



GARA DI MATEMATICA A SQUADRE FEMMINILE IX FINALE NAZIONALE (9 maggio 2026)

SOLUZIONI

1. QUESTA È BERK [1440]

(Carlo Càssola)

Se α è l'angolo interno del poligono, allora $\alpha = 719(180 - \alpha)$ da cui si ottiene che $\alpha = \frac{719 \cdot 180}{720}$. Un poligono regolare di n lati ha l'angolo interno che misura $\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180}{n}$. Uguagliando le due espressioni trovate otteniamo $\frac{(n-2) \cdot 180}{n} = \frac{719 \cdot 180}{720}$ che risolta permette di ottenere $n = 1440$.

2. HICCUP [5063]

(Simone Bertone)

Supponiamo di aver usato esattamente 2025 cifre uguali per ogni possibile cifra. I numeri scritti dovranno essere $\frac{2025 \cdot 10}{4} = 5062,5$. Questo ci dice che al 5063-esimo numero avremo almeno una cifra scritta 2026 (o più) volte.

3. SOTTO ATTACCO [2592]

(Lorenzo Mazza)

$2^{20} + 2^{14} + 2^x = (2^a + 2^b)^2$ vuol dire che ciascuno dei termini può essere sia uno dei quadrati che il doppio prodotto.

Determiniamo tutti i possibili valori per x .

Se 2^x è il doppio prodotto allora $2^{20} + 2^{14} + 2^x = (2^{10} + 2^7)^2$ e quindi $x = 18$.

Se 2^{14} è il doppio prodotto allora $2^{20} + 2^{14} + 2^x = (2^{10} + 2^3)^2$ e quindi $x = 6$.

Se 2^{20} è il doppio prodotto allora $2^{20} + 2^{14} + 2^x = (2^7 + 2^{12})^2$ e quindi $x = 24$.

4. FURIA BUIA [240]

(Sandro Campigotto)

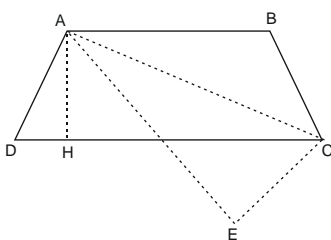
I numeri cercati posso essere del tipo \overline{ABC} con cifre tutte diverse oppure \overline{ABA} con la cifra delle centinaia e quella delle unità tra loro uguali.

Per \overline{ABC} ci basta scegliere le 3 cifre da un insieme di 10, mettere la cifra più alta al posto delle decine e ordinare poi le altre due cifre in uno dei due modi possibili: $\binom{10}{3} \cdot 2 = 240$. Così facendo, però, abbiamo contato anche numeri del tipo $\overline{0BC}$. Sostituendo lo

0 con la cifra C avremo anche tutti i numeri del tipo \overline{ABA} . La risposta è 240.

5. A CACCIA DELLA FURIA BUIA [5091]

(Santina de Monte)



Tracciamo la diagonale AC e sia AH l'altezza mandata da A sulla base DC .

Osserviamo che applicando più volte il Teorema di Pitagora abbiamo:

$$AE^2 = AC^2 - EC^2 = AC^2 - AD^2 = AH^2 + HC^2 - (AH^2 + DH^2) =$$

$$= HC^2 - DH^2 = 5,4^2 - 1,8^2 = 25,92 \text{ km}^2$$

$$AE = \sqrt{25,92 \cdot 1000} \text{ m} = \sqrt{2592} \cdot 100 = 3600\sqrt{2} \cong 5091 \text{ m}.$$

6. UN INCONTRO DECISIVO [51]

(Simona Pieri)

Abbiamo 4 numeri congrui a 1 modulo 3 e solo 3 congrui a 0 e a 2. Non occupiamoci per il momento dei multipli di 3. Gli altri 7 numeri dovranno essere necessariamente ordinati (indicati per congruenza) 1121212. I numeri congrui a 0 possiamo metterli ovunque, anche ripetuti, basta che non sia al primo posto.

La probabilità cercata è quindi: $P = \frac{4! \cdot 3! \cdot C_{7,3}^* \cdot 3!}{10!} = \frac{4! \cdot 3! \cdot 84 \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{50}$.

La risposta richiesta è $1 + 50 = 51$

7. IL CIMENTO DELLA FIAMMA [674]

(Matteo Salicandro)

Scrivendo un polinomio con coefficienti tutti uguali a 6 e utilizzando solamente le potenze pari possiamo ottenere tutti i multipli di 6. Il multiplo di 6 più vicino a 2026 è $2028 = 338 \cdot 6$. Possiamo costruire il polinomio $p(x) = 6x^{674} + 6x^{672} + \dots + 6x^2 + 2x + 6$ che realizza quanto richiesto con il minimo grado possibile.

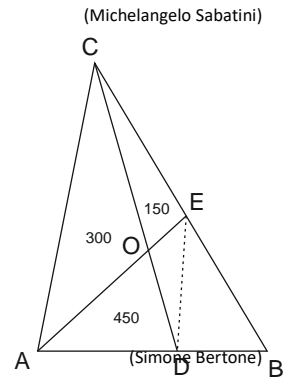
8. RIPARARE LA CODA [3600]

Tracciamo il segmento DE . Possiamo determinare subito l'area del triangolo DOE : $\frac{A_{DOE}}{A_{ADO}} = \frac{A_{COE}}{A_{AOC}}$ da cui

otteniamo $A_{DOE} = 225 \text{ cm}^2$. Ora, detta $x = A_{DEB}$ osserviamo che $\frac{A_{ACD}}{A_{DCB}} = \frac{A_{AEB}}{A_{EBD}}$. Sostituendo i valori noti

otteniamo: $\frac{750}{375+x} = \frac{675}{x}$ equazione che risolta porta a determinare $x = 3375 \text{ cm}^2$.

Il quadrilatero $ODBE$ ha area $A_{ODBE} = 225 + 3375 = 3600 \text{ cm}^2$.



9. A CACCIA DEL NIDO [1210]

Supponiamo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcoliamo il polinomio nel valore indicato:

$p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = a(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 + b(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + c(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + d$. Osserviamo che il secondo termine genera il termine $2\sqrt{6}$. Non compaiono altre $\sqrt{6}$ da altre parti, quindi $b = 0$.

$p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = a(2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) + c(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + d$. Per la stessa ragione anche $d = 0$ non essendoci termini interi.

$a(11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}) + c(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$, quindi $\begin{cases} 11a + c = 0 \\ 9a + c = 2 \end{cases}$ da cui segue $a = -1$ e $c = 11$. $p(x) = -x^3 + 11x$.

Il valore richiesto è $p(-11) = 11^3 - 11^2 = 1331 - 121 = 1210$.

10. IL BIZIPPO [15]

(Lorenzo Mazza)

Il problema è equivalente a trovare il più grande n per cui $\frac{n(n+1)}{2(n+5)}$ è un numero intero. Riscrivendo la frazione in maniera diversa

con un po' di furbizia, oppure eseguendo la divisione tra i due polinomi: $\frac{1}{2} \frac{n^2 + 5n - 5n + n}{n+5} = \frac{1}{2} n + \frac{-2n - 10 + 10}{n+5} = \frac{1}{2} n - 2 + \frac{10}{n+5}$.

$n+5$ è un divisore di 10 nel caso n sia pari, $n+5$ è un divisore di 20 nel caso n sia dispari

Il valore più grande si ottiene per $n = 15$.

11. A SELLA DI DRAGO [5467]

(Matteo Salicandro)

Limitiamoci a calcolare la somma delle prime 1000 parentesi: $(1+0+0-0) + (1+0+0-1) + (1+0+0-2) + \dots + (1+9+9-9)$.

Osserviamo che le cifre compaiono in ugual numero nella posizione delle decine e delle unità e quindi la loro somma è 0. Nella posizione delle migliaia abbiamo sempre 1 mentre in quella delle centinaia compaiono tutte le cifre, ciascuna 100 volte. La somma vale $1000 + 45 \cdot 100 = 5500$.

Calcoliamo ora la somma delle ultime 27 parentesi: $(2+0+0-0) + (2+0+0-1) + (2+0+0-2) + \dots + (2+0+2-6)$.

$27 \cdot 2 = 54$ per le migliaia, 0 per le centinaia, $1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 = 24$ per le decine e infine $45 + 45 + 21 = 111$ per le unità.

La soluzione richiesta è $5500 + 54 + 24 - 111 = 5467$.

12. CONOSCERE I DRAGHI [35]

(Claudia Manotti)

L'angolo al centro che si forma utilizzando una delle corde percorse dal drago e i due raggi della circonferenza, misura $180^\circ - 10^\circ = 170^\circ$. Il numero di corde n che servono per costruire il percorso che parte dalla tana e, riflettendosi sulla circonferenza lo riporta alla tana sono tante quante $170^\circ \cdot n = 360^\circ \cdot k$, cioè $17n = 36k$ con k intero. Essendo 17 primo, avremo $n = 36$. La risposta richiesta è 35 in quanto non dobbiamo considerare l'ultimo rimbalzo, visto che il drago rientra nella tana.

13. UN GIRO SUL DRAGO [1049]

(Michelangelo Sabatini)

Risolviamo il problema in maniera generale. Siano v_1 e v_2 le due velocità in gioco, e sia s la lunghezza del percorso.

Nel primo giro abbiamo che $s = v_1 \frac{t_1}{2} + v_2 \frac{t_1}{2}$ da cui otteniamo $t_1 = \frac{2s}{v_1 + v_2}$.

Nel secondo giro abbiamo $t_2 = \frac{\frac{s}{v_1}}{2} + \frac{\frac{s}{v_2}}{2} = \frac{s}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) = \frac{s}{2} \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}$.

Il rapporto richiesto è $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{2s}{v_1 + v_2}}{\frac{s}{2} \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}} = \frac{4v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2}$.

Nel caso del nostro problema abbiamo $\frac{t_1}{t_2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 26}{(20 + 26)^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 26}{46^2} = \frac{20 \cdot 26}{23^2} = \frac{520}{529}$.

La soluzione richiesta è $520 + 529 = 1049$.

L'area cercata vale $A_{FCHG} = \frac{(7+28) \cdot 12}{2} = 210 \text{ m}^2$

18. TUTTI IN GROPPA A UN DRAGO [3236]

(Santina de Monte)

Utilizzando le formule di Viète su $f(x)$ abbiamo: $rst=1$; $rs+rt+st=b$ e $r+s+t=-a$

Calcoliamo i coefficienti di $g(x)$: $p=-r^2s^2t^2=-(rst)^2=-1$; $n=r^2s^2+r^2t^2+s^2t^2=(rs+rt+st)^2-2rst(r+s+t)=b^2+2a$;

$m=-(r^2+s^2+t^2)=-r^2-s^2-t^2=-(r+s+t)^2+2(rs+rt+st)=-a^2+2b$.

Abbiamo quindi $g(x)=x^3+(-a^2+2b)x^2+(b^2+2a)x-1$. Per la condizione assegnata

$g(-1)=-1-a^2+2b-b^2-2a-1=-5$ da cui possiamo scrivere $(a+1)^2+(b-1)^2=5$.

L'ultima equazione rappresenta una circonferenza che ha il valore massimo per $b=1+\sqrt{5} \cong 3,236$.

Il risultato richiesto è 3236.

19. IL COLPO DECISIVO [169]

(Simona Pieri)

Prima soluzione

Tracciamo la circonferenza circoscritta al triangolo ABC e sia E il punto di intersezione tra la circonferenza e la retta CD . $ABEC$ è ciclico e quindi

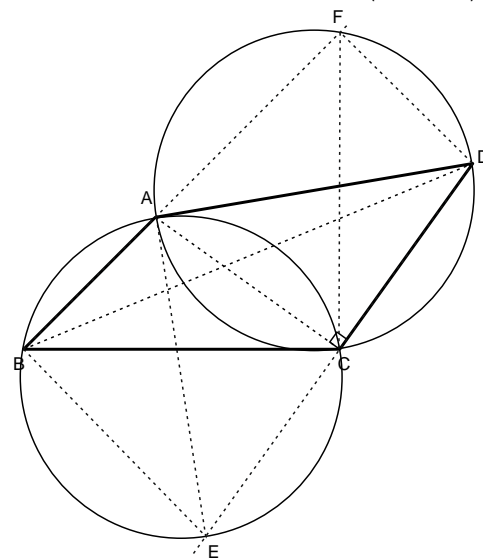
$\widehat{AEC} = \widehat{ABC} = 45^\circ$. Allora anche $\widehat{EAC} = 45^\circ$ e quindi AE è il diametro della circonferenza, $\widehat{ABE} = 90^\circ$ e, siccome AED è isoscele, $AE = AD$.

Tracciamo ora la circonferenza circoscritta al triangolo ACD e sia F l'intersezione tra la circonferenza e la retta AB . Ragionando come prima abbiamo che BCF è un triangolo rettangolo isoscele.

ABE e AFD sono due triangoli rettangoli congruenti. Infatti $AE = AD$ e $\widehat{BEA} = \widehat{CFA} = 90^\circ - \widehat{ACF} = 90^\circ - \widehat{ADF} = \widehat{FAD}$.

Quindi $FD = AB = 100 \text{ m}$ e quindi:

$$BC = \frac{BF}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{260^2 - 100^2}}{\sqrt{2}} = \frac{240}{\sqrt{2}} = 120\sqrt{2} \text{ m} \cong 169,704 \text{ m}.$$



Seconda soluzione

Sia $AB = a$, sia $BD = b$, sia $AC = CD = x$ e sia $\widehat{ACB} = \alpha$.

Dalle informazioni sul problema abbiamo $AD = x\sqrt{2}$ e $\widehat{BAC} = 135^\circ - \alpha$.

Per il Teorema del coseno applicato al triangolo ABD abbiamo

$$b^2 = a^2 + 2x^2 + 2\sqrt{2}ax \cos \alpha \text{ da cui otteniamo } \cos \alpha = \frac{b^2 - a^2 - 2x^2}{2\sqrt{2}ax}.$$

Per il Teorema dei seni applicato al triangolo ABC abbiamo

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ da cui otteniamo } \sin \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2x}.$$

Per il Teorema del coseno applicato al triangolo ABC abbiamo:

$BC^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos(135^\circ - \alpha)$ che possiamo scrivere

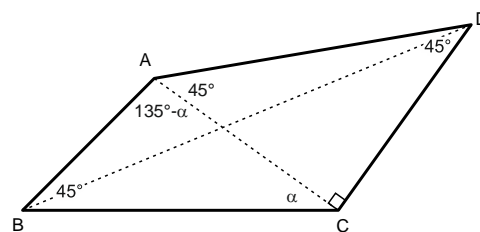
$$BC^2 = a^2 + x^2 - 2ax \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right)$$

$BC^2 = a^2 + x^2 + \sqrt{2}ax(\cos \alpha - \sin \alpha)$. Sostituendo quanto abbiamo ricavato prima otteniamo

$$BC^2 = a^2 + x^2 + \sqrt{2}ax \left(\frac{b^2 - a^2 - 2x^2}{2\sqrt{2}ax} - \frac{a\sqrt{2}}{2x} \right)$$

$$BC^2 = \cancel{a^2} + \cancel{x^2} + \frac{b^2 - a^2 - 2x^2}{2} - \cancel{a^2}$$

$$BC^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} \text{ da cui abbiamo } BC = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \text{ che nel nostro caso vale } BC = \sqrt{\frac{260^2 - 100^2}{2}} = 120\sqrt{2} \text{ m} \cong 169,704 \text{ m}.$$



Terza soluzione

Tracciamo le perpendicolari a BC sia da A che da D e siano H e K i piedi di tali perpendicolari.

Sia $\alpha = \widehat{CDK}$. Per costruzione risulta $\widehat{HCA} = \alpha$. Siccome $AC = CD$, i due triangoli ACH e CKD risultano congruenti.

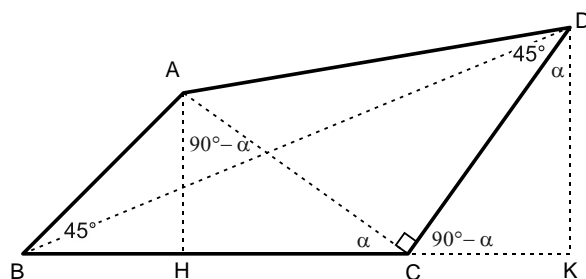
Sia $HC = DK = x$. Siccome $AH = BH = CK = 50\sqrt{2}$, possiamo utilizzare il Teorema di Pitagora sul triangolo BDK :

$$BK^2 + DK^2 = BD^2$$

$$(100\sqrt{2} + x)^2 + x^2 = 260^2 \text{ che ci porta all'equazione di secondo grado}$$

$$x^2 + 100\sqrt{2}x - 23800 = 0 \text{ che ha come unica soluzione accettabile } x = 70\sqrt{2}.$$

$$BC = 120\sqrt{2} \text{ m} \cong 169,704 \text{ m}$$



20. UN LIETO FINE [117]

(Simona Pieri)

Si tratta di calcolare $\frac{18!}{3!} \bmod 9 \cdot 19$, cioè $\frac{18 \cdot 17!}{6} \bmod 9 \cdot 19$ e quindi $9 \cdot \frac{17!}{3} \bmod 9 \cdot 19$. Ci basta calcolare quindi $\frac{17!}{3} \bmod 19$ e moltiplicare il risultato per 9. Per il Teorema di Wilson $18! \bmod 19 \equiv -1$. Siccome $18! = 18 \cdot 17! \equiv_{19} -1 \cdot 17!$, ne segue che $17! \equiv_{19} 1$.

L'ultima fatica è determinare $\frac{1}{3} \bmod 19$ che è l'inverso moltiplicativo di 3 modulo 19, cioè quel numero k tale che $3k \equiv 1 \bmod 19$ che si determina facilmente in $k = -6$ o meglio $k = 13$.

La soluzione cercata è $13 \cdot 9 = 117$.

21. QUESTA È LA NUOVA BERK [3402]

(Sandro Campigotto)

Dividiamo due casi.

Non utilizziamo la cifra "0".

Una volta scelti 5 numeri su 9 disponibili, guardiamo dove possiamo posizionare i due più grandi. Supponiamo di aver scelto $1-2-3-4-5$. Se posizioniamo $\square \square 4 \square 5 \square$ o viceversa, abbiamo $2 \cdot 3!$ possibilità visto che qualunque scelta rispetta i vincoli.

Se invece posizioniamo $\square 4 \square 5 \square \square \square$ allora nella quarta casella dovrà andare necessariamente il "3" e ci restano 2 possibilità di ordinare le ultime due cifre.

Anche se posizioniamo $\square \square \square 5 \square 4$ avremo 2 sole possibilità di concludere. $16 \cdot \binom{9}{5}$ numeri possibili.

Utilizziamo la cifra "0".

Una volta scelti i 4 numeri mancanti su 9 disponibili vediamo come il ragionamento precedente deve essere modificato.

Supponiamo di aver scelto $0-2-3-4-5$. Se posizioniamo $\square \square 4 \square 5 \square$, non potendo mettere lo "0" in prima posizione ci rimangono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilità. Se invece posizioniamo $\square 4 \square 5 \square \square \square$ ci rimangono le 2 possibilità di concludere. Posizionando

$\square \square \square 5 \square 4$ avremo 1 sola possibilità per chiudere il numero. In totale $(8 + 2 + 1) \cdot \binom{9}{4}$ numeri possibili.

Abbiamo $16 \cdot \binom{9}{5} + 11 \cdot \binom{9}{4} = 27 \cdot \binom{9}{4} = 27 \cdot 126 = 3402$ numeri possibili.