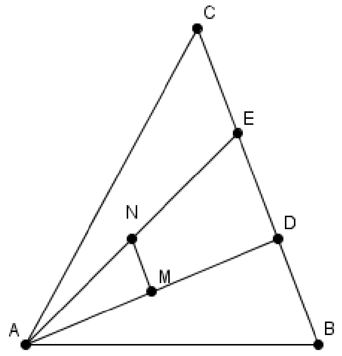
BELMANTO 2025 - SOLUZIONI



1.- L'area del triangolo ABC , posto $A\hat{B}C = \beta$, è esprimibile così:

$[ABC] = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot sin\beta = 130 \cdot \frac{150}{2} \cdot sin\beta = 9750 sin\beta$ (1)

Dall'inverso del teorema di Talete segue che *MN* è parallelo a *BC* e quindi $[AMN] = \frac{1}{4} \cdot [ADE]$; $[DENM] = \frac{3}{4} \cdot [ADE]$.

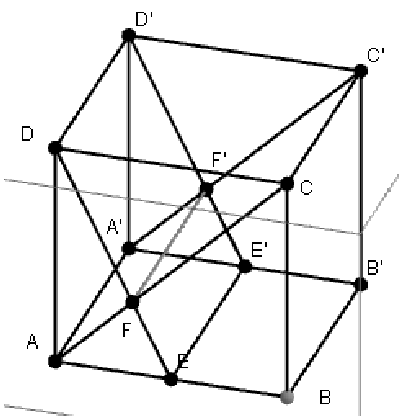
Ma $[ADE] = \frac{1}{3} \cdot [ABC]$ e allora

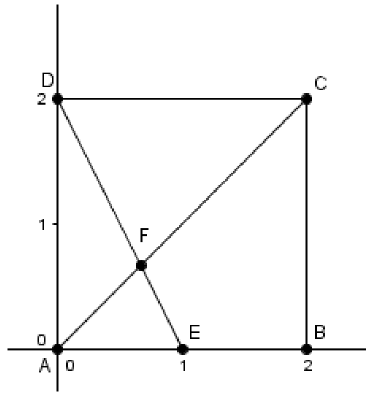
$[DENM] = \frac{1}{4} \cdot [ABC]$; $[ABC] = 4 \cdot [DENM] = 4 \cdot 2250 = 9000$ (2)

Da (1) e (2) segue: $sin\beta = \frac{[ABC]}{9750} = \frac{12}{13}$, cioè: $cos\beta = 5/13$, essendo β acuto.

Allora, per il teorema di Carnot:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot cos\beta = 24400$. Quindi: $AC^2/4 = 6100$. Risposta **6100**.





2.- Di fatto il problema è di geometria analitica piana. Se poniamo:

$A(0,0)$; $B(2,0)$; $C(2,2)$; $D(0,2)$; $E(1,0)$

allora $DE: y = 2 - 2x$; $AC: y = x$ quindi $F(2/3, 2/3)$. Lo spigolo del cubo vale 2 e

Volume cubo = 8

Volume prisma = $[AEF] \cdot EE' = 2/3$

La probabilità richiesta è

$$p = \frac{Volume\ prisma}{Volume\ cubo} = \frac{1}{12}$$

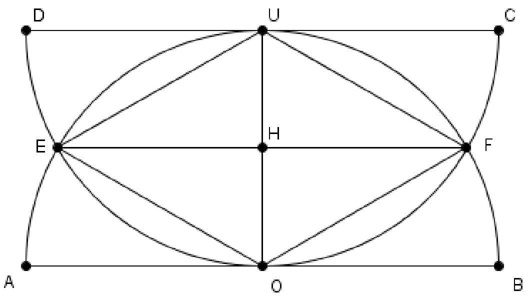
Risposta 1+12 = **13**.

3.- Valore iniziale: *a*

Valore calcolato il 1° febbraio: $a - \frac{x}{100}a = a\left(1 - \frac{x}{100}\right)$

Valore calcolato il 2 febbraio: $a\left(1 - \frac{x}{100}\right) + a\left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{x}{100} = a\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{91}{100}a$.

Da cui: $x^2 = 900$; $x = 30$. Risposta **30**.



4.- Per ragioni di simmetria *UH* = *HO* e i triangoli *EOU*, *FOU* sono equilateri, con *O* e *U* centri delle due semicirconferenze di raggio *r* =10 che si incontrano in *E*, *F*. Allora le aree dei settori circolari *EAO*, *FOB* valgono entrambe $\pi r^2/12$ e l'area del triangolo *EFO* vale $r^2\sqrt{3}/4$.

L'area del segmento circolare *EUF* sarà: $S = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{2\pi r^2}{12} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$

L'area richiesta vale $2S \cong 122{,}835$. Risposta **122**.

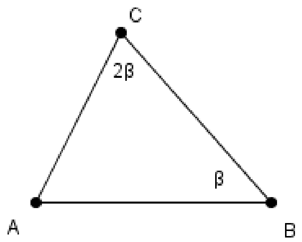
5.- Usiamo la seguente tabella:

	giocatore 1	*giocatore 2*	*giocatore 3*
capitale iniziale	*x*	*y*	*z*
capitale dopo la I partita	*x – y – z*	*2y*	*2z*
capitale dopo la II partita	*2(x – y – z)*	*- x + 3y – z*	*4z*
capitale dopo la III partita	*4(x – y – z)*	*-2x + 6y – 2z*	*- x – y +7z*

I capitali dopo la III partita sono tutti pari a 24. Pertanto:

$$\begin{cases} 4(x - y - z) = 24 \\ -2x + 6y - 2z = 24 \\ -x - y + 7z = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 39 \\ y = 21 \\ z = 12 \end{cases}$$

Infine: $x^2 + y^2 + z^2 = 2106$. Risposta **2106**.



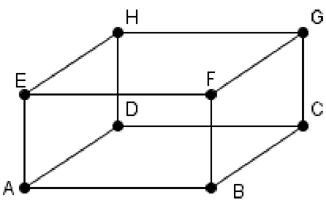
6.- Poniamo:
$AC = x, BC = x+1, AB = x+2, A\hat{B}C = \beta, A\hat{C}B = 2\beta$
$x \in \boldsymbol{N} - \{0\}; 0 < \beta < 60°$.
L'area del triangolo è: $[ABC] = 1/2(x+1)(x+2)sin\beta$
Per il teorema di Carnot:
$x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 - 2(x+1)(x+2)cos\beta \rightarrow x+5 = 2(x+2)cos\beta$
Per il teorema dei seni: $\frac{x+2}{sin2\beta} = \frac{x}{sin\beta} \rightarrow x+2 = 2xcos\beta.$
Dalle ultime due equazioni,dividendo membro a membro, segue: $x = 4, x+1 = 5, x+2 = 6; cos\beta = 3/4.$
Quindi: $sin\beta = \sqrt{7}/4$, $[ABC] = 15\sqrt{7}/4 \rightarrow [ABC]^2 = 98{,}4375$. Risposta **98**.

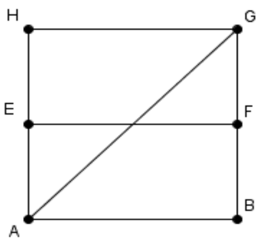
7.- Siano x, y, z i numeri rispettivi di: bambini, donne, uomini e m_x, m_y, m_z le loro rispettive età medie. Detta m l'età media di tutti i partecipanti, risulta: $m = (m_x \cdot x + m_y \cdot y + m_z \cdot z)/(x+y+z)$.
Sostituiamo i dati del quesito e otteniamo: $18 = (8x + 36y + 40z)/(x+y+z)$, con $y = 4z$. Segue:
$\begin{cases} 5x = 9y + 11z \\ y = 4z \end{cases} \rightarrow \frac{x}{z} = \frac{47}{5}$. Quindi: 47 + 5 = 52. Risposta **52**.

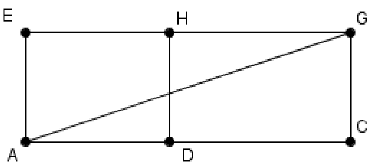
8.- $s = p(1) = 24 + (-1)^{2025} + 27 + (2023 - 2025)^2 = 54$
I divisori interi positivi di s sono: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.
La somma richiesta è: 1+2+3+6+9+18+27+54=120. Risposta **120**.

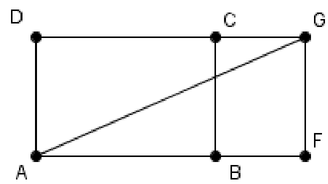
9.- Sia a il numero intero fissato, compreso tra 1 e 90 estremi inclusi. Considero gli eventi:
E_1 : a non appare nella 1ª estrazione, E_2 : a non appare nella 2ª estrazione, … , E_n : a non appare nella n-esima estrazione.
Gli eventi E_1 , E_2 , … , E_n sono indipendenti e risulta: $p(E_1) = p(E_2) = p(E_n) = 1 - 5/90 = 17/18$.
Allora: $p(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = (17/18)^n$.
Considero ora l'evento E : a appare almeno una volta in n estrazioni. Allora $p(E) = 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^n = p$.
Se $p \geq 919/5832$ allora $1 - \left(\frac{17}{18}\right)^n \geq \frac{919}{5832} \rightarrow \left(\frac{17}{18}\right)^n \leq \frac{4913}{5832} = \left(\frac{17}{18}\right)^3 \rightarrow n \geq 3$. Risposta **3**.

10.- Conviene sviluppare il solido su un piano. Per risolvere il quesito sono possibili tre percorsi:
a) considero le facce $ABFE$ e $EFGH$: allora $AG^2 = d^2 = AB^2 + BG^2 = 60^2 + 70^2 = 8500$
b) considero le facce $ADHE$ e $DCGH$: allora $AG^2 = d^2 = AC^2 + CG^2 = 100^2 + 30^2 = 10900$
c) considero le facce $ABCD$ e $BFGC$: allora $AG^2 = d^2 = AF^2 + FG^2 = 90^2 + 40^2 = 9700$









Il percorso più breve è quello in a). Quindi $d^2/2 = 4250$. Risposta **4250**.

11.- Chiamiamo a,b,c le radici del polinomio. Considerando l'identità
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$
e portando il polinomio nella forma
$$3\left(x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{28}{3}\right)$$
si ha che la somma $a+b+c$ delle radici, pari all'opposto del coefficiente di x^2, è 2/3; mentre $ab+bc+ac$, dato dal coefficiente di x, è -11/3. Inoltre il prodotto delle radici, corrispondente all'opposto del termine noto è 28/3. La quantità richiesta si calcola quindi come
$$(a+b+c)((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)) + 3abc = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9} + \frac{33}{3}\right) + 28 = \frac{962}{27}$$

che va moltiplicato per 81, dando la risposta **2886**.

12.- Contando i pedoni presenti sia per righe che per colonne abbiamo l'uguaglianza:

$$3 \cdot 21n = 0 + 1 + \cdots + n - k = \frac{n(n+1)}{2} - k$$

dove k indica il valore che viene saltato.
Distinguiamo due casi:

- n dispari: k è multiplo di n, ma è anche non superiore a n, quindi può essere solo 0 oppure n, da cui $3 \cdot 21n = \frac{n(n+1)}{2}$ oppure $(3 \cdot 21 + 1)n = \frac{n(n+1)}{2}$, da cui $n = 125$ oppure $n = 127$
- n pari, $n=2m$: k è multiplo di m, $63n = 126m = m(2m+1) - k$

quindi $k = n/2 = m$, che produce la soluzione $n=126$. La risposta è quindi **378**.

13.- Osservando la somma dei termini in progressione geometrica di ragione 1/5, incasserà la somma:
$S = 1492(1 + 5^{-1} + 5^{-2} + 5^{-3} + \cdots + 5^{-2025}) \cong 1492 \cdot \frac{1}{1-5^{-1}} \cong 1865$€. Risposta **1865**.

14.- L'equazione è scrivibile come: $2x^2 - 11xy + 5y^2 + 220 = 0$, che, vista come equazione di secondo grado in x, impone che $81y^2 - 1760 = n^2$, n intero; cioè $(9y + n)(9y - n) = 1760 = 2^5 \cdot 5 \cdot 11$. Il sistema

$$\begin{cases} 9y + n = a \\ 9y - n = b \end{cases}$$

ha soluzione $(y,n) = ((a+b)/18, (a-b)/2)$; a e b devono essere multipli di 2. Esaminando i casi possibili, si arriva alle soluzioni $(x,y)=(8,6), (25,6), (31,7), (25,49)$ (e alle loro opposte). La somma richiesta quindi è: $(14+31+38+74) \cdot 2 = 314$. Risposta **314**.

15.- Ricordando la formula per il numero di divisori di un numero, data la sua fattorizzazione, è necessario che $43^3 \cdot a^3$, con a minimo, abbia 64 divisori, ovvero che a^3 ne abbia 16.
Questo si realizza, ad esempio, per $a = 2 \cdot 3$ ed è anche il minimo. Quindi la risposta è $43 \cdot 6 \quad = \mathbf{258}$.

16.- Osserviamo che $4051 \cos\theta + 8205300 \sin\theta = \sqrt{4051^2 + 8205300^2} \sin(\theta + a)$, per la formula dell'angolo aggiunto. Il suo massimo è quindi $\sqrt{4051^2 + 8205300^2} + 42 = 8205343$, le cui ultime 4 cifre sono 5343. La risposta è **5343**.
Per il calcolo della radice suggeriamo di osservare che $4051 = 2026^2 - 2025^2$ e di considerare la struttura della terna pitagorica associata: $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$.

17.- Osserviamo innanzitutto che $m=0$, dato che la condizione $m \equiv 3 \ (mod\ 9)$ non è compatibile con $m \equiv 6 \ (mod\ 45)$, dato che implica $m \equiv 6 \ (mod\ 9), m \equiv 6 \ (mod\ 5)$.
La prima e la seconda condizione su n sono invece equivalenti alla terza condizione, quindi è sufficiente risolvere $\begin{cases} n \equiv 17 \ (mod\ 55) \\ n \equiv 28 \ (mod\ 49) \end{cases}$
Scriviamo $n = 55A + 49B$, da cui $49B \equiv 17 \ (mod\ 55)$, cioè $-6B \equiv 17 \ (mod\ 55)$, quindi si ha che $B \equiv 17 \cdot 9 \equiv 43 \ (mod\ 55)$, quindi possiamo prendere $B = 43$. La seconda condizione diventa invece $55A \equiv 28 \ (mod\ 49)$, cioè $6A \equiv 28 \leftrightarrow -A \equiv 28 (mod\ 49)$ quindi possiamo prendere $A = 21$. Si ha quindi che $n \equiv 3262 \ (mod\ 2695)$. Il valore di n richiesto è quindi $3262 - 2695 = 567$. Risposta **567**.

18.- Si ha
$11^{2^{11}} - 1 = \left(11^{2^{10}} + 1\right)\left(11^{2^9} + 1\right) \cdot \cdots \cdot (11 + 1) \cdot (11 - 1) = 2^a(2b + 1)$.
Dato che, per $m \geq 1$, $11^{2^m} + 1$ è divisibile per 2, ma non per 4, si ha che $a = 13$, quindi

$$11^{2^{11}} = 2^{14}b + 2^{13} + 1 \equiv 8193 \ (mod\ 2^{14})$$

La risposta è **8193**.

19.- Osserviamo innanzitutto che $p(1)+\ p(2)+\cdots+p(9)=45$, $p(10)+\ p(11)+\cdots+p(19)=46$. Ragionando analogamente per i numeri tra 20 e 99 e sommando, si ha

$$p(1)+\ p(2)+\cdots+p(99)=46(1+\cdots+9)+45=45\cdot 47.$$

Aggiungendo ai numeri sopra la cifra delle centinaia, si ottiene

$$45\cdot 47(1+1+\cdots+9)=45\cdot 46\cdot 47.$$

Resta da aggiungere il contributo dei numeri in cui la sola cifra non nulla è quella delle centinaia (100, 200, …, 900), ottenendo

$$p(1)+\ p(2)+\cdots+p(999)=45\cdot(46\cdot 47+1).$$

Osservando che

$$p(1)+\ p(2)+\cdots+p(999)=p(1001)+\ p(1002)+\cdots+p(1999),$$

che

$$p(2000)+\ p(2001)+\cdots+p(2019)+(p(2020)+\cdots+p(2025))=2\cdot 2\cdot 46+4\cdot 16=248$$

e aggiungendo il contributo di $p(1000)$, otteniamo che la quantità richiesta è data dalle ultime 4 cifre del numero $2\cdot 45\cdot(46\cdot 47+1)+249$, quindi la risposta è **4919**.

20.- Per vincere, bisogna lasciare all'avversario una tavoletta quadrata: in questo modo, al passaggio successivo, dovrà necessariamente lasciare un rettangolo. Questo rettangolo può essere ridotto ad un quadrato, da lasciare all'avversario. In questo modo l'avversario perde.
Andrea mangia quindi 5022-2025=2997 colonne. Risposta **2997**.

quesito	**risposta**
1	**6100**
2	**13**
3	**30**
4	**122**
5	**2106**
6	**98**
7	**52**
8	**120**
9	**3**
10	**4250**
11	**2886**
12	**378**
13	**1865**
14	**314**
15	**258**
16	**5343**
17	**567**
18	**8193**
19	**4919**
20	**2997**