GARA DI MATEMATICA ON-LINE BIENNIO (28/11/2022)
Soluzioni

1. IL PENTAGONO COLORATO [4]
Visto che il centro è collegato con tutti gli altri vertici, lui dovrà avere un colore a sé.
A questo punto coloriamo alternativamente con due colori gli altri vertici, ma avremo bisogno di un terzo colore per completare lo schema in quanto i vertici di un pentagono non sono pari.
In tutto abbiamo bisogno di 4 colori.

2. GLI AUMENTI [110]
Se b è la base e h l'aktezza del rettangolo, il nuovo rettangolo avrà area $\frac{150}{100}b \cdot \frac{140}{100}h = \frac{210}{100}bh$. L'area è aumentata del 110%.

3. A CASA [8]
Se s è la distanza totale, quando la mamma ha percorso $\frac{1}{2}s$, Pietro ha percorso $\frac{1}{4}s$. Lo spazio restante viene percorso alla stessa velocità, quindi alla fine la mamma avrà percorso $\frac{1}{2}s + \frac{1}{8}s = \frac{5}{8}s$ mentre Pietro i restanti $\frac{3}{8}s$.

La risposta cercata è $\frac{\frac{5}{8}s}{\frac{3}{8}s} = \frac{5}{3}$. La risposta richiesta è $5+3=8$.

4. GIOCHI A CARTE? [1111]
Sfruttando il principio di inclusione esclusione, si ha che $2022 = 1501 + 716 - 2x + x$, da cui si ottiene $x = 195$.
Sanno giocare solamente a scopone scientifico $1501 - 2 \cdot 195 = 1111$ giocatori.

5. IL TRAPEZIO E IL CERCHIO [450]
Il lato obliquo, per il teorema delle tangenti, è pari a $\frac{B}{2} + \frac{b}{2} = \frac{8100}{2} + \frac{100}{2} = 4100 \text{ cm}$.
Per il Teorema di Pitagora, l'altezza del trapezio, che è anche il diametro della circonferenza, misura $d = \sqrt{4100^2 - (4050-50)^2} = 900 \text{ cm}$.
Il raggio misura 450 cm.

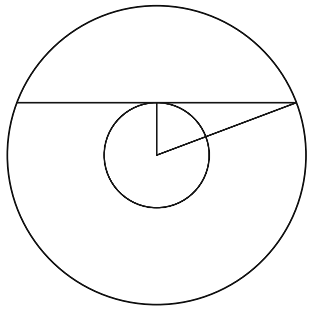
6. TROVA IL NUMERO [42]
Scomponiamo 336 in fattori primi: $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$.
Ora, dividendo per le due cifre dobbiamo ritrovare il numero stesso. Facendo un paio di prove si scopre che $336 : (2 \cdot 4) = 42$.

7. RESTO 1 [9000]
Stiamo cercando i numeri del tipo $10n+1$ compresi tra 10000 e 99999:
$10000 \le 10n+1 \le 99999$,
$9999 \le 10n \le 99998$
$\frac{9999}{10} \le n \le \frac{99998}{10}$
$999 < n \le 9999$
e quindi 9000 valori possibili.

8. LA CORDA [480]

La massima corda è necessariamente tangente alla circonferenza interna e può essere determinata sfruttando il Teorema di Pitagora attraverso il triangolo formato dai due raggi delle circonferenze:

$c = 2\cdot\sqrt{25^2-7^2} = 2\cdot 24 = 48\text{ cm}$.



9. IL POLINOMIO [20]

Ogni monomio dovrà avere la forma $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}k^{\alpha_4}$ con $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=3$.

Questo è il modello delle combinazioni con ripetizione e in questo caso sono $\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}=20$.

10. CHE BRAVI! [25]

Per minimizzare gli studenti bravi in tutte e tre le materie è necessario avere più studenti possibili in due materie.

Siano x gli studenti bravi in tutte le materie, a quelli bravi in matematica e latino ma non in italiano, b quelli bravi in matematica e italiano ma non in latino e c quelli bravi in italiano e latino ma non in matematica. Cerchiamo una soluzione a:

$\begin{cases} a+b+c+x=100 \\ a+b+x=80 \\ a+c+x=75 \\ b+c+x=70 \end{cases}$ Togliendo dalla prima ciascuna delle altre equazioni otteniamo $\begin{cases} a=30 \\ b=25 \\ c=20 \\ x=25 \end{cases}$.

11. CIP E CIOP 1 [1650]

Si tratta di effettuare la seguente somma: $\sum_{i=1}^{100}\left\lfloor \frac{i}{3}\right\rfloor = 0+0+1+1+1+2+2+2+3+3+\ldots$ dove i primi due addendi sono 0 gli altri si ripetono a gruppi di 3 tranne gli ultimi due che saranno $33+33$.

Il numero di ghiande è $3\cdot(1+2+3+..+32)+33+33=3\cdot\frac{32\cdot 33}{2}+66=1584+66=1650$

12. CIP E CIOP 2 [295]

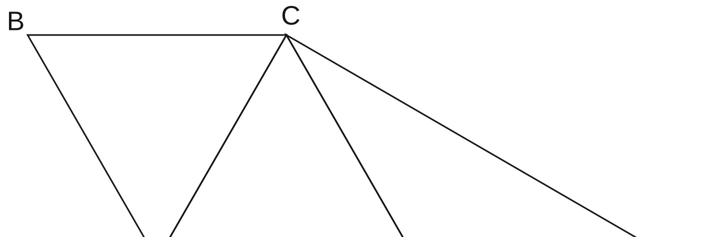
Al passo n si completa un quadrato di lato n. Scopriamo qual è il quadrato finale cercando $\sqrt{21904}=\sqrt{2^4\cdot 37^2}=148$. All'ultimo passaggio hanno sistemato $2\cdot 148-1=295$ noci.

13. IL TRIANGOLO E IL TRAPEZIO [30]

Affinché il trapezio abbia l'area tripla di quella del triangolo, la base maggiore deve essere il doppio della base minore metà della base maggiore è lunga come la base minore e come il lato obliquo.

Osservando la figura si nota che il triangolo CDE, dove E è il punto medio della base, è un triangolo isoscele con angolo al vertice di $120°$.

L'angolo $C\hat{D}A$ misura $30°$.



14. IL TORNEO [630]

Scelgo la prima coppia $\binom{10}{2}$, scelgo la seconda in $\binom{8}{2}$ e li faccio giocare assieme… stando attento che contando in questo modo ho contato tutte le partite due volte:

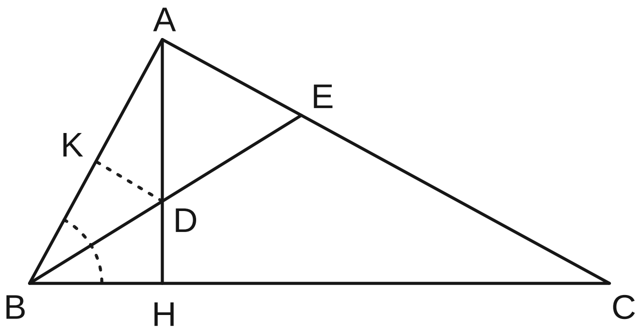
$$\text{incontri}=\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}}{2}=630.$$

15. IL MINIMO… [2550]

Abbiamo 101 valori assoluti. Il valore minimo verrà assunto quando il termine centrale vale 0 mentre gli altri assumo valori da 1 a 50.

La soluzione è $2\cdot(1+2+3+..+50)=2\cdot\frac{50\cdot51}{2}=2550$.

16. DIVIDENDO UN TRIANGOLO [9801]



Prima soluzione

L'ipotenusa BC misura 55 cm per la nota terna pitagorica $3-4-5$.

L'altezza $AH=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{33\cdot44}{55}=\frac{33\cdot4}{5}\text{ cm}$.

Sfruttando il primo Teorema di Euclide, calcoliamo $BH=\frac{AB^2}{BC}=\frac{33^2}{55}=\frac{33\cdot3}{5}$.

Per il teorema della bisettrice, $\frac{AB}{BH}=\frac{AD}{DH}$. Indicando $DH=x$ abbiamo $\frac{\cancel{33}}{\cancel{33}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{33\cdot\frac{4}{5}-x}{x}$ che ci permette di determinare $x=\frac{99}{10}\text{ cm}$.

$A_{BHD}=\frac{33\cdot3}{5}\cdot\frac{99}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9801}{100}\text{ cm}^2=9801\text{ mm}^2$.

Seconda soluzione

Poiché i triangoli BDH e hanno la stessa altezza ($DH=DK$ in quanto D sta sulla bisettrice), si ha che $\frac{A_{BDH}}{A_{ADB}}=\frac{BH}{AB}=\frac{3}{5}$, ciò implica che $A_{BDH}=\frac{3}{8}A_{ABH}$.

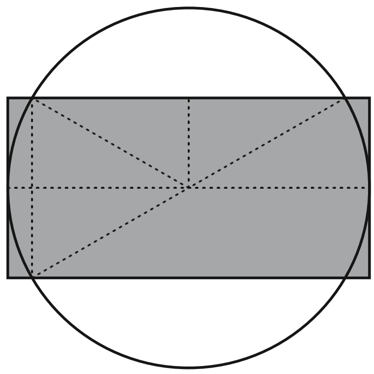
Ma $\frac{A_{ABH}}{A_{ABC}}=\frac{BH}{BC}=\frac{3}{5}\cdot\frac{33}{55}=\frac{9}{25}$ dunque $A_{BDH}=\frac{3}{8}\cdot\frac{9}{25}A_{ABC}=\frac{3}{8}\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{33\cdot44}{2}=\frac{9801}{100}\text{ cm}^2=9801\text{ mm}^2$.

17. IL PRANZO [2048]

Il primo siede dove vuole e fissa la rotazione. Il secondo ha 2 scelte possibili, così come il terzo.. e via di seguito fino al penultimo. L'ultimo si siede nell'unico posto rimasto.

La soluzione è $2^{11}=2048$.

18. IL RETTANGOLO E IL CERCHIO [867]



Il rettangolo ha dimensioni $10\text{ cm}\times20\text{ cm}$, inoltre i triangoli che si formano unendo i punti comuni al rettangolo con il centro della circonferenza sono uno equilatero, l'altro isoscele di altezza 5 cm.

L'area cercata è quindi:

$$A=A_{\text{rettangolo}}-2A_{\text{sett\_circolare}}-2A_{\text{triangolo\_isoscele}}=10\cdot20-2\cdot\frac{1}{6}10^2\pi-2\cdot5\cdot5\sqrt{3}$$

$$=200-\frac{100}{3}\pi-50\sqrt{3}\cong\ 8,675\text{ cm}^2=867,5\text{ mm}^2.$$

19. IL TERRAZZO [6500]

Vi sono 20 righe di piastrelle, 10 tutte intere e 10 in cui una piastrella è stata divisa a metà.

Vi sono 21 fughe lunghe 200 cm più 11 fughe lunghe 10 cm nelle righe di piastrelle intere e 12 in quelle dove c'è la piastrella divisa a metà.

In totale $21\cdot200+10\cdot11\cdot10+10\cdot12\cdot10=4200+1100+1200=6500\text{ cm}$.

20. A LEZIONE DI CALCOLO [29]
I casi favorevoli sono i modi di sedersi scegliendo le 4 colonne tra le cinque e sedendosi o davanti o dietro: $\binom{5}{4} \cdot 2^4 = 80$. I casi possibili sono $\binom{10}{4} = 210$.
La probabilità richiesta è $P = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$.
La soluzione richiesta è $8 + 21 = 29$.