GARA DI MATEMATICA ON-LINE - SOLUZIONI (12/12/2022)

1. LA SIGNORA IN GIALLO [634]

La probabilità cercata è quella di selezionare tra i divisori di 10^{99} uno dei divisori di $\frac{10^{99}}{10^{88}}=10^{11}$:

$$P=\frac{12\cdot 12}{100\cdot 100}=\frac{9}{625}.$$

La risposta richiesta è $9+625=634$.

2. BEST SELLER [5018]

Vi sono in tutto $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7=4536$ numeri con le cifre tutte diverse.
Il valore che cerchiamo si trova circa a metà della lista.
I numeri di questo tipo minori di 5000 sono $4\cdot 9\cdot 8\cdot 7=2016$, questo vuol dire che il $2017°$ numero è il primo che ha 5 come cifra delle migliaia. A questo punto possiamo contarli "a mano" :

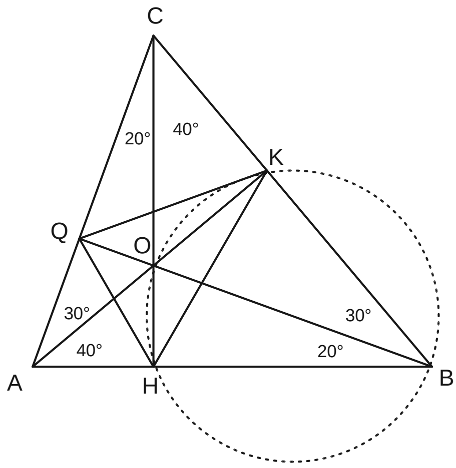
5012	2017°
5013	2018°
5014	2019°
5016	2020°
5017	2021°
5018	2022°

3. ANDRÀ IN TV [3146]

$12_b+15_b+16_b=44_b$ possiamo tradurlo in un'equazione con incognita la base: $(b+2)+(b+5)+(b+6)=4b+4$ da cui otteniamo $b=9$. $12_9\cdot 15_9\cdot 16_9=11\cdot 14\cdot 15=2310=3146_9$.

4. UN INVITO [2400]

Sfruttando gli angoli retti è possibile calcolare le due parti in cui ciascuna altezza divide i tre angoli (vedi figura). Osserviamo che per il triangolo QKH, O risulta essere il centro della circonferenza circoscritta e quindi le altezza di ABC sono le bisettrici del triangolo QKH.



Sfruttando il fatto che il quadrilatero $HOKB$ è ciclico (angoli opposti supplementari) e sfuttando gli angoli alla circonferenza, si determina che $O\hat{K}H=O\hat{B}H=20°$ e $O\hat{H}K=O\hat{B}K=30°$ e quindi i tre angoli di QKH misurano $40°$, $60°$ e $80°$.
Il valore rchiesto è $40\cdot 60=2400$.

5. FESTA IN MASCHERA [100]

$2022=2202220_3$. Cerchiamo numeri palindromi scritti in base 3 inferiori a 2202220_3.

Una cifra: 2 casi, i valori 1 e 2.

Due cifre: $\boxed{2}\boxed{1}$ $2\cdot 1=2$ casi.

Tre cifre: $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}$ $2\cdot 3\cdot 1=6$ casi.

Quattro cifre: $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{1}$ $2\cdot 3\cdot 1\cdot 1=6$ casi.

Cinque cifre: $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{1}$ $2\cdot 3\cdot 3\cdot 1\cdot 1=18$ casi.

Sei cifre: $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ $2\cdot 3\cdot 3\cdot 1\cdot 1=18$ casi.

Sette cifre dobbiamo prestare attenzione alla limitazione:
L'ultimo valore palindromo possibile è 2202022, quindi avremo tutti i numeri palindromi di sette cifre tranne qulli che hanno 1 o 2 nella terza cifra. In totale ne abbiamo $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ $2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 1\cdot 1=54$ dai quali si deve togliere $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ 6 valori per un totale di 48 numeri possibili.
La risposta richiesta è $2+2+6+6+18+18+48=100$.

6. UN INTRUSO [348]

Siano x, $x+a$ e $x+2a$ i primi tre elementi della prima progressione aritmetica e siano y, $y+b$ e $y+2b$ i primi tre elementi della seconda progressione aritmetica.
Con queste incognite abbiamo:

$$\begin{cases} xy = 1440 \\ (x+a)(y+b) = 1716 \\ (x+2a)(y+2b) = 1848 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} xy = 1440 \\ xy + bx + ay + ab = 1716 \\ xy + 2bx + 2ay + 4ab = 1848 \end{cases}$$

moltiplichiamo la seconda riga per due e sottraiamo la terza: $xy - 2ab = 1584$. Sfruttiamo la prima informazione per scoprire che $ab = -72$

Dalla seconda riga, sfruttando l'informazione appena trovata e la prima riga, otteniamo che $bx + ay = 348$.
Dobbiamo determinare l'ottavo elemento della successione che può essere determinato calcolando:

$$(x+7a)(y+7b) = xy + 7(ay+bx) + 49ab = 1440 + 7(348) + 49\cdot(-72) = 348.$$

7. UN UOMO MORTO [48]

Siccome $37800 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$, 37800 possiede $4\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ divisori positivi, che accoppiati a due a due realizzano tutte le possibili soluzioni dell'equazione. a è la somma dei due valori.

Abbiamo in tutto $\dfrac{4\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2} = 48$ possibilità.

8. UN UOMO SENZA FACCIA [20]

Il numero n possiede $(x+1)(y+1)(z+1)$ divisori. Diviso per p il numero dei divisori diventa $x(y+1)(z+1)$.
La differenza dei due valori è $(y+1)(z+1) = 72$.
Analogamente per gli altri due fattori.
Abbiamo che

$$\begin{cases} (y+1)(z+1) = 72 \\ (x+1)(z+1) = 48 \\ (x+1)(y+1) = 54 \end{cases}$$

Sostituendo $a = x+1$, $b = y+1$ e $c = z+1$ il sistema diventa

$\begin{cases} bc = 72 \\ ac = 48 \\ ab = 54 \end{cases}$ dove moltiplicando le tre equazioni otteniamo $a^2b^2c^2 = 432^2$ e quindi $\begin{cases} a = 6 \\ b = 9 \\ c = 8 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \\ z = 7 \end{cases}$

La soluzione richiesta è $x + y + z = 20$.

9. INDAGINI [270]

Possiamo calcolare PQ sfruttando Pitagora:

$PQ = \sqrt{900^2 - 720^2} = 540\ \text{cm}$.

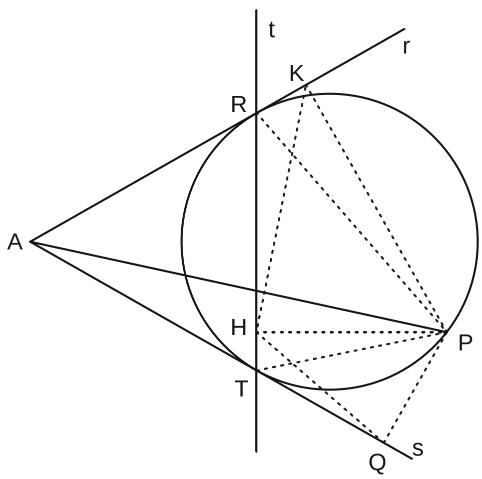
Ora dimostriamo che i triangoli QPH e HPK sono simili.

$Q\hat{T}P = T\hat{R}P$ perché angoli alla circonferenza che vedono lo stesso arco TP. Ora $QPHT$ è ciclico, quindi $Q\hat{T}P = Q\hat{H}P$ e anche $HPKR$ è ciclico, quindi $H\hat{R}P = H\hat{K}P$. Da tutto ciò segue che $Q\hat{H}P = H\hat{K}P$.

In maniera analoga si dimostra che $H\hat{Q}P = P\hat{H}K$.

Applicando la similitudine, si ha $PQ : PH = PH : PK$ e quindi

$PH = \sqrt{135\cdot 540} = 270\ \text{cm}$.



10. COLPO DI SCENA [360]

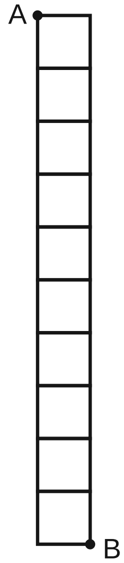
Si tratta di trovare tutte le soluzioni intere positive dell'equazione $n^2 = m^2 + 480$, equazione che possiamo anche scrivere $(n-m)(n+m) = 480$. Tra tutte le coppie di divisori di 480 tali che $d_1 \cdot d_2 = 480$, possiamo scartare a priori quelle in cui uno dei due è dispari (l'equazione non avrebbe soluzioni intere) e risolvere tutte le altre in cui $n = \frac{d_1 + d_2}{2}$

La soluzione cercata è $121+62+43+34+29+26+23+22=360$.

11. LA REAZIONE DELLA MOGLIE [1024]

Per ogni tratto orizzontale, tranne l'ultimo, si tratta di decidere se attraversarlo o no.

La risposta richiesta è $2^{10} = 1024$.



12. CHI VOLEVA UCCIDERE L'ASSASSINO? [449-->193/256]

La vittoria è garantita al primo lancio se si ottiene testa: $\frac{1}{2}$.

La vittoria è garantita al terzo lancio se dopo una croce si ottiene testa due volte: $\frac{1}{8}$.

La vittoria è garantita al quinto lancio se si ottiene testa al quinto lancio dopo aver lanciato un numero uguale di teste e croci, ma sempre più croci che teste (è il modello dei numeri di Catalan): $\frac{1}{2} \cdot \frac{C_2}{2^4} = \frac{2}{32}$.

Analogamente per i casi successivi fino ad arrivare al nono lancio.

La probabilità cercata è $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{C_2}{2^5} + \frac{C_3}{2^7} + \frac{C_4}{2^9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{32} + \frac{5}{128} + \frac{14}{512} = \frac{193}{256}$.

La risposta richiesta è $193 + 256 = 449$.

13. L'ARRESTO DI GRADY [141]

Come prima osservazione, notiamo che per come sono definiti i valori a, b e c, devono essere tutti maggiori o uguali a 3.

Dalla prima relazione abbiamo che $a = MCD(b,c) + 2 \leq b + 2$, visto che $MCD(b,c)$ nel migliore di casi vale b.

Valutiamo tre casi.

Se $a = b$: $c = MCD(a,b) + 2 = a + 2$, quindi $b = MCD(a,c) + 2 = MCD(a, a+2) + 2$ che può vale $2+2=4$ se a è pari o $1+2=3$ se a è dispari.

Abbiamo le soluzioni $(3,3,5)$ e $(4,4,6)$.

Se $a = b+1$ si ha che $MCD(a,b) = 1$ e quindi $c = 3$, ma $a < c = 3$ è impossibile per l'osservazione iniziale.

Se $a = b+2$ si ha che $MCD(a,b) = 1$ oppure 2. Ma 1 vorrebbe dire $c = 3$, 2 implica $c = 4$. In entrambi i casi avremmo $a < 3$ che è impossibile.

Non vi sono altre soluzioni oltre a quelle trovate nel primo caso.

La soluzione richiesta è $3 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 6 = 141$.

14. UN NUOVO SOSPETTO [6050]

Ogni persona può essere inserita nella delegazione A, nella delegazione B o non fare parte di alcuna delegazione: abbiamo 3^8 possibilità.

Da queste dobbiamo togliere quelle in cui tutte le persone sono inserite in una sola delegazione… o non fanno parte di alcuna: $2 \cdot 2^8$ e dobbiamo stare attenti che abbiamo contato due volte il caso in cui tutti non fanno parte di alcuna delegazione.

La soluzione è $3^8 - 2 \cdot 2^8 + 1 = 6050$.

15. UN ALTRO OMICIDIO [180]

Aggiungiamo alla somma $sen^2(2520°)$ che vale 0 visto che $2520 = 7 \cdot 360$.

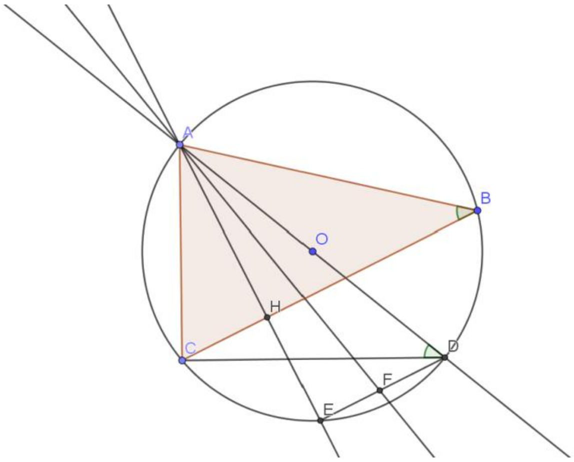
Riducendo tutti gli angoli modulo 360 e riordinandoli, si ha:

$sen^2(1°) + sen^2(2°) + \ldots + sen^2(360°)$.

Osserviamo che accoppiando tra loro due angoli complementari, ad esempio $sen^2(1°)$ con $sen^2(89°) = \cos^2(1°)$ otteniamo che la loro somma vale 1.

Abbiamo quindi che la somma complessiva vale 180.

16. SULLA VIA DEL RITORNO [720]



Osserviamo che AF biseca l'angolo $E\hat{A}D$. Infatti $C\hat{D}A = C\hat{B}A$ (poiché $ACDB$ è ciclico) ma allora $H\hat{A}B = C\hat{A}D$ (complementari di angoli congruenti) da cui $C\hat{A}H = D\hat{A}B$ (sottraggo ad entrambi $E\hat{A}D$) e infine $E\hat{A}F = F\hat{A}D$ (perché AF è bisettrice di $B\hat{A}C$ e per differenza tra angoli congruenti). Per il teorema della bisettrice allora $\frac{EF}{FD} = \frac{AE}{AD} = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}$ inoltre, per Pitagora, $ED = 15\text{ m}$ cioè $\frac{25}{13}FD = 15$ da cui $FD = \frac{39}{5}\text{ m}$ e $EF = \frac{36}{5}\text{ m} = 720\text{ cm}$.

17. UNA NOTIZIA INASPETTATA [139]

Intanto escludiamo il numero 42 in quanto $42 = 15 + 27$.

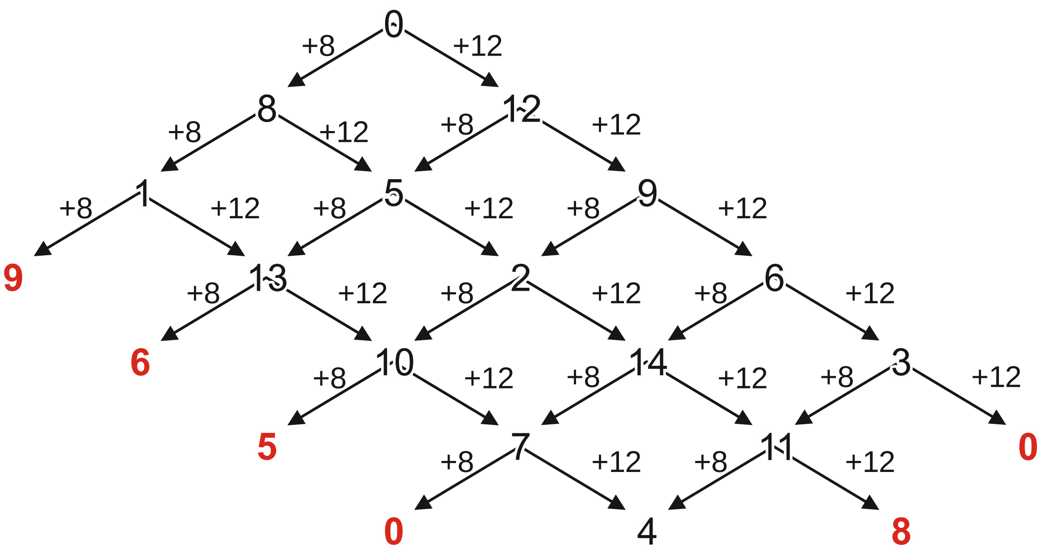
Ora mettiamo i numeri in colonna a gruppi di 15:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

…

Osserviamo che da una riga all'altra si aggiunge sempre 15, quindi se uno dei valori è raggiunto, sono raggiunti anche tutti i successivi della colonna.

Costruiamo uno schema ragionando modulo 15. Siccome $23 \equiv 8 \bmod 15$ e $27 \equiv 12 \bmod 15$ otteniamo:



L'ultimo a venire eliminato è il valore congruo a 4 modulo 15 che corrisponde al valore $2 \cdot 23 + 4 \cdot 27 = 154$.

Il valore cercato è il valore precedente della tabella che è $154 - 15 = 139$.

18. UN TAXI PER LA VILLA [709]

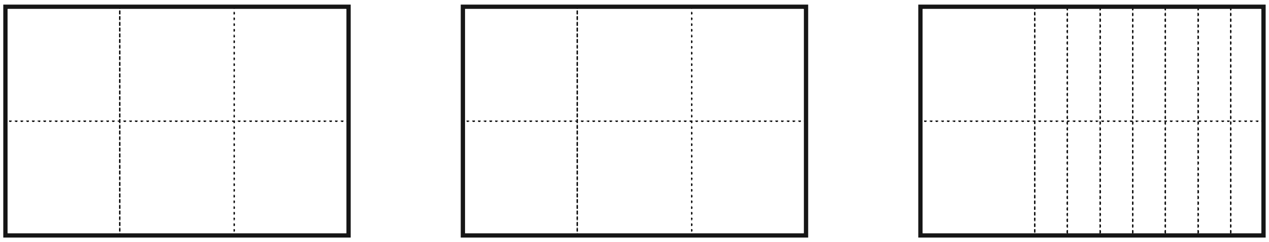
Affinché l'ascensore si fermi al mio piano senza che io debba chiamarlo, è necessario che almeno uno dei condomi che abita al quarto piano sia sull'ascensore. È più facile calcolare la probabilità dell'evento contrario, cioè che nessuno dei condomini che abitano al quarto piano sia entrato nell'ascensore. Ricordiamo che uno dei condomini del quarto piano, l'amico che è stato visitato, è a casa e quindi lui non può essere nell'ascensore.

$$P(\text{nessuno del quarto piano}) = \frac{36}{41} \cdot \frac{35}{40} \cdot \frac{34}{39} = \frac{357}{533}.$$

La probabilità cercata è $P(\text{si ferma al piano 4}) = 1 - \frac{257}{533} = \frac{176}{533}$.

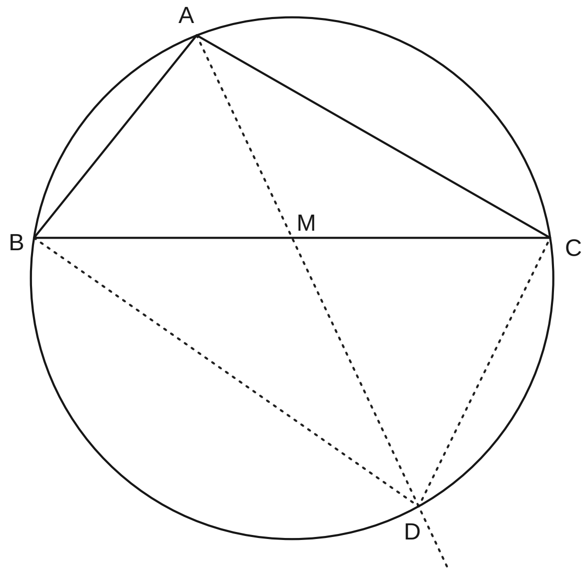
La risposta richiesta è $176 + 533 = 709$.

19. ORE 23.00 [14]



In figura la soluzione ottenuta con 14 tagli.

20. IL COLPEVOLE [1384]



Per il teorema della mediana $2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}$ e quindi $AM = 13\ \mathrm{m}$.

Per il teorema delle corde $AM \cdot MD = BM \cdot MC$, che ci permette di calcolare $MD = \frac{81}{13}$.

Dalla similitudine tra BMD e AMC si ha:

$BD : AC = MD : CM$ da cui otteniamo

$BD = \frac{180}{13}\ \mathrm{m} \cong 1384{,}61\ \mathrm{cm}$.