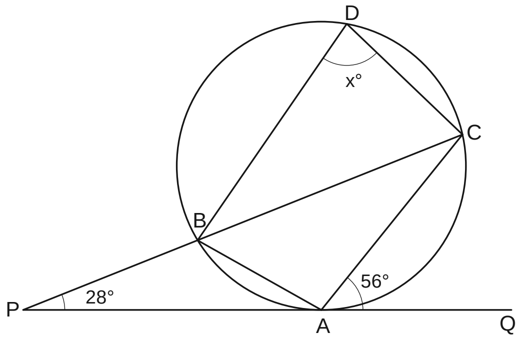
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (10/10/2022)

1. ANDAR PER ANGOLI [84]

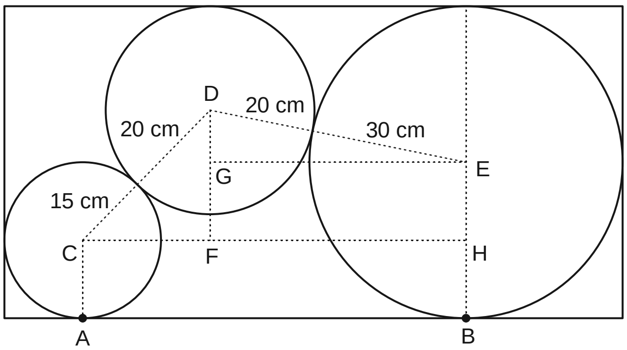


Riferendoci alle lettere riportate nella figura a fianco osserviamo che $Q\hat{A}C = A\hat{B}C$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC.

$P\hat{C}A + A\hat{P}C = Q\hat{A}C$ per il Teorema dell'angolo esterno, quindi $P\hat{C}A = 28°$.

$B\hat{D}C = 180° - B\hat{A}C = 180° - (180° - (A\hat{B}C + B\hat{C}A)) = A\hat{B}C + B\hat{C}A$
$= 56° + 28° = 84°$

2. TRE CERCHI [5400]



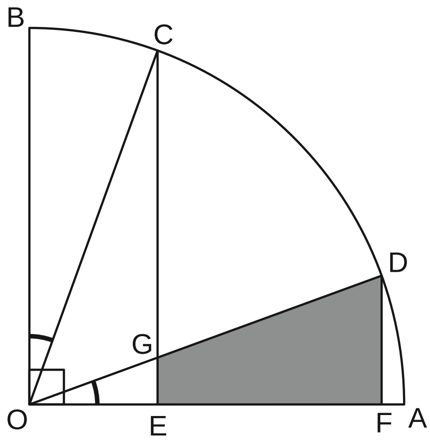
Riferendoci alla figura sopra riportata, scriviamo AB come somma di segmenti: $AB = CF + GE$.
Calcoliamo le due parti separatamente con il Teorema di Pitagora.

$$CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{(15+20)^2 - (60-15-20)^2} = \sqrt{35^2 - 25^2} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}\ \text{cm}$$

$$GE = \sqrt{DE^2 - DG^2} = \sqrt{(20+30)^2 - (60-30-20)^2} = \sqrt{50^2 - 10^2} = \sqrt{2400} = 20\sqrt{6}\ \text{cm}$$

$$AB^2 = (CF + GE)^2 = \left(30\sqrt{6}\right)^2 = 5400\ \text{cm}^2.$$

3. UN QUARTO DI CIRCONFERENZA [60]



Sia $DF = x$ e $EG = y$.

Osserviamo che $O\hat{C}E = B\hat{O}C$ perché $OB \parallel CE$ e quindi $O\hat{C}E = D\hat{O}F$.

I due triangoli OCE e ODF sono congruenti in quanto rettangoli con un angolo acuto congruente e $OC = OD$ in quanto raggi della medesima circonferenza.
L'area dei due triangoli possiamo scriverle:

$$A_{OCE} = \frac{1}{2}x(y+5) \text{ e } A_{ODF} = A_{OGE} + A_{EGDF} = \frac{1}{2}xy + 15.$$

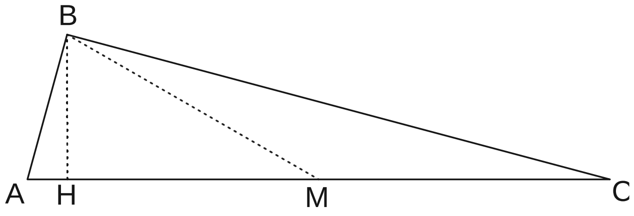
Abbiamo già dimostrato essere congruenti e quindi

$$\frac{1}{2}x(y+5) = \frac{1}{2}xy + 15 \text{ cioè}$$

$$\frac{5}{2}x = 15$$

$$x = 6\ \text{cm} = 60\ \text{mm}$$

4. DUE QUADRATI [192]



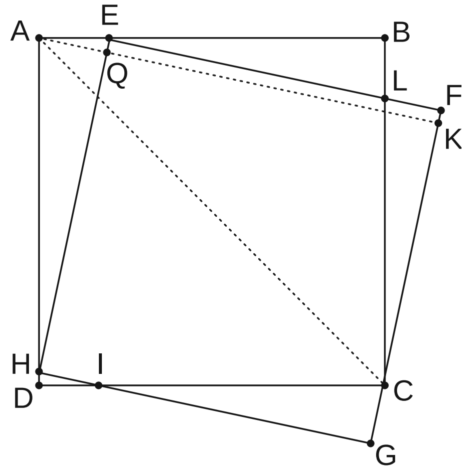
Osserviamo una interessante proprietà del triangolo rettangolo $15°-75°-90°$: l'altezza relativa all'ipotenusa è un quarto dell'ipotenusa stessa. Dimostriamolo.

Sia ABC un triangolo rettangolo di angoli $15°-75°-90°$ di ipotenusa AC, come in figura a fianco. Tracciamo l'altezza BH e sia M punto medio di AC.

Per le note proprietà dei triangoli rettangoli M è anche il centro della circonferenza circoscritta e quindi $AM = BM = CM$ in quanto raggi.

I triangoli AMB e BMC sono isosceli.

Osserviamo che $HBM = 90°-15°-15° = 60°$. Il triangolo BMH è mezzo triangolo equilatero quindi $BH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}AC$.



Risolviamo ora il problema.

Tracciamo AC la diagonale del quadrato e la perpendicolare al lato FG uscente da A. Sia Q l'intersezione con il lato EH.

Per quanto appena visto, AQ è l'altezza del triangolo AEH e quindi

$$AQ = \frac{1}{4}EH.$$

$$AK = \frac{1}{4}EH + QK = \frac{5}{4}EH.$$

Ora risulta che il triangolo AKC è mezzo triangolo equilatero e quindi $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \frac{\sqrt{6}}{2}AB$.

Mettendo assieme le due relazioni risulta

$$EH = \frac{4}{5}AK = \frac{4}{5}\frac{\sqrt{6}}{2}AB = \frac{2\sqrt{6}}{5}AB.$$

Il rapporto di similitudine tra le aree dei due quadrati è $\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$.

L'area cercata è $A_{EFGH} = \frac{24}{25}200 = 192 \text{ cm}^2$.

5. POTENZE DI RADICI [10]

Siccome $x^3 = x-1$, accade che $a^8 = \frac{a^9}{a} = \frac{\left(a^3\right)^3}{a} = \frac{(a-1)^3}{a} = a^2 - 3a + 3 - \frac{1}{a}$ e questo vale per ogni radice del polinomio, quindi $a^8 + b^8 + c^8 = \left(a^2+b^2+c^2\right) - 3(a+b+c) + 3\cdot 3 - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Sfruttando le relazioni radici-coefficienti possiamo calcolare:

$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = 0 - 2(-1) = 2$;

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{-1}{-1} = 1$;

quindi: $a^8+b^8+c^8 = \left(a^2+b^2+c^2\right) - 3(a+b+c) + 3\cdot 3 - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 2+0+9-1 = 10$.

6. FUNZIONA? [2017]

Prima soluzione.

Se $y = x$ abbiamo $f(2x) = 2f(x) + 2x^2 + 23$.

Possiamo calcolare in sequenza:

ponendo $x = 2$: $f(4) = 2f(2) + 8 + 23 = -111$;

ponendo $x = 4$: $f(8) = 2f(4) + 55 = -167$;

ponendo $x = 8$: $f(16) = 2f(8) + 151 = -183$;

ponendo $x = 16$: $f(32) = 2f(16) + 535 = 169$;

Siccome $60 = 32 + 28$: $f(60) = f(32+28) = f(32) + f(28) + 2\cdot 32\cdot 28 + 23 = f(28) + 1984$.

Siccome $28 = 16 + 12$: $f(28) = f(16+12) = f(16) + f(12) + 2\cdot 16\cdot 12 + 23 = f(12) + 224$

Siccome $12 = 8 + 4$: $f(12) = f(8+4) = f(8) + f(4) + 2\cdot 8\cdot 4 + 23 = -191$

Quindi: $f(60) = f(28) + 1984 = f(12) + 224 + 1984 = -191 + 2208 = 2017$.

Seconda soluzione

Cerchiamo di determinare la funzione: nella relazione $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + 23$ poniamo $y = 1$:

$f(x+1) = f(x) + f(1) + 2x + 23$ e determiniamo $f(1)$ ponendo anche $x = 1$:

$f(2) = f(1) + f(1) + 25$, cioè $f(1) = -48$.

Sappiamo che

$f(x+1) = f(x) + 2x - 25$. Se $f(x)$ è un polinomio, deve essere di secondo grado e quindi cerchiamolo nella forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Deve accadere che $= a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + bx + c + 2x - 25$ che sviluppata diventa

$\cancel{ax^2} + 2ax + a + \cancel{bx} + b + \cancel{c} = \cancel{ax^2} + \cancel{bx} + \cancel{c} + 2x - 25$

$a = 1$ e $b + 1 = -25$ da cui $b = -26$

$f(x) = x^2 - 26x + c$. Sfruttando $f(1) = -48$ otteniamo

$f(1) = 1 - 26 + c = -48$ da cui $c = -23$.

$f(x) = x^2 - 26x - 23$.

$f(60) = 60^2 - 26\cdot 60 - 23 = 2017$.

7. SOLUZIONI REALI [11]

Mettiamo le equazioni a sistema:

$\begin{cases} x - y + xy = 11 \\ x^2y - xy^2 = 18 \end{cases}$ e raccogliamo nella seconda: $\begin{cases} x - y + xy = 11 \\ xy(x-y) = 18 \end{cases}$.

Sia $a = x - y$ e $b = xy$, il sistema diventa

$\begin{cases} a + b = 11 \\ ab = 18 \end{cases}$ sistema che ammette la soluzione simmetrica $(9;2)$.

Abbiamo ora due casi:

$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 9 \end{cases}$

In entrambi i casi esplicitiamo la y e risolviamo in x:

Il primo sistema diventa $x^2 - 9x - 2 = 0$ che ha $\Delta > 0$ e quindi $x_1 + x_2 = 9$;

il secondo sistema diventa $x^2 - 2x - 9 = 0$ che ha $\Delta > 0$ e quindi $x_3 + x_4 = 2$.

La somma richiesta è $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$.

8. ESPONENZIALI [529--->448/81]

Sappiamo che $y=\frac{3}{4}x$ e $x^y=y^x$.

Quindi $x^{\frac{3}{4}\cancel{x}}=\left(\frac{3}{4}x\right)^{\cancel{x}}$

$$x=\left(\frac{3}{4}x\right)^{\frac{4}{3}}$$

$x=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}$ dividendo tutto per x

$1=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ e quindi $x^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$, cioè $x=\left(\frac{4}{3}\right)^4$. Di conseguenza $y=\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^4$

$x+y=\frac{4^4}{3^4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4^4}{3^4}=\frac{4^4}{3^4}\cdot\frac{7}{4}=\frac{448}{81}$.

9. COPPIE DI CUBI [2088]

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=91=13\cdot 7$.

Abbiamo una serie di possibilità da verificare:

$\begin{cases}x-y=7\\x^2+xy+y^2=13\end{cases}$ ha soluzioni $(3;-4)$ e $(4;-3)$;

$\begin{cases}x-y=-7\\x^2+xy+y^2=-13\end{cases}$ non ha soluzioni reali

$\begin{cases}x-y=13\\x^2+xy+y^2=7\end{cases}$ non ha soluzioni reali

$\begin{cases}x-y=-13\\x^2+xy+y^2=-7\end{cases}$ non ha soluzioni reali

$\begin{cases}x-y=1\\x^2+xy+y^2=91\end{cases}$ ha soluzioni $(-5;-6)$ e $(6;5)$;

$\begin{cases}x-y=-1\\x^2+xy+y^2=-91\end{cases}$ non ha soluzioni reali

$\begin{cases}x-y=91\\x^2+xy+y^2=1\end{cases}$ non ha soluzioni reali

$\begin{cases}x-y=-91\\x^2+xy+y^2=-1\end{cases}$ non ha soluzioni reali

La soluzione richiesta è $144+144+900+900=2088$

10. FATTORI PRIMI [652]

Se $x=10$ possiamo vedere $27.000.001$ come $27x^6+1$ che possiamo fattorizzare come differenza di cubi:
$27x^6+1=(3x^2+1)(9x^4-3x^2+1)$ dove il secondo fattore è ancora scomponibile:

$$=(3x^2+1)(9x^4+6x^2-6x^2-3x^2+1)=(3x^2+1)\left[(3x^2-1)^2-9x^2\right]=(3x^2+1)(3x^2+3x+1)(3x^2-3x+1).$$

Rimettendo $x=10$ abbiamo che $27.000.001=301\cdot 331\cdot 271=43\cdot 7\cdot 331\cdot 271$.
La soluzione richieste è $7+43+271+331=652$.

11. GIUSTO UN CONTO [449]

Dobbiamo calcolare $\sum_{i=1}^{14}\frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}$.

Cerchiamo, se esistono, due numeri A e B tali che $\frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}=\frac{A}{i^2}+\frac{B}{(i+1)^2}$.

Risolvendo si ha $2i+1=A(i+1)^2+Bi^2$ che è verificata per $A=1$ e $B=-1$, quindi

$$\sum_{i=1}^{14}\frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}=\sum_{i=1}^{14}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}\right)=1-\frac{1}{15^2}=\frac{224}{225}.$$

La soluzione richiesta è $224+225=449$.

12. PRATICAMENTE PERFETTI [33]

Detto $d(n)$ il numero dei divisori di un numero, si dimostra che il prodotto di tutti i divisori vale $n^{\frac{d(n)}{2}}$.

Sfruttando questa informazioni abbiamo che un numero n è *moltiplicativamente perfetto* se $n^{\frac{d(n)}{2}}=n^2$, cioè se $d(n)=4$ (o se $n=1$).

Ora un numero ha 4 divisori solo se è del tipo $n=p^3$ oppure $n=p\cdot q$, con p e q numeri primi.

Il primo caso è facile in quanto solo 2^3 e 3^3 verificano la condizione di essere minori di 100.
Resta da trovare i numeri del tipo $n=p\cdot q$.
Procediamo per casi: se $p=2$, $2<q\leq 47$ ha 14 possibilità;
se $p=3$, $3<q\leq 31$ ha 9 possibilità;
se $p=5$, $5<q\leq 19$ ha 5 possibilità;
se $p=7$, $7<q\leq 13$ ha 2 2 possibilità.
Non vi sono altri casi.
In totale abbiamo $1+2+14+9+5+2=33$ numeri *moltiplicativamente perfetti* minori di 100.

13. SE NON È TESTA… [75]

$$P(3T \text{ e } 3C\,|\,1T \text{ nei primi tre lanci})=\frac{P\big((3T \text{ e } 3C)\cap(1T \text{ nei primi tre lanci})\big)}{P(1T \text{ nei primi tre lanci})}.$$

Ora $P(3T \text{ e } 3C)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$ e $P(\text{nessuna } T \text{ nei primi tre lanci (con 3T e 3C)})=\left(\frac{1}{2}\right)^6$, quindi

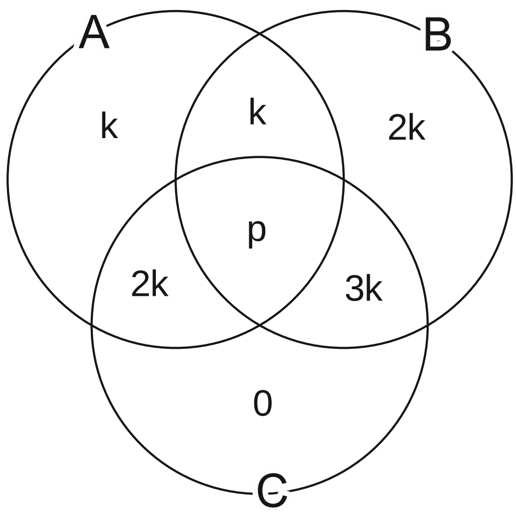
$$P\big((3T \text{ e } 3C)\cap(1T \text{ nei primi tre lanci})\big)=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{19}{64}.$$

$P(1T \text{ nei primi tre lanci})\text{=1-}P(\text{nessuna } T \text{ nei primi tre lanci})\text{=1-}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$, quindi

$$\frac{P\big((3T \text{ e } 3C)\cap(1T \text{ nei primi tre lanci})\big)}{P(1T \text{ nei primi tre lanci})}=\frac{\frac{19}{64}}{\frac{7}{8}}=\frac{19}{56}.$$

Il valore richiesto è $19+56=75$.

14. ATTENTI AI BATTERI [5200]



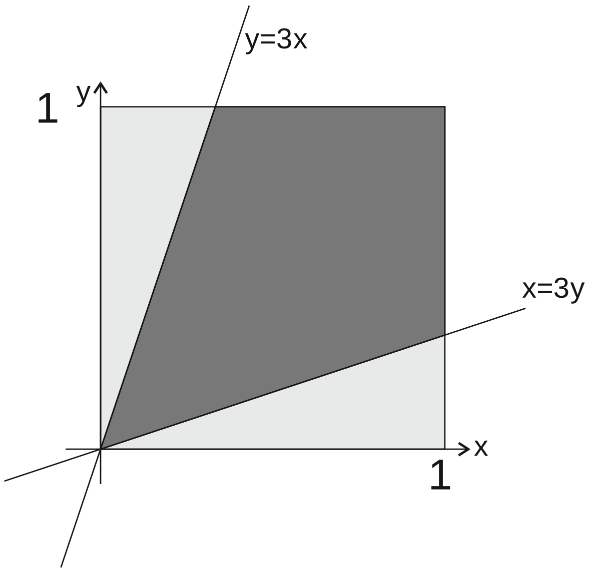
Utilizziamo gli insiemi per descrivere la situazione. Per le informazioni fornite, detta p la probabilità che il batterio reagisca a tutti gli antibiotici e k la ragione della progressione, lo schema viene completato come in figura a fianco.
La somma di tutti i valori riportati deve dare 1, quindi $p+9k=1$.

Sappiamo che $P(B\,|\,A)=\frac{4}{15}=\frac{p+k}{p+4k}$.
Risolvendo le due equazioni a sistema abbiamo:

$\begin{cases} p+9k=1 \\ \frac{p+k}{p+4k}=\frac{4}{15} \end{cases}$ che risolto porta a determinare $\begin{cases} p=\frac{1}{100} \\ k=\frac{11}{100} \end{cases}$.

Detto x il numero totale dei batteri, sappiamo che $(p+3k)x=1768$ e quindi $\frac{34}{100}x=1768$ e quindi $x=5200$.

15. DUE NUMERI [5]
Risolviamo il sistema di disequazioni:
$\begin{cases} \frac{a}{a+b} \geq \frac{1}{4} \\ \frac{a}{a+b} \leq \frac{3}{4} \end{cases}$ siccome $a+b>0$ il sistema diventa $\begin{cases} b \leq 3a \\ a \leq 3b \end{cases}$.
Rappresentiamo la situazione su un sistema di assi cartesiani, dove $x=a$ e $y=b$.
La parte evidenziata in grigio scuro è la parte di piano che verifica entrambe le equazioni.
L'area vale $1-1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ che è anche la probabilità cercata.
La risposta richiesta è $2+3=5$.



16. LOTTERIA MATEMATICA [502---->1/501]
Osserviamo che tutti i numeri pari, escluso il numero 1000 non influenzano la probabilità di vittoria o sconfitta. Immaginiamo di avere solo i 500 numeri dispari e il numero 1000. La vittoria è assicurata solo se il numero 1000 viene pescato per primo.
La probabilità è $P=\frac{1}{501}$.
La risposta richiesta è $1+501=502$.

17. È AMORE [84]
Valutiamo i due casi possibili:
M e R sono vicine: $\boxed{MR}\boxed{A}\boxed{O}\boxed{E}$ $4!\cdot 2=48$ possibili anagrammi.
M e R sono separate da una vocale: $\boxed{MV_1R}\boxed{V_2}\boxed{V_3}$ Scelgo la vocale tra le due consonati in 3 modi possibili, scambio di posto le due consonanti in 2 modi possibili e anagrammo le tre lettere in $3!$ modi, quindi $3!\cdot 2\cdot 3=36$ possibili anagrammi.
In totale abbiamo $48+36=84$ possibilità.

18. FUNZIONI LIMITATE [1500]
Calcoliamo $f:A\to D$ dove $D=\{x,y,z\}$.
Usiamo il principio di inclusione/esclusione: senza vincoli possiamo scegliere qualunque valore dell'insieme D e quindi abbiamo 3^5 funzioni diverse. Una funzione che ha solo 2 possibili valori si può costruire in 2^5 modi e possiamo scartare uno dei tre valori di D in tre modi. Un funzione con solo un'immagine si fa in 3 modi. $3^5-3\cdot 2^5+3=150$ funzioni possibili.
Ricordando che possiamo scegliere i tre valori in un insieme di cinque possibilità in $\binom{5}{2}=10$, le funzioni richieste sono $150\cdot 10=1500$

19. È VERO AMORE [1365]
Usiamo la combinatoria ricorsiva.
Sia $M(n)$ il numero di parole lunghe n senza vocali attaccate che finiscono per M; $A(n)$ il numero di parole lunghe n senza vocali attaccate che finiscono per A e $O(n)$ il numero di parole lunghe n senza vocali attaccate che finiscono per O.
Le regole ricorsive sono:
$M(n)=M(n-1)+A(n-1)+O(n-1)$, cioè posso attaccare una M a qualunque parola lunga $n-1$.
$A(n)=M(n-1)$, cioè posso mettere una A solo se la parola lunga $n-1$ finisce con M.
$O(n)=M(n-1)$, cioè posso mettere una O solo se la parola lunga $n-1$ finisce con M.
Siccome $M(1)=A(1)=O(1)=1$ possiamo riempire ricorsivamente una tabella:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683
A	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341
O	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341

La risposta cercata è $M(10)+A(10)+O(10)=683+341+341=1365$

20. ADDENDI ORDINATI [610]

Sia x il numero di addendi 1 e y il numero di addendi 2. Per la richiesta del problema, deve accadere che $x+2y=14$.

Se $y=7$ e $x=0$ abbiamo 1 solo caso possibile ($\binom{7}{0}$).

Se $y=6$ e $x=2$ abbiamo $\binom{8}{2}$ modi per distribuire gli addendi.

Se $y=5$ e $x=4$ abbiamo $\binom{9}{4}$ modi per distribuire gli addendi.

Continuando in questo modo, avremo

$\binom{7}{0}+\binom{8}{2}+\binom{9}{4}+\binom{10}{6}+\binom{11}{8}+\binom{12}{10}+\binom{13}{12}+\binom{14}{14}=610$ possibilità.

N.B. Se osservi il triangolo di tartaglia, questa è la somma di una delle diagonali che fornisce i numeri di Fibonacci