x^2 - \cancel{y^2} = 12^2 - x^2 - 2xy - \cancel{y^2}$ che può essere scritta $2x^2 + 2xy = 144$.

Ora siccome $A_{\text{Rettangolo}} = 2x(x + y) = 2x^2 + 2xy$, per quanto appena trovato $A_{\text{Rettangolo}} = 144 \text{ cm}^2$.

Seconda soluzione

Per il primo teorema di Euclide $HB \cdot AB = 12^2$, ma HB è la base del rettangolo mentre AB lungo come l'altezza del rettangolo. $A_{\text{Rettangolo}} = 144 \text{ cm}^2$.

7. LA SFURIATA [15]

Prima soluzione

Determiniamo i valori di a e b in funzione di k: $a=\log_9 k$ e $b=\log_{25} k$. Risolviamo ora l'equazione $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$:

$$\frac{1}{\log_9 k}+\frac{1}{\log_{25} k}=2$$
$$\log_k 9+\log_k 25=2$$
$$\log_k(9\cdot 25)=2$$
$$\log_k 15^2=2$$
$$\cancel{2}\log_k 15=\cancel{2}$$
$$\log_k 15=1$$
$$k=15.$$

Seconda soluzione

$k=3^{2a}$ possiamo scriverlo $k^{\frac{1}{2a}}=3$ e $k=5^{2b}$ come $k^{\frac{1}{2b}}=5$.

Moltiplicando tra loro le due relazioni abbiamo $k^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}}=15$, cioè $k^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=15$ cioè $k=15$.

8. IL PANDA ROSSO [2640]

Disponiamo prima di tutto le lettere D E F e G in $4!$ modi.
Ora valutiamo due casi: Inseriamo tra le 4 lettere la B e la C in modo che siano separate da almeno una lettera.

Possiamo farlo in $\binom{5}{2}\cdot 2$ modi. In questo maniera possiamo inserire la A in 4 posti.

Oppure inseriamo le lettere Be C vicine, cosa che possiamo fare in $5\cdot 2$ modi. Così facendo la lettere A ha 3 possibilità.

In totale avremo $4!\left(\binom{5}{2}\cdot 2\cdot 4+5\cdot 2\cdot 3\right)=2640$ possibilità.

9. A SCUOLA [148]

Il generico termine della progressione aritmetica ha forma $k+nk^2$. Ora deve esistere $k\in\mathbb{N}$ e $n\in\mathbb{N}$ tale che $k+nk^2=132$, cioè $k(1+nk)=132=2^2\cdot 3\cdot 11$.

Dobbiamo trovare tutti i casi in cui k è un divisore di 132:

$k=1,\ n+1=132$ **OK** $n=131$	$k=6,\ 6n+1=22$ NO
$k=2,\ 2n+1=66$ NO	$k=11,\ 11n+1=12$ **OK** $n=1$
$k=3,\ 3n+1=44$ NO	Non ha senso provare altri divisori a parte:
$k=4,\ 4n+1=33$ **OK** $n=8$	$k=132,\ n+1=1$ **OK** $n=0$

La soluzione richiesta è $1+4+11+132=148$.

10. LA VERITÀ [64]

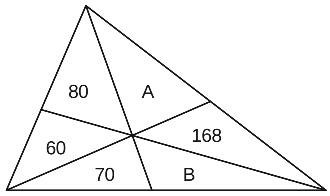
Sostituiamo $t=x^{2022}$. $t+\frac{1}{t}=6$.

Osserviamo che $\left(t+\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2=36$, cioè $t^2+\frac{1}{t^2}=34$

Siccome $\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2=34-2=32$, quindi $t-\frac{1}{t}=\pm\sqrt{32}$.

La soluzione richiesta è $\left(\sqrt{32}\right)^2+\left(-\sqrt{32}\right)^2=64$.

11. IL RITUALE DELLA LUNA ROSSA [112]



Sia B la parte di triangolo non ancora indicata sulla figura.
Il rapporto tra le aree rispetto a un lato deve essere pari al rapporto tra le due parti.
Osservando il triangolo rispetto ai due lati obliqui della figura, possiamo scrivere che:

$$\begin{cases} \dfrac{60+70+B}{80+168+A} = \dfrac{60}{80} \\ \dfrac{80+60+A}{70+168+B} = \dfrac{A}{168} \end{cases}.$$

Risolvendo si ottiene $A = 112$ e $B = 140$.

12. DOMINARE IL PANDA [5]

Procediamo sostituendo $x^2 = 1 - x$.

$$\frac{x^5+8}{x+1} = \frac{\left(x^2\right)^2 \cdot x + 8}{x+1} = \frac{(1-x)^2 \cdot x + 8}{x+1} = \frac{\left(1-2x+x^2\right)\cdot x + 8}{x+1} = \frac{(1-2x+1-x)\cdot x+8}{x+1} = \frac{(2-3x)\cdot x + 8}{x+1} = \frac{2x-3x^2+8}{x+1} =$$

$$\frac{2x-3(1-x)+8}{x+1} = \frac{5x+5}{x+1} = \frac{5\,\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = 5.$$

13. IL CONCERTO [7]

Se il decagono ha i lati minori del raggio, il punto più basso che può raggiungere è pari all'altezza di un triangolo equilatero di lato r.

La probabilità cercata è $P = \dfrac{\pi\left(\dfrac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \dfrac{3}{4}$.

La risposta richiesta è $3+4=7$

14. IL PREZZO DA PAGARE [2916]

Se $n = \overline{abcd}$, deve accadere che $3(a+b+c+d) = \sqrt{n}$, quindi $9(a+b+c+d)^2 = n$. n è multiplo di 9, ma se n è multiplo di 9 allora anche la somma delle sue cifre lo deve essere e quindi $\sqrt{n}$ deve essere multiplo di 27.

Cerchiamo la soluzione tra i multipli di 27:

$27^2 = 729$ non ha quattro cifre;

$54^2 = 2916$ è la nostra soluzione;

$81^2 = 6561$ non verifica la condizione.

Altri multipli hanno più di quattro cifre.

15. UNA SCOPERTA [75]

Prima di tutto notiamo che le condizioni assegnate equivalgono a $a+b+c=0$ e $abc=5$.

$ab(a+b)^4 + bc(b+c)^4 + ac(a+c)^4 = ab(-c)^4 + bc(-a)^4 + ac(-b)^4 = abc(a^3+b^3+c^3) = 5(a^3+b^3+c^3)$.

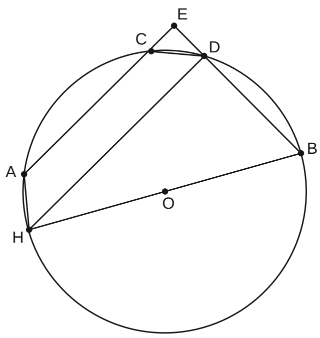
Sfruttiamo i prodotti notevoli per determinare il valore della parentesi:

$$5(a^3+b^3+c^3) = 5\left((a+b+c)^3 - 3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) - 6abc\right) =$$

$$5\left(-15\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)-30\right) = -75\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{c}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{a}-3\right)-150 =$$

$$-75\left(\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}-3\right)-150 = -75\cdot(-3)-150 = 75.$$

16. LA SQUADRA [13]



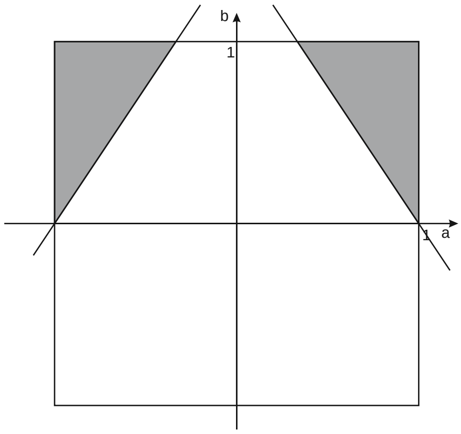
Tracciamo il diametro HB.

Siccome HDB è un triangolo rettangolo, AE è parallelo ad HD, quindi $AHDC$ è un trapezio isoscele. Da ciò $AH = CD = 10\ \text{cm}$.

Per il Teorema di Pitagora $HB = \sqrt{AB^2 + AH^2} = 26\ \text{cm}$.

Il raggio della circonferenza misura $r = \dfrac{HB}{2} = 13\ \text{cm}$.

17. LA RACCOLTA [7]



Valutiamo i due casi per il valore assoluto:

Se $a \geq 0$ allora la relazione assegnata diventa $3a + 2b \geq 3$.

Se $a < 0$ allora la relazione assegnata diventa $-3a + 2b \geq 3$.

Rappresentiamo la situazione su un sistema di assi cartesiano dove $x = a$ e $y = b$ tenendo conto di tutte le limitazioni:

La probabilità cercata è data dall'area dei due triangoli scuri rispetto all'area del quadrato:

$$P = \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{6}.$$

La soluzione richiesta è $1 + 6 = 7$.

18. LE ACCUSE DI MING [277]

Se d_1, d_2,… d_n sono i divisori di 21600, la somma cercata è

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n} = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{21600}.$$

Siccome $21600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$,

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = (1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2+3^3)(1+5+5^2) = \frac{2^6-1}{2-1} \cdot \frac{3^4-1}{3-1} \cdot 31 = 63 \cdot 40 \cdot 31$$

La somma cercata vale $\dfrac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{21600} = \dfrac{63 \cdot 40 \cdot 31}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2} = \dfrac{217}{60}$.

La risposta è $217 + 60 = 277$.

19. IL GIORNO DEL RITUALE [240]

Prima di tutto osserviamo che i tre numeri negativi non possono stare vicini in quanto se lo fossero avremmo una sequenza di tre numeri nell'ordine negativo-positivo-negativo che non è permessa.

Supponiamo ora di aver posizionato due numeri negativi separati da un positivo nell'ordine $\boxed{a}\boxed{x}\boxed{b}$. Per le condizioni del problema deve accadere che $ax \leq bx$. Essendo x posivivo, deve essere $a \leq b$.

I tre negativi dovranno essere posizionati necessariamente $\boxed{-3}\boxed{+n_1}\boxed{-2}\boxed{+n_2}\boxed{-1}$.

Ragioniamo ora sulla posizione dello "0"

<u>Primo caso</u>: "0" in x_6 $\boxed{-3}\boxed{x_2}\boxed{-2}\boxed{x_4}\boxed{-1}\boxed{0}\boxed{x_7}\boxed{x_8}\boxed{x_9}\boxed{x_{10}}$. Rimangono i seguenti vincoli da soddisfare:

$-2x_2 \leq -2x_4$, cioè $x_2 \geq x_4$;

$x_7 x_8 \leq x_8 x_9$, cioè $x_7 \leq x_8$ e

$x_8 x_9 \leq x_9 x_{10}$, cioè $x_8 \leq x_{10}$.

Vi sono $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 90$ possibilità di soddisfare tutti i vincoli.

<u>Secondo caso</u>: "0" in x_7 e primo termine negativo $\boxed{-3}\boxed{x_2}\boxed{-2}\boxed{x_4}\boxed{-1}\boxed{x_6}\boxed{0}\boxed{x_8}\boxed{x_9}\boxed{x_{10}}$. Rimangono i seguenti vincoli da soddisfare:

$-2x_2 \leq -2x_4$, cioè $x_2 \geq x_4$ ma anche $-x_4 \leq -x_6$, cioè $x_4 \geq x_6$ e quindi $x_2 \geq x_4 \geq x_6$;

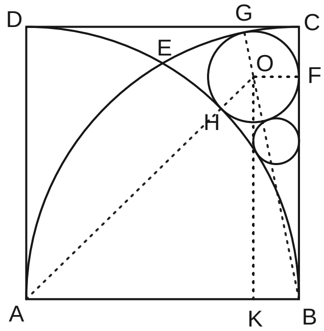
$x_8 x_9 \leq x_9 x_{10}$, cioè $x_8 \leq x_{10}$.

Vi sono $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60$ possibilità di soddisfare tutti i vincoli.

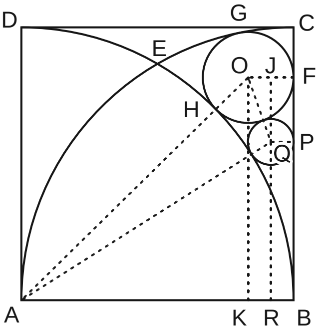
Terzo caso: “0” in x_7 e primo termine positivo $\boxed{x_1}\boxed{-3}\boxed{x_3}\boxed{-2}\boxed{x_5}\boxed{-1}\boxed{0}\boxed{x_8}\boxed{x_9}\boxed{x_{10}}$. Rimangono i seguenti vincoli da soddisfare:
Analogamente al caso precedente $x_1 \geq x_3 \geq x_5$;
$x_8x_9 \leq x_9x_{10}$, cioè $x_8 \leq x_{10}$.
Vi sono $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2} = 60$ possibilità di soddisfare tutti i vincoli.

Quarto caso: “0” in x_8 $\boxed{x_1}\boxed{-3}\boxed{x_3}\boxed{-2}\boxed{x_5}\boxed{-1}\boxed{x_7}\boxed{0}\boxed{x_9}\boxed{x_{10}}$. Necessariamente dovranno essere sia x_1 che x_7 positivi altrimenti a ridosso dello zero avremo un positivi prima di un valore nullo.
Dobbiamo verificare il vincolo $x_1 \geq x_3 \geq x_5 \geq x_7$.
Vi sono $\binom{6}{4}\cdot 2 = 30$ possibilità di soddisfarlo.
In totale abbiamo $90+60+60+30=240$ possibili sequenze.

20. IL CERCHIO RITUALE [36]



Calcoliamo prima di tutto il raggio della prima circonferenza. Sia O il suo centro e sia K il piede della perpendicolare al lato AB mandato da O.
Sia r il raggio da calcolare.
Osserviamo che $AO=1+r$; $BO=1-r$; $BK=r$ e $AK=1-r$. Grazie al Teorema di Pitagora, possiamo scrivere in due modi diversi la misura del segmento OK:
$$OK^2 = AO^2 - AK^2 = BO^2 - KB^2 = (1+r)^2 - (1-r)^2 = (1-r)^2 - r^2.$$
Risolvendo l'ultima uguaglianza si ottiene $r = \frac{1}{6}$. Per comodità calcoliamo il valore
$$OK = \sqrt{\left(1+\frac{1}{6}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



Sia ora x il raggio della seconda circonferenza di centro Q e sia R il piede della perpendicolare mandato da Q su AB.
$$QR = \sqrt{AQ^2 - AR^2} = \sqrt{(1+x)^2 - (1-x)^2} = 2\sqrt{x}.$$
Riferendoci alle lettere riportate in figura osserviamo che:
$$JQ = FP = BF - PB = OK - QR = \frac{\sqrt{6}}{3} - 2\sqrt{x}\,;\; OQ = \frac{1}{6}+x\,;\; OJ = \frac{1}{6}-x.$$
Per il Teorema di Pitagora sul triangolo OJQ abbiamo:
$$\left(\frac{1}{6}+x\right)^2 = \left(\frac{1}{6}-x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 2\sqrt{x}\right)^2,$$ cioè
$\frac{x}{3} = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} + 4x - \frac{4}{3}\sqrt{6x}$ che semplificata diventa
$5x+1 = 2\sqrt{6x}$. Elevando al quadrato e sommando i termini simili otteniamo
$25x^2 - 14x + 1 = 0$, che risolta porta alle due soluzioni
$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{24}}{25}$ di cui la sola soluzione negativa è accettabile per la natura del problema.
$$x = \frac{7-2\sqrt{6}}{25}.$$
La soluzione richiesta è $7-2+6+25=36$.

21. IL RITUALE DEL PANDA ROSSO [2258]

Sia $S(n)$ il numero di aiuole in cui l'ultima pianta (a destra) sia o erica o geranio, e sia $T(n)$ il numero di aiuole in cui l'ultima pianta (a destra) sia o lavanda oppure oleandro.
Per rispettare la condizione che erica e gerani non siano mai vicini, possiamo scrivere la soluzione del problema per ricorsione, osservando che
$S(n+1)=S(n)+2T(n)$: Possiamo aggiungere solo Erica o Geranio, se già finisce con la stessa pianta, oppure entrambi se non finisce con nessuna delle due:
$T(n+1)=2S(n)+2T(n)$, Oleandro e Lavando possiamo aggiungerle qualunque sia l'ultima pianta precedente.
Sappiamo che $S(1)=2$ e $T(1)=2$, quindi applicando la ricorsione otteniamo:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
S	2	6	22	78	278	990
T	2	8	28	100	356	1268

In totale abbiamo $1268+990=2258$ aiuole possibili.

22. RICOSTRUIRE LO SKYDOME [1107]

Le palline potranno essere divise nei seguenti gruppi:

$2-2-2-2$: scegliamo le 4 scatole che le conterranno in $\binom{8}{4}=70$ modi;

$2-2-2-1-1$: scegliamo le 5 scatole che le conterranno in $\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{2}=560$ modi;

$2-2-1-1-1-1$: scegliamo le 6 scatole che le conterranno in $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{4}=480$ modi;

$2-1-1-1-1-1-1$: scegliamo le 7 scatole che le conterranno in $\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{6}=56$ modi;

$1-1-1-1-1-1-1-1$: Ogni scatola conterrà una pallina.

In totale $70+560+480+56+1=1107$