OliMaTO 12

Simulazione Gara Nazionale a Squadre 2026

- Per ogni problema indicare come risposta un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- I problemi ritenuti più impegnativi dagli autori sono contrassegnati da una stella [$\star$].
- Di seguito sono riportati alcuni valori approssimati che possono risultare utili nello svolgimento dei calcoli:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142 \qquad \sqrt{3} \approx 1{,}7321 \qquad \sqrt{5} \approx 2{,}2361 \qquad \sqrt{7} \approx 2{,}6458 \qquad \pi \approx 3{,}1416.$$

- **10 minuti dall'inizio:** scadenza per la scelta del problema jolly.
- **120 minuti dall'inizio:** fine della gara.

Testi a cura di: Lorenzo Capponi, Giulia Comini, Francesco Laganà, Valerio Morra, Matteo Riccadonna, Giacomo Romagnoli, Alessandro Visca
Ambientazione a cura di: Lorenzo Capponi.

1. *Intro:* prede e predatori
Una giovane coniglietta di nome Judy Hopps si esibisce in uno spettacolo teatrale: "Migliaia di anni fa, il mondo era diviso in due: predatori feroci e docili prede. Ma col tempo ci siamo evoluti, superando i nostri istinti primordiali: ora prede e predatori vivono insieme in armonia!". Il palcoscenico è un quadrato di lato 60 dm e un faro illumina una zona circolare tale che la circonferenza divida ciascuno dei lati del palcoscenico in tre segmenti della stessa lunghezza. Quanto misura, in dm^2, l'area illuminata (anche esterna al palcoscenico)?

Soluzione: la risposta è 3141.

Siano $P_1, P_2, \dots, P_8$ in senso antiorario le intersezioni tra la circonferenza e i lati del quadrato. Per ragioni di simmetria, il segmento P_1P_5 è un diametro della circonferenza, e possiamo calcolarne la lunghezza con il teorema di Pitagora: detto r il raggio, vale

$$(2r)^2 = 20^2 + 60^2 = 4000,$$

dunque la risposta è $\pi r^2 = 1000\pi \approx 3141{,}6$.

2. Riproduzione conigliesca
Il paesino rurale di Bunnyburrow è principalmente abitato da conigli. La loro riproduzione è estremamente prolifica e la popolazione cresce rapidamente di giorno in giorno. Nel giorno 1 la popolazione è $c_1 = 2$; per ogni $n \geq 2$, la popolazione nel giorno n è c_n, pari alla somma tra c_{n-1} e il più grande divisore primo di c_{n-1}. Qual è il più grande numero minore di 9999 che compare nella successione?

Soluzione: la risposta è 9898.

Si può notare che ogni prodotto di numeri primi consecutivi compare nella successione, cosa che si può verificare facilmente per induzione. Allora nella successione deve comparire $97 \cdot 101 = 9797$ e i due termini successivi sono 9898 e 9999.

3. Sogno d'infanzia
Da sempre, il sogno di Judy è di entrare nelle forze dell'ordine di Zootropolis. Decisa a perseguire la sua ambizione, Judy si iscrive all'accademia di polizia. Gli aspiranti poliziotti vengono sottoposti a un addestramento molto duro, che prevede una corsa a ostacoli in cui si deve saltare su una piattaforma mobile che ha la forma di un esagono regolare $ABCDEF$ di lato 2 m. Sia O il simmetrico di C rispetto ad A. Quando Judy atterra sulla piattaforma, questa inizia a ruotare nel piano intorno ad O. Dopo che essa ha compiuto 45° di rotazione in senso antiorario, Judy spicca un balzo e raggiunge il traguardo. Quanto misura, in dm^2, l'area spazzata dall'esagono durante la rotazione?

Soluzione: la risposta è 2610.

Sia $A'B'C'D'E'F'$ l'esagono dopo la rotazione (con corrispondenza tra A e A', B e B', e così via). Il punto dell'esagono iniziale più vicino a O è A, mentre il più lontano è D. L'osservazione fondamentale è che la regione cercata può essere partizionata in:

- il mezzo esagono $ABCD$;
- il mezzo esagono $A'D'E'F'$;
- la regione compresa tra il segmento AD, l'arco di circonferenza DD', il segmento $A'D'$ e l'arco di circonferenza AA'.

L'area complessiva dei due mezzi esagoni è pari all'area di $ABCDEF$, ovvero (in metri quadrati) $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} 2^2 = 6\sqrt{3}$. Per l'area della terza regione, si può notare che, essendo $45° = 360°/8$, essa è pari a $1/8$ di una corona circolare con raggio interno OA e raggio esterno OD. Si calcolano facilmente $OA^2 = 12$ e $OD^2 = 52$, quindi l'area è $(52-12)\pi/8 = 5\pi$. In definitiva, la risposta è

$$100(6\sqrt{3} + 5\pi) \approx 2610{,}06.$$

4. Fratelli concatenati
Avendo completato l'addestramento all'accademia di polizia, Judy si appresta a trasferirsi a Zootropolis, lasciando la sua casa natale di Bunnyburrow. Prima di partire, saluta tutti i suoi 10000 fratelli, che sono numerati da 1 a 10000. Essi si posizionano in fila in un certo ordine (non necessariamente crescente) e Judy considera il numero N ottenuto concatenando le scritture decimali dei numeri associati ai suoi fratelli, secondo l'ordine della fila. Si accorge così che i suoi fratelli si sono posizionati in modo tale da massimizzare N; in che posizione della fila (espressa con un numero tra 1 e 10000, estremi inclusi) si trova il 2026-esimo fratello? *Data una sequenza ordinata di interi positivi, si definisce la loro concatenazione come il numero ottenuto accostando le loro scritture decimali: ad esempio, la concatenazione della terna ordinata* $(12, 34, 56)$ *è* 123456.

Soluzione: la risposta è 8858.

Per ogni coppia ordinata (a, b) di interi positivi, definiamo $a \oplus b$ come la loro concatenazione, scrivendo prima a e poi b. Risolvere il problema equivale a determinare quanti numeri tra 1 e 10000 compaiono prima di 2026 nella concatenazione, ovvero per quanti $n \in \{1, 2, \dots 10000\} \setminus \{2026\}$ vale $n \oplus 2026 > 2026 \oplus n$. Distinguiamo casi in base alla quantità di cifre di ogni numero.

- I numeri di una cifra che compaiono prima di 2026 sono quelli da 2 a 9: in tutto 8.
- I numeri di due cifre che compaiono prima di 2026 sono quelli da 21 a 99: in tutto 79.
- I numeri di tre cifre che compaiono prima di 2026 sono quelli da 203 a 999: in tutto 797.
- I numeri di quattro cifre che compaiono prima di 2026 sono quelli da 2027 a 9999: in tutto 7973.

In definitiva, ci sono $7 + 79 + 797 + 7973 = 8857$ numeri che compaiono prima di 2026 e la risposta è 8858.

5. Il treno per Zootropolis
Dopo aver salutato tutta la sua numerosissima famiglia a Bunnyburrow, Judy sale sul treno per Zootropolis. Esso è formato da alcuni vagoni con lunghezze intere positive (in metri) tutte diverse. Judy nota che il treno è lungo 2026 metri e che, comunque si scelgano tre vagoni diversi di lunghezze a, b e c, non esiste un triangolo non degenere di lati a, b e c. Da quanti vagoni è formato il treno, al massimo?

Soluzione: la risposta è 14.

Secondo la disuguaglianza triangolare, per ogni $a < b < c$ deve valere $a + b \leq c$. Allora, per massimizzare il numero di vagoni, conviene utilizzare le lunghezze più piccole possibili: partendo da 1 e 2, i minimi valori successivi sono quelli della successione di Fibonacci:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.$$

La somma di questi numeri (che sono 14) è 1595. Aggiungendo il successivo numero di Fibonacci, cioè 987, si otterrebbe una somma complessiva maggiore di 2026; pertanto, non è possibile ottenere un treno con più 14 vagoni. D'altra parte, una configurazione di 14 vagoni è effettivamente realizzabile:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 1041.$$

6. Nuova vita
Judy si trasferisce in un piccolo appartamento a Zootropolis: "Muri polverosi, letto traballante, antilopi urlatrici come vicini di casa... Mi piace!". Il numero del suo appartamento è un intero positivo con tre cifre distinte non nulle che non è divisibile per nessuna delle sue cifre. Quanto vale, al minimo?

Soluzione: la risposta è 239.

Il numero cercato non può iniziare per 1, quindi è maggiore o uguale a 200. Non può avere come cifra delle decine 0 né 1 né 2, quindi è maggiore o uguale a 230. A questo punto si controllano i valori delle cifre delle unità, trovando che 239 è il minimo numero che verifica le ipotesi.

7. In divisa
Judy si prepara per il suo primo giorno da agente di polizia di Zootropolis. Nel cassetto ha 4 paia di calzini: due rossi, due gialli, due verdi e due blu. Preleva un primo calzino a caso dal cassetto e se lo infila su una zampa. Poi continua a estrarre calzini a caso dal cassetto, uno per volta, finché trova il calzino abbinato a quello che ha già indossato. Prima di allora, ogni calzino estratto tranne il primo viene scartato, cioè non viene rimesso nel cassetto. Qual è la probabilità che alla fine tra i calzini scartati ci sia almeno un paio dello stesso colore? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione: la risposta è 54.

Conviene calcolare la probabilità complementare, ossia la probabilità che tra i calzini scartati non ci sia un paio dello stesso colore. Affinché questo si verifichi, per il principio dei cassetti Judy non può aver estratto più di 5 calzini, inclusi il primo e l'ultimo. Distinguiamo casi in base al numero c di calzini estratti.

- Per il caso $c = 2$ ricaviamo probabilità $\frac{1}{7}$.
- Per il caso $c = 3$ ricaviamo probabilità $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7}$.
- Per il caso $c = 4$ ricaviamo probabilità $\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{35}$.
- Per il caso $c = 5$ ricaviamo probabilità $\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{35}$.

La somma delle quattro probabilità trovate è $\frac{16}{35}$, quindi la probabilità cercata è $1 - \frac{16}{35} = \frac{19}{35}$.

8. La tavoletta di Benjamin
Il centralinista del dipartimento di polizia di Zootropolis è un simpatico ghepardo di nome Benjamin, goloso di dolciumi. Ogni giorno mangia per colazione una ciambella e un'intera tavoletta di cioccolato formata da 8×8 quadretti unitari. In quanti modi diversi può spezzare la tavoletta in modo da partizionarla in tre rettangoli, ciascuno dei quali con dimensioni intere e parallele a quelle della tavoletta iniziale? *Configurazioni ottenibili l'una dall'altra tramite rotazione o riflessione sono da considerarsi distinte.*

Soluzione: la risposta è 238.

Ci sono essenzialmente due casi possibili.

- Due tagli paralleli: ci sono 2 modi di scegliere la direzione (verticale o orizzontale) e $\binom{7}{2} = 21$ modi di scegliere la coppia di segmenti. In tutto $2 \cdot 21 = 42$ possibilità.

- Due tagli perpendicolari: ci sono $2 \cdot 7$ modi di scegliere il taglio più lungo e poi $2 \cdot 7$ modi di scegliere il taglio più corto. In tutto $2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 = 196$ possibilità.

La risposta è $42 + 196 = 238$.

9. Pawpsicles
Durante i suoi primi giorni da agente in servizio, Judy si imbatte nella volpe Nick Wilde, che insieme al fennec Finnick sta compiendo una truffa nella vendita di ghiaccioli a forma di zampa, i "pawpsicles". Ciascuno di questi ha la forma di un trapezio rettangolo $ABCD$ tale che $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 90°$ e che la circonferenza di diametro AD sia tangente al lato BC. Sapendo che $AB = 490$ *mm* e $BC = 560$ *mm*, quanti *mm* misura CD?

Soluzione: la risposta è 160.

Detto O il centro della circonferenza e P il punto di tangenza con BC, notiamo che essendo O punto medio di AD segue che P è il punto medio di BC per il teorema di Talete. Inoltre, $\widehat{APD}$ è retto poiché insiste sul diametro AD, quindi $\widehat{BPA}$ e $\widehat{DPC}$ sono complementari. Ne consegue che i triangoli rettangoli APB e CPD sono simili, pertanto

$$\frac{AB}{BP} = \frac{PC}{CD} \implies CD = \frac{BP \cdot PC}{AB} = \frac{280 \cdot 280}{490} = 160.$$

10. Ausiliare del traffico
Nonostante Judy abbia superato l'addestramento da agente di polizia con pieno merito, Capitan Bogo dubita delle sue capacità e la relega ad ausiliare del traffico. Così, ogni giorno Judy si reca presso i 7 incroci stradali che si trovano sul perimetro di Zootropolis, che sono collocati sui 7 vertici di un ettagono regolare. Judy parte da un incrocio qualsiasi; poi, per 6 volte, sceglie un incrocio a caso tra quelli che non ha ancora visitato e vi si dirige, con uno spostamento rettilineo (che corrisponde a una diagonale o lato dell'ettagono regolare). Dopo 6 spostamenti ha visitato tutti gli incroci e torna, sempre con uno spostamento rettilineo, a quello partenza. Il percorso di Judy è quindi un poligono $\mathcal{P}$ di 7 lati, eventualmente intrecciato: quante sono, in media, le intersezioni tra coppie di lati di $\mathcal{P}$, escluse quelle nei vertici dell'ettagono regolare? *Rispondere con il risultato moltiplicato per* 1000.

Soluzione: la risposta è 4666.

Contiamo le coppie di lati non consecutivi di $\mathcal{P}$: poiché $\mathcal{P}$ ha 7 lati, le coppie $\binom{7}{2} = 21$, da cui però occorre sottrarre le 7 coppie di lati consecutivi. Dunque ci sono 14 coppie di segmenti non consecutivi. Ognuna di queste coppie è associata a una quaterna di vertici distinti: fissati quattro vertici, ci sono 3 modi di accoppiarli con due segmenti, di cui esattamente 1 è tale che i segmenti si intersechino. Per simmetria, le tre opzioni risultano equiprobabili; pertanto, fissata una coppia di lati non consecutivi di $\mathcal{P}$, la probabilità che si intersechino è $1/3$. Poiché tali coppie sono 14, per linearità del valore atteso segue che il numero medio di intersezioni è $14/3$. La risposta è $14000/3 \approx 4666{,}66$.

11. Memoria da elefante
Judy si è incaricata del caso della scomparsa del signor Emmitt Otterton e Nick le ha rivelato di averlo visto entrare in un resort per nudisti di proprietà di Yax, uno yak hippie. Yax: "Nangi è un elefante, sicché sicuramente si ricorderà tutto del signor Otterton. Ehi Nangi, hai presente Emmitt la lontra? Frequenta il tuo corso di yoga da, boh, tipo sei anni". Nangi: "Non ricordo affatto questo castoro". Yax: "In realtà è una lontra. Dai, è stato qui due mercoledì fa e andando via è salito su quell'auto bianca. Te lo ricordi, Nangi?". Nangi: "No". Interviene Judy, rivolta a Yax: "Non è che per caso si ricorda anche quali sono gli interi positivi minori di 2026 esprimibili nella forma $a(5a + 4b)$, con a e b interi?". Yax: "Come no! Ve l'ho detto che Nangi si ricorda tutto!". Quanti sono tali numeri?

Soluzione: la risposta è 886.

- Per a dispari abbiamo $5a^2 + 4ab \equiv 1 \pmod 4$ e ponendo $a = 1$ si verifica che tutti gli interi congrui a 1 modulo 4 sono ottenibili.

- Per $a \equiv 0 \pmod 4$ abbiamo $5a^2 + 4ab \equiv 0 \pmod{16}$ e ponendo $a = 4$ si verifica che tutti i multipli di 16 sono ottenibili.

- Per $a \equiv 2 \pmod 4$ abbiamo $5a^2 + 4ab \equiv 4 \pmod 8$ e per $a = 2$ si verifica che tutti gli interi congrui a 4 modulo 8 sono ottenibili.

La risposta è quindi data dalla somma delle quantità di interi positivi minori di 2026 che sono rispettivamente congrui a 1 modulo 4, oppure congrui 4 modulo 8, oppure divisibili per 16.

12. In un Flash
Per proseguire l'indagine, Judy ha bisogno di risalire all'auto che ha prelevato il signor Otterton, così Nick la conduce dal suo amico Flash, un bradipo che lavora alla motorizzazione. Flash: "Cosa... posso... fare... per... voi... oggi?".

Judy, spazientita: "Ho urgentemente bisogno di identificare la targa $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 7$". Mentre Flash sta lentamente cercando la targa nel suo database, Nick lo distrae per stuzzicare Judy: "Ehi Flash, ti faccio un indovinello: siano a, b, c le radici di $p(x)$ e sia $q(x)$ un polinomio di terzo grado tale che $q(a) = b + c$, $q(b) = c + a$, $q(c) = a + b$ e $q(a + b + c) = -16$. Quanto vale $q(0)$?

Soluzione: la risposta è 11.

Per le formule di Viète vale $a + b + c = -3$, quindi $q(a) = -3 - a$, $q(b) = -3 - b$ e $q(c) = -3 - c$. Allora vediamo che $q(x) + x + 3$ ha come radici a, b e c, perciò

$$q(x) = -3 - x + k(x^3 + 3x^2 + 5x + 7)$$

per qualche k reale. Dall'ipotesi $q(-3) = -16$ ricaviamo $k = 2$ e così il polinomio $q(x)$ è determinato: la risposta è data dal suo termine noto, che è uguale a 11.

13. Una pecora che conta

Judy vuole approfittare dei suoi buoni rapporti con Dawn Bellwether, la vicesindaca di Zootropolis, per accedere alla rete di telecamere di sorveglianza. Nick scherza con Judy: "Una pecora? Secondo te quando non riesce a dormire si conta da sola?". Interviene Bellwether: "In realtà ho l'abitudine di lanciare monete. Lancio 12 monete e le metto in fila sul comodino, poi individuo tutte quelle che mostrano la stessa faccia (testa o croce) rispetto ad almeno una moneta adiacente: infine rimuovo simultaneamente tutte le monete così individuate". Nick e Judy si domandano: qual è la probabilità che sul comodino resti al più una moneta? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione: la risposta è 2377.

Rappresentiamo ogni disposizione delle monete con una stringa di lunghezza 12 formata dalle lettere T e C. Osserviamo che una moneta viene rimossa se e solo se appartiene a un blocco di almeno due monete consecutive uguali; equivalentemente, restano sul comodino solo le monete "isolate". Il problema si riduce dunque a contare le stringhe di lunghezza 12 la cui decomposizione in blocchi massimali contiene al più un blocco di lunghezza 1.

Fissata la faccia della moneta iniziale, sia B_n il numero di stringhe di n monete con tutti i blocchi massimali di lunghezza maggiore o uguale a 2: si ha $B_0 = 1$, $B_1 = 0$, e per $n \geq 2$ si ottiene la ricorsione $B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$. Ricaviamo così $B_{12} = 89$.

Contiamo ora le stringhe con esattamente una moneta isolata: se questa divide la stringa in una parte sinistra con k monete e una parte destra con $11 - k$ monete, allora la parte sinistra può essere scelta in B_k modi e la parte destra in B_{11-k} modi: calcoliamo allora

$$\sum_{k=0}^{11} B_k B_{11-k} = 240.$$

In definitiva, le stringhe favorevoli sono $2(89 + 240) = 658$; il fattore 2 è dovuto al fatto che la faccia della moneta iniziale si può scegliere in 2 modi. I casi possibili sono semplicemente $2^{12} = 4096$ e la risposta è $\frac{329}{2048}$.

14. Rete di telecamere [$\star$]

Con l'aiuto di Bellwether, Judy e Nick accedono alla rete delle telecamere di sorveglianza del distretto della Foresta Pluviale. Su un monitor visualizzano una mappa delle 25 telecamere, disposte sui vertici di una griglia con 4×4 caselle quadrate di lato unitario. Nella griglia compaiono in tutto 40 segmenti unitari, ciascuno dei quali può essere di 6 colori diversi. Judy e Nick si rendono conto che ognuna delle 16 caselle unitarie ha i lati di complessivamente tre colori diversi. In quanti modi possono essere colorati i segmenti della griglia? *Non è necessario che ciascuno dei 6 colori disponibili compaia almeno una volta. Inoltre, configurazioni ottenibili l'una dall'altra tramite rotazione o riflessione sono da considerarsi distinte. Dare come risposta la quantità di divisori positivi del risultato.*

Soluzione: la risposta è 6273.

La griglia contiene 5 righe di segmenti orizzontali, ciascuna formata da 4 segmenti, e 4 strisce orizzontali di caselle. L'osservazione fondamentale è la seguente: supponendo che in una casella unitaria siano già fissati il colore del lato superiore del suo lato sinistro, allora ci sono sempre 20 modi per colorare il lato inferiore e il lato destro. Dimostriamolo distinguendo due casi.

- Se il lato superiore e il lato sinistro hanno lo stesso colore, diciamo c, allora gli altri due lati devono avere due colori distinti tra loro e diversi da c: ci sono quindi $5 \cdot 4 = 20$ possibilità.

- Se invece il lato superiore e il lato sinistro hanno due colori distinti, diciamo a e b, allora i due lati mancanti devono fare in modo che, tra i quattro lati, compaiano esattamente tre colori. Equivalentemente, tra i due lati mancanti deve comparire esattamente un colore nuovo rispetto ad a e b. Il colore nuovo può essere scelto in 4 modi; una volta scelto tale colore, i due lati mancanti possono essere colorati usando quel colore nuovo e uno tra a e b, oppure usando due volte il colore nuovo. Quindi, per ogni colore nuovo, ci sono $2 + 2 + 1 = 5$ possibilità, per un totale di $4 \cdot 5 = 20$ possibilità.

La prima riga orizzontale, cioè i 4 segmenti superiori della griglia, può essere colorata in 6^4 modi. Consideriamo poi una striscia orizzontale formata da 4 caselle consecutive. Supponiamo già fissati i colori dei 4 lati superiori della striscia. Il lato verticale più a sinistra della striscia può essere colorato in 6 modi. A questo punto procediamo da sinistra verso destra: per ogni casella conosciamo già il colore del lato superiore e del lato sinistro, quindi per il lemma dimostrato possiamo colorare il lato inferiore e il lato destro in 20 modi. Poiché ogni striscia contiene 4 caselle, fissata la sua riga superiore, essa può essere completata in $6 \cdot 20^4$ modi. La griglia è formata da 4 strisce orizzontali, quindi il numero totale di colorazioni è

$$6^4 \left(6 \cdot 20^4\right)^4 = 2^{40} \cdot 3^8 \cdot 5^{16}$$

e la risposta è $41 \cdot 9 \cdot 17 = 6273$.

15. Tunnel di servizio

Esaminando le registrazioni delle telecamere di sorveglianza, Judy e Nick hanno individuato il furgone dei rapitori della pantera Manchas e ne stanno ricostruendo il percorso presso una zona triangolare ABC. Judy osserva perplessa: "Sono entrati nel tunnel rettilineo BC, lungo 8 *km*, che collega la Foresta Pluviale a Tundratown, ma non ne sono usciti". Nick: "Ci sono un punto P sul segmento AB tale che $AP = 1$ *km* e un punto Q sul segmento AC tale che $AQ = 3$ *km*. Se io volessi evitare le telecamere perché sto compiendo qualcosa di illegale (cosa che non ho mai fatto), utilizzerei uno dei due tunnel di servizio MP e MQ, dove M è il punto medio di BC". Sapendo che $\widehat{PMB} = \widehat{CMQ} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$, la misura di BP in *km* è esprimibile nella forma $\sqrt{a} - b$ con a e b interi positivi: quanto vale $a + b$?

Soluzione: la risposta è 18.

Primo metodo. Dimostreremo che $BP = CQ$. Valgono le seguenti relazioni tra angoli:

$$\widehat{BPM} + \widehat{MQC} = 360^\circ - \widehat{MBP} - \widehat{PMB} - \widehat{CMQ} - \widehat{QCM} = 360^\circ - \widehat{CBA} - \widehat{BAC} - \widehat{ACB} = 180^\circ.$$

Dunque, per il teorema dei seni,

$$BP = \frac{BM \cdot \sin \widehat{PMB}}{\sin \widehat{BPM}} = \frac{CM \cdot \sin \widehat{MQC}}{\sin \widehat{CMQ}} = CQ.$$

Sia x la lunghezza di BP, e sia T il secondo punto di intersezione tra la circonferenza circoscritta a $APMQ$ e BC (infatti $APMQ$ è ciclico in quanto gli angoli in A e M sono supplementari). Considerando le potenze di B e C rispetto alla circonferenza, ricaviamo

$$x(x+1) + x(x+3) = BT \cdot 4 + CT \cdot 4 = 32,$$

da cui $x = \sqrt{17} - 1$.

Secondo metodo (cenno). Il quadrilatero $APMQ$ è ciclico in quanto gli angoli in A e M sono supplementari. Sia T l'intersezione tra la circonferenza e BC distinta da M: segue che AT è la bisettrice di $\widehat{ABC}$. Allora sfruttando

- il teorema della bisettrice,
- la similitudine tra i triangoli BPM e BTA,
- la similitudine tra i triangoli CQM e CTA,

si possono impostare dei calcoli che permettono di concludere.

16. Ululato di massa

Judy e Nick rintracciano la località dove sono stati segretamente imprigionati i predatori scomparsi: si tratta del Cliffside Asylum, un vecchio ospedale dismesso. L'edificio è sorvegliato da molti lupi, numerati con tutti i divisori positivi di 10^{11}, che costituiscono un insieme D. Per distrarre le guardie, Nick imita un ululato, che viene sentito da un sottoinsieme S dei lupi, i quali si mettono a loro volta ad ululare. Judy osserva la scena: nota che per ogni lupo d di D, esattamente uno tra d e $10^{11}/d$ si è messo a ululare. Inoltre, per ogni lupo s di S, anche tutti i lupi il cui numero divide s si sono messi a ululare. Quanti sono i possibili insiemi S?

Soluzione: la risposta è 924.

Immaginiamo una tabella con 12 righe numerate da 0 a 11 dal basso verso l'alto e altrettante colonne numerate da 0 a 11 da sinistra verso destra. Ogni casella (i, j) rappresenta l'elemento $2^i 5^j$ di D. Immaginiamo di rappresentare S colorando un sottoinsieme di caselle della tabella.

L'ipotesi per cui $s \in S$ implica che anche tutti i divisori di s appartengano a S significa che se una casella della tabella è colorata allora lo sono anche tutte le caselle inferiori nella stessa colonna e tutte le caselle più a sinistra nella stessa riga. Ignorando momentaneamente l'altra ipotesi (cioè che per ogni $d \in D$ esattamente uno tra d e $10^{11}/d$ appartiene a S), osserviamo che l'insieme dei possibili S risulta in biiezione con l'insieme dei percorsi minimi (costituiti da una sequenza di segmenti unitari della tabella verticali e orizzontali) dal vertice in alto a sinistra della tabella fino al vertice in basso a destra.

Considerando ora anche l'altra ipotesi, notiamo che affinché un sottoinsieme S sia valido il suo percorso associato deve necessariamente passare per il vertice centrale della tabella, e più precisamente deve essere tale che le due metà di percorso siano l'una la rotazione dell'altra (di 180°) rispetto al centro della tabella. Questo significa che l'intero percorso risulta univocamente determinato dalla sua prima metà, per un totale di $\binom{12}{6} = 924$ scelte possibili.

17. Conferenza stampa algebrica [$\star$]
Capitan Bogo: "Signore e signori, i mammiferi che erano scomparsi sono stati ritrovati dalla nostra nuova recluta Judy Hopps, a cui lascerò la parola tra un momento". Judy è molto agitata per la conferenza stampa, così Nick tenta di rassicurarla: "Ti spiego l'abc delle conferenze stampa: rispondi a una domanda con un'altra domanda". Comincia l'intervista: "Agente Judy Hopps, cosa ci può dire sullo stato dei mammiferi ritrovati?". Judy segue il consiglio di Nick: "Consideri la successione di numeri reali definita da $x_1 = 4$ e $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 1}$ per ogni $n \geq 1$. Posto

$$S = \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_4} + \cdots + \frac{1}{x_{2025} x_{2026}},$$

quanto vale $1000S$?"

Soluzione: la risposta è 17.

Elevando al quadrato la relazione di ricorrenza la si può riscrivere come $x_n^2 - 4x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2 = 1$, quindi x_n è soluzione dell'equazione $r^2 - 4x_{n+1}r + x_{n+1}^2 - 1 = 0$; simmetricamente, anche x_{n+2} è soluzione della stessa equazione. Poiché la successione è strettamente crescente, x_n e x_{n+2} sono radici distinte; dunque, per le formule di Viète vale $x_n + x_{n+2} = 4x_{n+1}$. Ora, per $n \geq 2$, si ha

$$\frac{1}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n^2 - 4x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n+1}} - 4.$$

Da $x_{n-1} + x_{n+1} = 4x_n$ otteniamo $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 4 - \frac{x_{n-1}}{x_n}$, quindi

$$\frac{1}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} - \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

La somma è dunque telescopica:

$$S = \frac{1}{x_1 x_2} + \sum_{n=2}^{2025} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - \frac{x_{n-1}}{x_n} \right) = \frac{1}{60} + \frac{x_{2025}}{x_{2026}} - \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_{2025}}{x_{2026}} + \frac{1}{60} - \frac{4}{15} = \frac{x_{2025}}{x_{2026}} - \frac{1}{4}$$

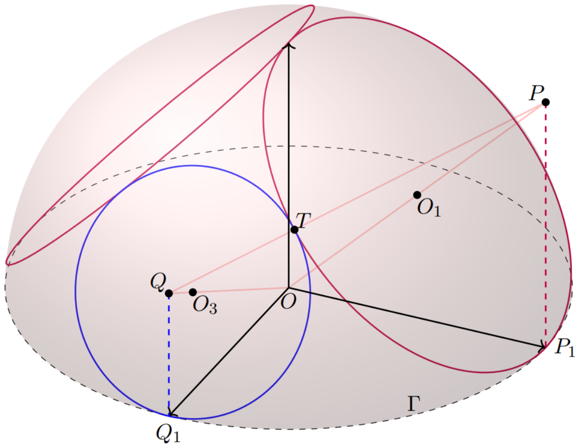
Resta stimare il rapporto $\frac{x_{2025}}{x_{2026}}$. Dalla relazione $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, ponendo $r_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$ si ha

$$r_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} = \frac{x_{n+1}}{4x_{n+1} - x_n} = \frac{1}{4 - r_n}.$$

Troviamo dunque come equazione caratteristica $r^2 - 4r + 1 = 0$, da cui $r = 2 - \sqrt{3}$. Allora $S \approx (2 - \sqrt{3}) - \frac{1}{4}$ e ricaviamo $\lfloor 1000S \rfloor = 17$.

18. Torta ai mirtilli
Gideon Gray è diventato un pasticcere: "Ehi Judy, volevo dirti che mi dispiace per come mi sono comportato da piccolo, quando facevo il bullo: ero pieno di insicurezze e le manifestavo con l'aggressività. Ti ho portato una torta ai mirtilli a forma di emisfero di raggio 10 cm". Detto N il punto sulla superficie dell'emisfero che è più distante dalla sua base, Gideon effettua due tagli individuando due sezioni circolari delimitate da circonferenze Γ_1 e Γ_2: esse sono tangenti tra loro in N e tangenti alla circonferenza di base dell'emisfero. Poi con un terzo taglio individua una sezione circolare delimitata da una circonferenza Γ_3 che risulta tangente a Γ_1, Γ_2 e alla circonferenza di base dell'emisfero. Qual è l'area di Γ_3, in cm^2?

Soluzione: la risposta è 6283.



Sia Γ la base dell'emisfero, e siano T, P_1, Q_1 i punti di tangenza rispettivamente delle coppie (Γ_1, Γ_3), (Γ_1, Γ), (Γ_3, Γ). Siano inoltre O, O_1, O_2, O_3 i centri rispettivamente di $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Sia P un punto tale che le rette tangenti condotte da P all'emisfero lo intersechino lungo la circonferenza Γ_1; definiamo analogamente Q per Γ_3.

Si hanno $\widehat{PNO} = \widehat{PP_1O} = 90°$, $OP_1 = ON$ e $\widehat{NOP_1} = 90°$, dunque PP_1ON è un quadrato. In particolare, $PP_1 = OP_1 = OQ_1 = 10$. Applicando il teorema di Pitagora nello spazio tridimensionale, otteniamo

$$PQ^2 = (PP_1 - QQ_1)^2 + OP_1^2 + OQ_1^2 = (10 - QQ_1)^2 + 200.$$

D'altra parte, poiché P, Q, T giacciono sia sul piano tangente in T sia sul piano individuato da OO_1O_2, i punti P, Q, T sono allineati. Pertanto,

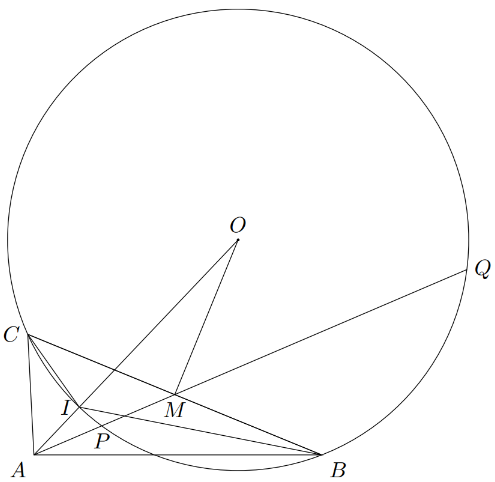
$$PQ^2 = (PT + TQ)^2 = (PP_1 + QQ_1)^2 = (10 + QQ_1)^2.$$

Uguagliando le due espressioni otteniamo $(10 + QQ_1)^2 = (10 - QQ_1)^2 + 200$ da cui segue $QQ_1 = 5$, e quindi $\tan \widehat{QOQ_1} = \frac{1}{2}$. A questo punto con semplici passaggi si trova che il raggio r di Γ_3 è $2\sqrt{5}$ e la risposta è $20\pi \approx 62{,}832$.

19. Il laboratorio segreto [$\star$]

Judy e Nick trovano un laboratorio nascosto in una carrozza abbandonata nei tunnel della metropolitana. Judy attiva il convoglio, che parte dal vertice A di un triangolo ABC con incentro I e si muove lungo un binario rettilineo verso il punto medio M di BC. La retta AM interseca la circonferenza circoscritta a IBC nei punti P e Q, in modo tale che $AP = 13\ m$ e $AQ = 83\ m$; inoltre $BC = 56\ m$. Quanto misura, in metri, il perimetro di ABC?

Soluzione: la risposta è 128.



Sia ω la circonferenza circoscritta a IBC, con centro O. Per il lemma incentro–excentro, il circocentro di IBC giace sulla retta AI. Senza perdita di generalità, assumiamo $AB \geq AC$.

Iniziamo mostrando che il caso $AB = AC$ è impossibile. Se $AB = AC$, allora I giace su AM e dunque $I = P$. Questo implica $AI = 13$ e quindi $IM = MP < 13$. Tuttavia, considerando la potenza di M rispetto a ω si ha $BM \cdot CM = PM \cdot QM$ e poiché $PQ = 83 - 13 = 70$ e $BM \cdot CM = 28^2$, otteniamo $\{PM, QM\} = \{14, 56\}$ in qualche ordine. Questo implicherebbe $PM > 13$, ma abbiamo già dimostrato che $PM = IM < 13$, assurdo.

Quindi $AB > AC$. In questo caso, considerando la potenza di A rispetto a ω, otteniamo $AB \cdot AC = AP \cdot AQ$, poiché il secondo punto di intersezione della retta AC con ω è il simmetrico di B rispetto alla bisettrice dell'angolo A. Pertanto,

$AB \cdot AC = 13 \cdot 83 = 1079$. Consideriamo la potenza di M rispetto a ω e otteniamo $\{PM, QM\} = \{14, 56\}$ in qualche ordine. Poiché $OM \perp BC$ e A si trova dalla parte opposta di BC rispetto a O, si ha che $\widehat{OMA}$ è ottuso. Questo implica $PM < QM$, quindi $PM = 14$ e $AM = AP + PM = 27$.

Ora applichiamo il teorema di Stewart in ABC rispetto al punto M:

$$AB^2 \left(\frac{BC}{2}\right) + AC^2 \left(\frac{BC}{2}\right) = \frac{BC^3}{4} + BC \cdot AM^2.$$

Sostituendo BC e AM, si ottiene $AB^2 + AC^2 = 2(28^2 + 27^2) = 3026$. Da $AB \cdot AC = 1079$, ricaviamo

$$AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC = (AB + AC)^2 = 3026 + 2 \cdot 1079 = 5184 = 72^2.$$

Infine,

$$(AB + AC) + BC = 72 + 56 = 128.$$

20. La verità è svelata

Judy e Nick hanno scoperto il piano malvagio di Bellwether, che allora getta la maschera: "Noi prede dobbiamo stare dalla stessa parte, Judy! Sottovalutate e poco apprezzate: non ne sei stufa? I predatori saranno anche forti e prepotenti, ma le prede li superano numericamente: per ogni predatore ci sono tante prede quante sono le terne ordinate (a, b, c) di interi positivi tali che $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ e che b sia un divisore di 4200". Quante sono queste terne?

Soluzione: la risposta è 1128.

L'equazione è equivalente a $b^2 = a(b - c)$. Si osservi che è necessario che $d = b - c$ sia un divisore di b^2 strettamente minore di b. Viceversa, per ogni b e per ogni $d < b$ divisore di b^2, esiste esattamente una soluzione (a, b, c), ossia $\left(\frac{b^2}{d}, b, b - d\right)$. Resta quindi da sommare, per tutti i divisori b di 4200, il numero di divisori di b^2 minori di b.

I divisori di b^2 diversi da b si possono accoppiare a due a due, con ciascuna coppia avente prodotto b^2. Ogni coppia contiene un divisore maggiore di b e uno minore di b, quindi se b^2 ha s divisori, esattamente $\frac{s-1}{2}$ di essi sono strettamente minori di b. Ogni divisore $b \mid 4200$ è della forma $2^w 3^x 5^y 7^z$ con $w \le 3$, $x \le 1$, $y \le 2$, $z \le 1$, nel qual caso b^2 ha $(2w + 1)(2x + 1)(2y + 1)(2z + 1)$ divisori. Pertanto, la risposta è

$$\sum_{w=0}^{3} \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{2} \sum_{z=0}^{1} \frac{(2w + 1)(2x + 1)(2y + 1)(2z + 1) - 1}{2} = \frac{(1 + 3 + 5 + 7)(1 + 3)(1 + 3 + 5)(1 + 3) - 48}{2} = 1128.$$

21. *Outro*: *Try Everything* [$\star$]

In seguito all'arresto di Bellwether, Judy e Nick diventano colleghi. Capitan Bogo si rivolge alla squadra di agenti di polizia: "Vi assegno gli incarichi per oggi. Agenti Grizzoli, Fangmeyer e Delgato: sarete la SWAT di Tundratown. Snarlov, Higgins, Wolfhard: andrete sotto copertura. Hopps, Wilde: voi dovrete calcolare il termine a_{500} della successione di interi definita da $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n^7 - a_n + 1$ per ogni $n \ge 1$. Questo è tutto... Scherzavo! Pare si aggiri un pirata della strada nella zona di Savana Centrale: trovatelo e buttatelo dentro!". Che resto si ottiene dividendo a_{500} per 343?

Soluzione: la risposta è 274.

Sia $p = 7$. Si osservi che per ogni $n \ge 1$,

$$a_{n+1} \equiv a_n^p - a_n + 1 \equiv a_n - a_n + 1 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Pertanto, esiste una successione di interi $x_2, x_3, \ldots$ tale che possiamo scrivere $a_{n+1} = 1 + px_{n+1}$ per ogni $n \ge 1$. Sostituendo questa espressione nella ricorrenza, otteniamo

$$\begin{aligned}
1 + px_{n+1} &= a_{n+1} \\
&= a_n^7 - a_n + 1 \\
&= (1 + px_n)^p - (1 + px_n) + 1 \\
&= \left(\cdots + \binom{p}{2}(px_n)^2 + \binom{p}{1}(px_n) + \binom{p}{0}\right) - px_n \\
&\equiv p^2 x_n - px_n + 1 \\
&\equiv 1 + p((p - 1)x_n) \pmod{p^3}.
\end{aligned}$$

Applicando ripetutamente questo fatto, otteniamo

$$1 + px_n \equiv 1 + p((p - 1)^{n-2} x_2) \pmod{p^3}$$

per ogni $n \geq 2$. Si ha $a_2 = 127 = 1 + 7 \cdot 18$, quindi $x_2 = 18$. Ora, usando l'identità ricavata in precedenza:

$$\begin{aligned}
a_{500} &= 1 + px_{500} \\
&\equiv 1 + p((p-1)^{498}x_2) \\
&\equiv 1 + p \cdot 18 \cdot (p-1)^{498} \\
&\equiv 1 + p \cdot 18 \cdot (1 - 498p + \cdots) \\
&\equiv 1 + p \cdot 18 \cdot (1 - 498p) \\
&\equiv 1 + 7 \cdot 18 - 7^2 \cdot 18 \cdot 498 \\
&\equiv 1 + 7 \cdot 18 - 7^2 \cdot 4 \cdot 1 \\
&\equiv 127 - 196 \equiv -69 \equiv 274 \pmod{p^3}.
\end{aligned}$$