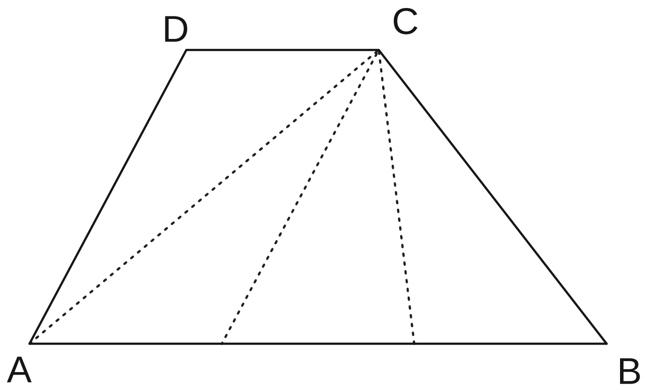
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (19/04/2023)
Soluzioni

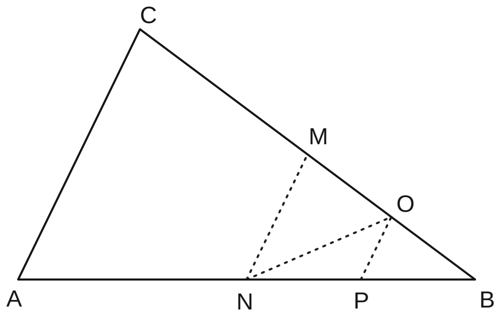
1. IL TRAPEZIO [192]



Segnando i punti della base che la dividono in tre parti uguali e unendo questi punti con il vertice C si osserva che i quattro triangoli in cui è diviso il trapezio hanno tutti la stessa area.

$A_{ABCD} = 4 \cdot A_{ACD} = 4 \cdot 48 \text{ cm}^2 = 192 \text{ cm}^2$

2. IL TRIANGOLO [256]



Osserviamo che $A_{PON} = A_{POB}$ (stessa base e stessa altezza).

Ora notiamo che $A_{ABC} = 2 \cdot A_{CNB} = 2 \cdot 2 \cdot A_{NBM} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot A_{NOB} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot A_{PON} = 16 \cdot 16 = 256 \text{ cm}^2$.

In alternativa si può notare la similitudine tra i triangoli ABC e POB con rapporto 4 e quindi $A_{ABC} = 4^2 A_{POB} = 16 \cdot 16 = 256 \text{ cm}^2$.

3. UN QUADRILATERO SPECIALE [45]

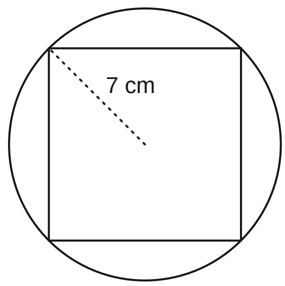
In generale, unendo i punti medi di un quadrilatero con le diagonali perpendicolari si ottiene sempre un rettangolo che ha area esattamente la metà del quadrilatero di partenza.

$A = \frac{1}{2} A_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 18 = 45 \text{ cm}^2$.

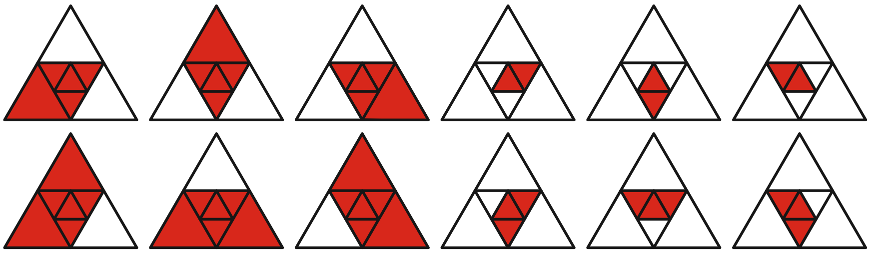
4. LA CERCHIATURA DEL QUADRATO [98]

Il raggio del cerchio è metà della diagonale del quadrato. Siccome il quadrato è anche un rombo, possiamo calcolare la sua area moltiplicando tra loro le sue diagonali e dividendo per 2:

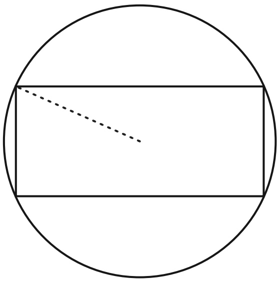
$A_{QUADRATO} = \frac{14 \cdot 14}{2} = 98 \text{ cm}^2$



5. CACCIA AL QUADRILATERO [12]
Ci sono 6 rombi e 6 trapezi.



6. IL RETTANGOLO NEL CERCHIO [530]
Il raggio della circonferenza è metà della diagonale del rettangolo. Possiamo calcolarla attraverso il teorema di Pitagora:



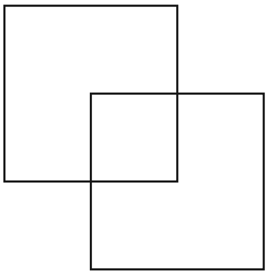
$d = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \text{ cm}$.

$A_{CERCHIO} = \pi \left(\frac{26}{2} \right)^2 = 169\pi \cong 530,66 \text{ cm}^2$.

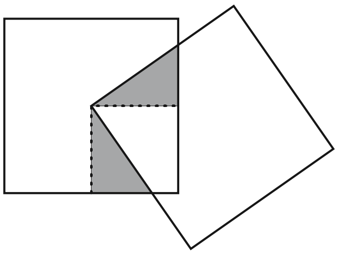
7. BARICENTRO [48]
Siccome il baricentro divide in due la mediana, anche l'altezza del triangolo AGB è un terzo dell'altezza del triangolo ABC.

$A_{AGB} = b \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{3} A_{ABC} = \frac{1}{3} 144 \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2$.

8. QUADRATI INCASTRATI [100]
Il problema può essere risolto velocemente in un caso particolare, quando i due quadrati sono nella posizione seguente:

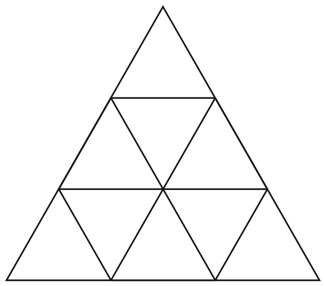


L'area della parte comune vale $10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$.
Proviamo che l'area non cambia, qualunque sia la posizione dei due quadrati.



I due triangoli rettangoli evidenziati in grigio sono congruenti, avendo la stessa base e la stessa altezza.

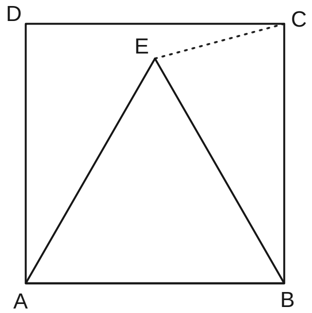
9. IMPACCHETTA L'ESAGONO [294]



Dividendo l'esagono i sei triangoli equilateri e aggiungendo su tre lati, tra loro non consecutivi, uno di questi triangoli, si ottiene proprio la figura cercata.

$A_{TR\_EQ} = \frac{9}{6} A_{ESAGONO} = \frac{3}{2} \cdot 196 \text{ cm}^2 = 294 \text{ cm}^2$.

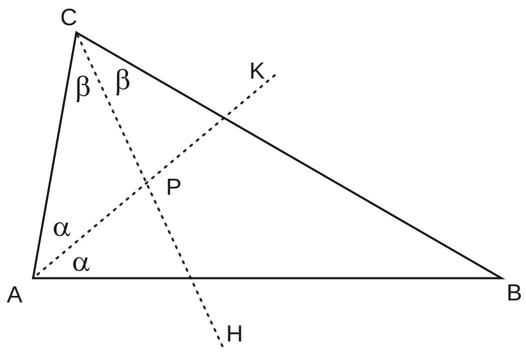
10. ANGOLI MISTERIOSI [15]



Unendo E con C scopriamo che il triangolo ECB è isoscele con angolo al vertice $E\hat{B}C = 30°$.

Gli angoli alla base misurano $\frac{180° - 30°}{2} = 75°$ e di conseguenza $E\hat{C}D = 90° - 75° = 15°$.

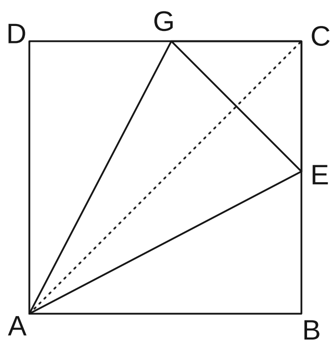
11. ANGOLI SCONOSCIUTI [40]



Osservando il triangolo APC scopriamo che $\alpha + \beta = 70°$.

L'angolo $A\hat{B}C = 180° - 2\alpha - 2\beta = 180° - 2(\alpha + \beta) = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$.

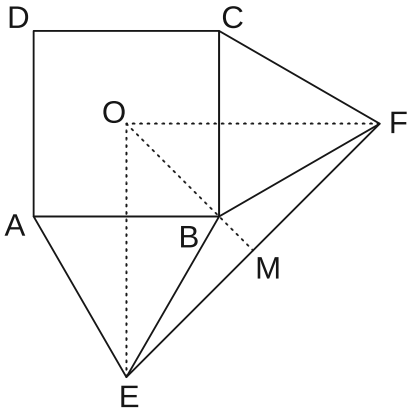
12. UN PEZZO DI QUADRATO [5640]



Il quadrilatero $AECG$ ha le diagonali perpendicolari, la sua area vale:

$A_{AECG} = \frac{AC \cdot GE}{2} = \frac{100\sqrt{2} \cdot 80}{2} \cong 5640 \text{ cm}^2$.

13. UN TRIANGOLO LUNGO E STRETTO [144]



Unendo il centro del quadrato con i vertici E ed F dei triangoli equilateri si viene a formare mezzo quadrato di lato $12+12\sqrt{3}$. Sfruttando questo quadrato è possibile calcolare la base EF e l'altezza BM del triangolo BEF:

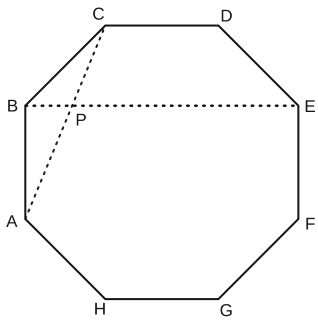
$$A_{BEF}=\frac{EF\cdot BM}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(12+12\sqrt{3}\right)\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\left(12+12\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{2}-12\sqrt{2}\right)=\frac{12\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot 12\cancel{\sqrt{2}}\,\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)-2}{2}=$$

$$=72(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=72\cdot 2=144\ \text{cm}^2.$$

In alternativa si può notare che il triangolo BMF è un triangolo $15°-75°-90°$ e questi triangoli godono di un proprietà interessante, cioè che l'altezza relativa all'ipotenusa è un quarto dell'ipotenusa stessa.

Quindi $A_{EBF}=BF\cdot h_{BF}=24\cdot\dfrac{24}{4}=24\cdot 6=144\ \text{cm}^2$.

14. OTTAGONO AFFETTATO [135]



Gli angoli interni di un ottagono regolare misurano $135°$.

Osserviamo che il triangolo ABC è isoscele con angolo al vertice di $135°$ e quindi $B\hat{A}C=\dfrac{180°-135°}{2}=\dfrac{45°}{2}$.

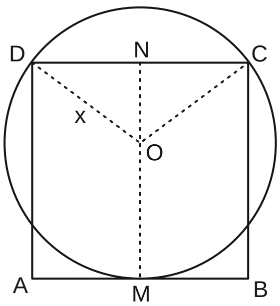
Siccome $AB\perp BE$, $C\hat{P}E=B\hat{P}A=180°-90°-\dfrac{45°}{2}=\dfrac{135°}{2}$.

Il suo doppio vale $135°$.

15. CERCHIANDO IL QUADRATO [75]

Il quadrato ha lato 60 cm. Sia x la misura del raggio della circonferenza.

Per il Teorema di Pitagora applicato al triangolo CON abbiamo:



$CO^2=ON^2+NC^2$

$x^2=(60-x)^2+30^2$. Eseguendo i calcoli si ottiene:

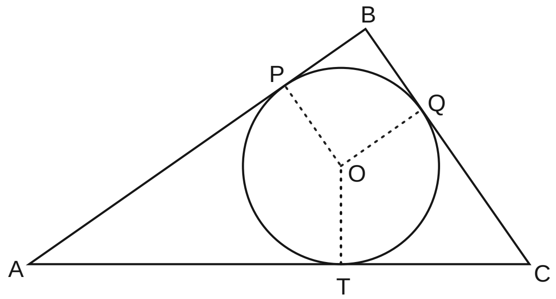
$\cancel{x^2}=3600+\cancel{x^2}-120x+900$

$12x=4500$

$x=\dfrac{75}{2}$ cm.

Il diametro misura 75 cm.

16. CERCHIO TANGENTE [96]



Prima soluzione:

Per il Teorema delle Tangenti, $AT = AP$ e $TC = CQ$. Del triangolo ci resta da scoprire la misura di $PB = BQ = x$. Si tratta di risolvere, sfruttando il teorema di Pitagora l'equazione:

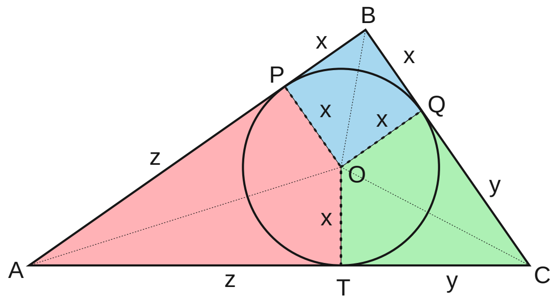
$20^2 = (12+x)^2 + (8+x)^2$ che semplificata porta ad un'equazione di secondo grado:

$x^2 + 20x - 96 = 0$.

Ora l'equazione può essere risolta "a tentativi" oppure si può cercare x in modo che $(8+x;12+x;20)$ sia una terna pitagorica. Sfruttando $(3;4;5)$ si scopre che la soluzione cercata si ottiene con $x = 4$.

L'area cercata vale $A_{ABC} = \dfrac{12\cdot 16}{2} = 96\text{ cm}^2$.

Seconda soluzione:



Indicando con $x = OP = OQ = OT = PB = BQ$, $y = TC = QC$ e $z = AP = AT$ gli elementi del triangolo, e applicando il Teorema di Pitagora otteniamo:

$(x+z)^2 + (x+y)^2 = (z+y)^2$. Svolgendo i calcoli:

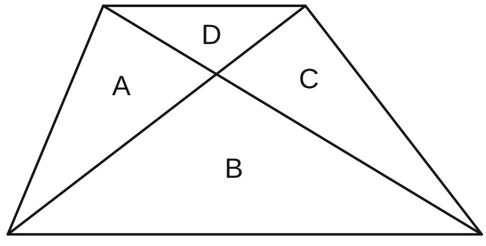
$x^2 + 2xz + \cancel{z^2} + x^2 + 2xy + \cancel{y^2} = \cancel{z^2} + 2yz + \cancel{y^2}$

$2x^2 + 2xz + 2xy = 2yz$ cioè

$x^2 + xz + xy = yz$.

Osservando la figura la prima parte dell'uguaglianza è proprio l'area del triangolo ABC diviso nei suoi tre pezzi (colorati in figura) e quindi $A_{ABC} = y\cdot z = 12\cdot 8 = 96\text{ cm}^2$

17. TRAPEZIO A PEZZETTONI [325]



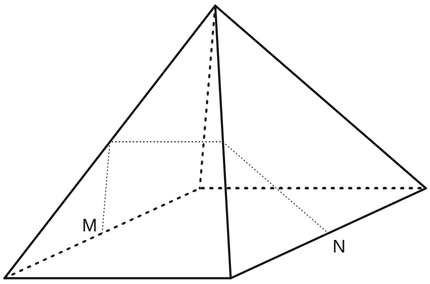
Osserviamo la figura sopra riportata. Le aree dei triangoli indicati con A e C sono uguali, in quanto $A+B$ e $B+C$ hanno la stessa area avendo la stessa base e la stessa altezza. Avendo B in comune, le due aree devono risultare uguali.

Inoltre vale la proprietà dei quadrilateri per cui $B\cdot D = A\cdot C$ da cui otteniamo

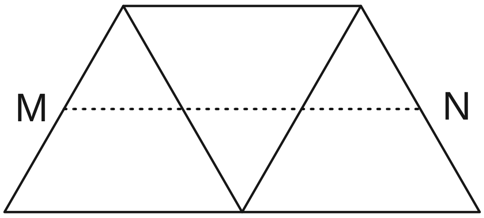
$A^2 = 117\cdot 52 = 6084\text{ cm}^2$ e quindi $A = 78$.

L'area del trapezio misura $A_{TRAPEZIO} = 52 + 117 + 2 \cdot 78 = 325 \text{ cm}^2$.

18. A SPASSO SULLA PIRAMIDE [150]



Sviluppando la superficie laterale (3 facce) otteniamo:



Il percorso cercato passa per i punti medi delle facce e misura $\frac{3}{2} \cdot 100 = 150 \text{ cm}$.

19. LE LUNULE DI IPPOCRATE [864]

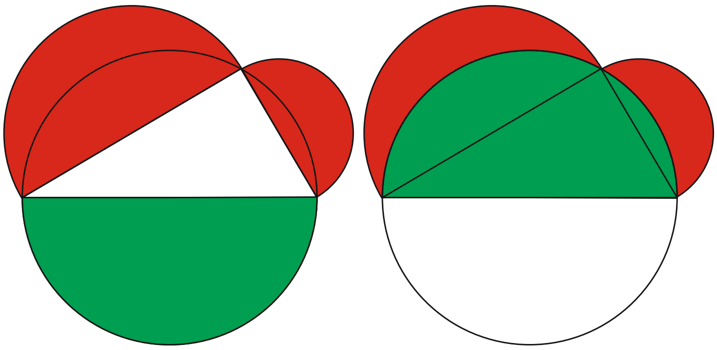
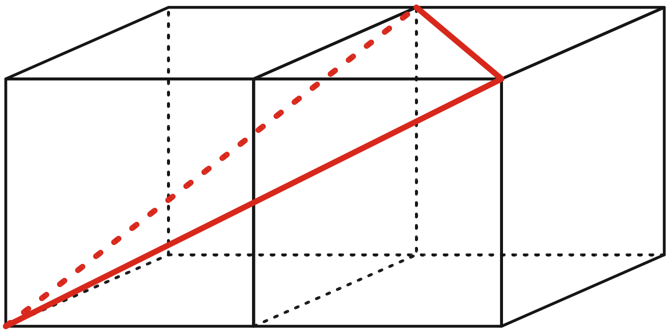


Figura 1 Figura 2

Osserviamo che per il Teorema di Pitagora la somma delle aree dei semicerchi costruiti sui cateti è uguale all'area del semicerchio costruito sull'ipotenusa (figura 1).
L'area delle due Lunule è data dalla somma delle aree dei due semicerchi più l'area del triangolo meno l'area del semicerchio più grande (figura 2). Ma sapendo i due semicerchi sono equivalenti al semicerchio costruito sull'ipotenusa, otteniamo che l'area delle due lunule è pari all'area del triangolo.

$$A_{LUNULE} = A_{TRIANGOLO} = \frac{36 \cdot 48}{2} = 864 \text{ cm}^2.$$

20. UN TRIANGOLO DENTRO AI CUBI [122]



I lati del triangolo misurano $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ e verificano il teorema di Pitagora. Il triangolo è quindi rettangolo. La sua area vale: $A = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{dm}^2 = 50\sqrt{6} \text{ cm}^2 \cong 122{,}5 \text{ cm}^2$