**Soluzioni Gara a squadre scuole 11 marzo 2024**

**PROBLEMA 1. [312]**
Il viaggio da $A$ a $B$ dura $10$ ore e $12$ minuti, mentre il viaggio da $B$ ad $A$ dura $12$ minuti. Il fuso orario è quindi di $5$ ore. Il viaggio dura $5$ ore e $12$ minuti, cioè $312$ minuti

**PROBLEMA 2. [15]**
Quando il punto $E$ è allineato con i lato $AB$, il triangolo $BDE$ è rettangolo in $B$. Inoltre $BD = 112$ cm e $DE = AB = 113$ cm. Applicando il teorema di Pitagora, $BE^2 = 113^2 - 112^2 = 225 = 15^2$. Quindi $BE = 15$ cm.

**PROBLEMA 3. [3]**
Procediamo a ritroso, partendo da $39$. Se lo eleviamo al quadrato otteniamo $1521$; sottraiamo $65$ ottenendo $1456$. Dividiamo per due e aggiungiamo $1$ ottenendo $729$. Siccome $729 = 3^6$ la soluzione cercata è $3$.

**PROBLEMA 4. [43]**
Il piccolo principe vede sorgere il sole ogni volta che l'asteroide compie una rotazione completa. In un giorno terrestre sono contenuti $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ secondi e l'asteroide ne impiega $33 \cdot 60 + 7 = 1987$ a compiere una rotazione. Siccome $86400 : 1987 = 43$ con resto $959$, l'asteroide compie al massimo $43$ rotazioni complete in un giorno.

**PROBLEMA 5. [10]**
Per comodità, dividiamo tutte le misure per $10$. Dunque ogni arbusto occupa $1\ \mathrm{m}^2$ di spazio e ogni giorno cresce occupando $1\ \mathrm{m}^2$ in più. La superficie dell'asteroide diventa $50\ \mathrm{m}^2$. La risposta al problema ovviamente non cambia.
Oggi sull'asteroide è caduto il primo seme.
Tra un giorno, il primo seme (diventato arbusto) occuperà $1\ \mathrm{m}^2$ e cadrà il secondo seme.
Tra due giorni, il primo seme occuperà $2\ \mathrm{m}^2$, il secondo $1\ \mathrm{m}^2$ e cadrà il terzo seme. Quindi la superficie occupata misura $2+1\ \mathrm{m}^2$.
Il terzo giorno, il primo seme occuperà $3\ \mathrm{m}^2$, il secondo $2\ \mathrm{m}^2$, il terzo $1\ \mathrm{m}^2$ e cadrà il quarto seme. Quindi la superficie occupata misura $3+2+1\ \mathrm{m}^2$.
Procedendo così tra $n$ giorni la superficie occupata sarà $1+2+3+\ldots+n\ \mathrm{m}^2$.
Il problema diventa trovare il più piccolo $n$ tale che questa somma superi $50$. Per $n=9$ la somma vale $45$, per $n=10$ vale $55$. La risposta è $10$ giorni.

**PROBLEMA 6. [5329]**
Un quadrato finisce necessariamente con una tra le cifre $0$, $1$, $4$, $5$, $6$ e $9$. Dopo aver scartato i numeri che non possono essere quadrati si cerca il quadrato sfruttando l'ultima cifra
L'unico quadrato tra i numeri a disposizione è $5329 = 73^2$.

**PROBLEMA 7. [1405]**
Vogliamo che il numero sia il più piccolo possibile, quindi scegliamo $A=1$ e verifichiamo se esistono numeri $\overline{1ABC}$ tali che $1+2C+3D=4B$. Si osserva immediatamente che $B$ non può essere uguale a $0$ né a $1$.
Proviamo $B=2$. La condizione diventa $2C+3D=7$. Si verifica facilmente che non ci sono soluzioni (la soluzione $C=2$ e $D=1$ non è accettabile per le condizioni del problema).
Proviamo $B=3$. La condizione diventa $2C+3D=11$. $D$ dovrebbe essere un numero dispari, ma non potendo essere né $1$ né $3$ rende il caso privo di soluzioni.
Per $B=4$ la condizione diventa $2C+3D=15$ che ammette come soluzioni le coppie $(C=0; D=5)$, $(C=3; D=3)$ (non accettabile) e $(C=6; D=1)$ (non accettabile)
Il numero cercato è $1405$.

**PROBLEMA 8. [160]**
La condizione si può esprimere, più comodamente, nel seguente modo: la cifra $1$ non può essere seguita dalla cifra $3$, la cifra $2$ non può essere seguita dalla cifra $4$, la cifra $3$ non può essere seguita dalla cifra $1$ e la cifra $4$ non può essere seguita dalla cifra $2$.
I possibili numeri ad una cifra sono $4$. Quelli a due cifre sono $4 \cdot 3$, visto che una volta scelta la prima cifra (4 possibilità), per la seconda restano solo 3 possibilità. Analogamente per i numeri a tre cifre che sono $4 \cdot 3 \cdot 3$ e quelli a quattro cifre che sono $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.
In totale $4+12+36+108=160$.

**PROBLEMA 9. [106]**
Costruiamo una tabella che date le cifre $A$ ($A \neq 0$) e $B$ restituisca la cifra delle unità del numero $A^2+B^2+10$. Evidenziamo le celle in cui la cifra delle unità di $A^2+B^2+10$ coincide con $B$. I corrispondenti numeri saranno i nostri candidati.

| $A \backslash B$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 3 | 0 | 7 | 6 | 7 | 0 | 5 | 2 |
| **2** | 4 | 5 | 8 | **3** | 0 | 9 | 0 | 3 | **8** | 5 |
| **3** | 9 | 0 | 3 | 8 | 5 | 4 | 5 | 8 | 3 | 0 |
| **4** | 6 | 7 | 0 | 5 | 2 | 1 | 2 | 5 | 0 | 7 |
| **5** | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 |
| **6** | 6 | 7 | 0 | 5 | 2 | 1 | 2 | 5 | 0 | 7 |
| **7** | 9 | 0 | 3 | 8 | 5 | 4 | 5 | 8 | 3 | 0 |
| **8** | 4 | 5 | 8 | **3** | 0 | 9 | 0 | 3 | **8** | 5 |
| **9** | 1 | 2 | 3 | 0 | 7 | 6 | 7 | 0 | 5 | 2 |

Dobbiamo controllare i quattro numeri $23$, $28$, $83$ e $88$.
La proprietà è verificata solamente da $23$ e $83$.

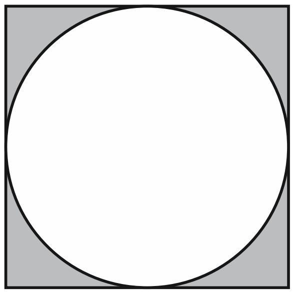
**PROBLEMA 10. [2030]**
Osserviamo che:
$88 \cdot 8+6=710$;
$888 \cdot 8+6=7110$;
$8888 \cdot 8+6=71110$.
Quindi se la cifra $8$ fosse ripetuta $2024$ volte nel primo fattore, avremo nel risultato un $7$ seguito da $2023$ cifre $1$ ed uno $0$ finale. La somma delle cifre del risultato è $2023+7=2030$.

**PROBLEMA 11. [365]**
Vogliamo che $a \odot b=a$ qualsiasi sia $a$.
Se $a$ e $b$ sono entrambi pari, $a=a \odot b=a+b-123$, quindi $b=123$ impossibile.
Se almeno uno due è dispari, $a=a \odot b=a+b-365$, quindi $b=365$.
$365$ verifica la condizione per ogni possibile scelta di $a$ in quanto $a \odot 365=a+365-365=a$.

**PROBLEMA 12. [2184]**
In ogni partita vengono assegnati complessivamente $4$ punti ($1+3$, $2+2$ oppure $3+1$) ai due giocatori. Dopo $800$ partite i punti complessivamente vinti sono $800 \cdot 4=3200$. L'ubriacone ne ha totalizzati $1016$, mentre il piccolo principe $3200-1016=2184$.

**PROBLEMA 13. [340]**
Se il piccolo principe avesse sempre vinto avrebbe totalizzato un punteggio multiplo di $3$. Il multiplo di $3$ minore di $1016$ è $338 \cdot 3=1014$. I due punti mancanti corrispondono ad un pareggio.
L'ubriacone può avere totalizzato un minimo di $338 \cdot 1+2=340$ punti.

**PROBLEMA 14. [344]**



L'area cercata è equivalente a quella di un quadrato privata del cerchio tangente ai quattro lati (vedi figura a lato).
Siccome il perimetro della stella è equivalente alla lunghezza della circonferenza, $C = 2\pi r = 40\pi$, $r = 20$ m.
L'area cercata è $A = 4r^2 - \pi r^2 = 1600 - 400\pi \cong 344 \text{ m}^2$.

**PROBLEMA 15. [65]**
Usiamo le proprietà delle potenze:

$$\frac{14^{21}}{21^{14}} = \frac{7^{21}\cdot 2^{21}}{7^{14}\cdot 3^{14}} = \frac{7^{7}\cdot 2^{21}}{3^{14}} = \left(\frac{7\cdot 2^3}{3^2}\right)^7 = \left(\frac{56}{9}\right)^7$$

**PROBLEMA 16. [330]**
Siano $AB$ e $CD$ i due fattori del prodotto nell'ordine in cui compaiono. Allora $AB\cdot C$ e $AB\cdot D$ devono essere della forma $\#*$. Affinché ciò accada o $CD = 11$ e quindi $AB$ può essere uno dei 4 valori $31$, $32$, $61$ o $62$, oppure se (almeno) una delle due cifre tra $C$ e $D$ è $2$ allora $AB = 31$ necessariamente. Dobbiamo quindi controllare i seguenti prodotti:
$31\cdot 11 = 341$; $32\cdot 11 = 352$; $61\cdot 11 = 671$; $62\cdot 11 = 682$ (non accettabile perché compare la cifra $8$); $31\cdot 12 = 372$; $31\cdot 21 = 651$; $31\cdot 22 = 682$ (non accettabile).
Il massimo prodotto è $671$ e il minimo è $341$.

**PROBLEMA 17. [1243]**
Chiamiamo $I$, $II$ e $III$ le tre affermazioni nell'ordine in cui compaiono nel testo. Sappiamo che due sono vere e una è falsa.
Per semplicità indichiamo con $a$, $b$, $c$ e $d$ il numero della lampadina accesa rispettivamente dagli interruttori $A$, $B$, $C$ *e* $D$).
Se $I$ fosse vera, certamente $1 = a < d$ e $b < c = 4$ qualsiasi siano $b$ e $d$. Quindi anche $III$ è vera. Necessariamente $II$ è falsa. Otteniamo la soluzione $1243$.
Se $I$ fosse falsa, le altre due dovrebbero essere vere. In particolare $II$ dice che $b = 3$ e $d = 2$. Dato che $I$ è falsa $a = 4$ e $c = 1$, ma allora $III$ è falsa. Abbiamo ottenuto una contraddizione, quindi non ci sono altre soluzioni.

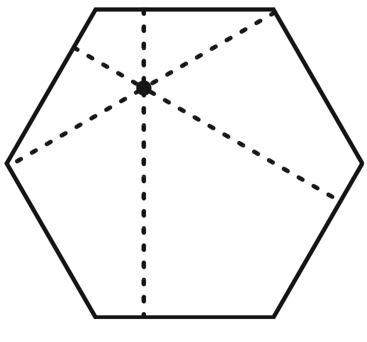
**PROBLEMA 18. [10]**
Le facce opposte di un dado sono $1-6$, $2-5$ e $3-4$. La loro somma è $21$. Se tre di loro danno somma $11$, le altre tre devono dare somma $10$.

**PROBLEMA 19. [17]**

| $b$ | $c$ | $d$ | |
|---|---|---|---|
| **3** | **9** | **5** | |
| **4** | **8** | **6** | |
| 5 | 7 | 7 | No perché il 7 si ripete |
| 6 | 6 | 8 | No perché il 6 si ripete |
| **7** | **5** | **9** | |
| 8 | 4 | | No perché d>9 |
| 9 | 3 | | No perché d>9 |

Elenchiamo in una tabella i possibili valori di $b$, $c$, $d$.
Esistono 3 possibili terne $(b,c,d)$.
Per ciascuna, $a$ può assumere $6$ valori diversi.
In totale le combinazioni sono $3\cdot 6 = 18$.
Una è giusta, quindi quelle sbagliate sono $18 - 1 = 17$

**PROBLEMA 20. [519]**



Si osserva che qualunque punto P preso all'interno dell'esagono, la somma delle distanze cercate corrisponde a tre volte la distanza di un lato dall'altro. La distanza tra i lati di un esagono regolare corrisponde al doppio dell'altezza del triangolo equilatero costruito sul lato dell'esagono.

$$d = 3\cdot 2\cdot h = 6\frac{l\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{3} \cong 519 \text{ cm}.$$