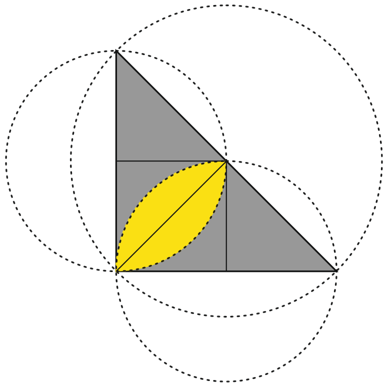
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (11/11/2024)

PROBLEMA 1 [1980]

Nel corso del 21° secolo, solo il $2025 = 45^2$ è un quadrato. Salvatore è nato nel $2025 - 45 = 1980$.

PROBLEMA 2 [57]



Come si può notare nella figura a fianco, l'area incognita, evidenziata in giallo, è ottenibile calcolando l'area di un settore circolare di raggio 10 cm, sottraendogli l'area di un triangolo rettangolo isoscele di cateti di 10 cm e raddoppiando il tutto:

$$A = 2\left(\frac{\pi 10^2}{4} - \frac{10^2}{2}\right) = 50\pi - 100 = 50\left(\pi - 2\right) \cong 57{,}08\text{ cm}^2$$

PROBLEMA 3 [867]

Osserviamo bene la prima equazione:

$2x^2 + y^2 + z^2 = 2xy + 2xz$, cioè

$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 = 0$ e quindi

$(x-y)^2 + (x-z)^2 = 0$

Da cui otteniamo che le uniche soluzioni si hanno quando $x = y = z$.

Dalla seconda equazione abbiamo

$7x + 11x + 13x = 527$, cioè $x = 17$

ed infine $k = 3x^2 = 3 \cdot 17^2 = 867$.

PROBLEMA 4 [3250]

Intanto $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Ora $\displaystyle\sum_{d|2016} \frac{1}{d} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2016} = \frac{\sum_{d|2016} d}{2016} = \frac{\left(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5\right)\left(1+3+3^2\right)\left(1+7\right)}{2016} = \frac{63 \cdot 13 \cdot 8}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7} = \frac{13}{4}$.

La risposta richiesta è $1000 \cdot \dfrac{13}{4} = 3250$.

PROBLEMA 5 [36]

Siano a, $a+k$, $a+2k$, $a+3k$, $a+4k$ e $a+5k$ i sei numeri in progressione aritmetica di ragione $k \neq 0$.

Affinché valga la seconda affermazione, deve accadere che $\left(a+2k\right)^2 = a(a+5k)$. Semplifichiamo quest'ultima equazione: $\cancel{a^2} + 4k^2 + 4ak = \cancel{a^2} + 5ak$

$a\cancel{k} = 4k^{\cancel{2}}$ cioè $a = 4k$.

La successione è quindi $4k$, $5k$, $6k$, $7k$, $8k$ e $9k$ la cui somma vale $39k$ e quindi $k = 9$.

Il più piccolo è $4k = 36$.

PROBLEMA 6 [34]

$a^3 + b^3 = 65$ possiamo leggerlo $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 5 \cdot 13$.

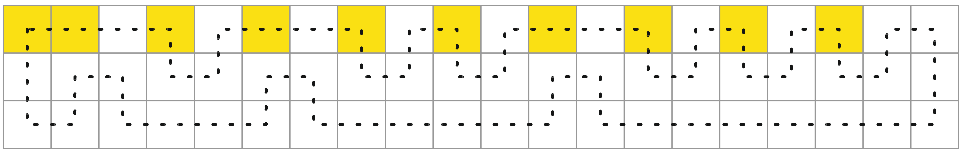
Siccome $a^2 - ab + b^2$ è sempre positivo dobbiamo valutare le seguenti possibilità alla ricerca di soluzioni intere:

$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2-ab+b^2=65 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=65 \\ a^2-ab+b^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2-ab+b^2=13 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=13 \\ a^2-ab+b^2=5 \end{cases}$

Il primo sistema non ha soluzioni intere, il secondo e il quarto sono impossibili. Solo il terzo ha per soluzioni $(1;4)$ e $(4;1)$.

La soluzione richiesta è $2\left(4^2 + 1^2\right) = 34$

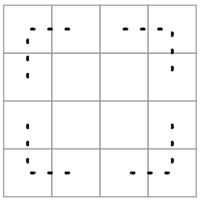
PROBLEMA 7 [1024]
Proviamo, prima di tutto a disegnare una soluzione valida.



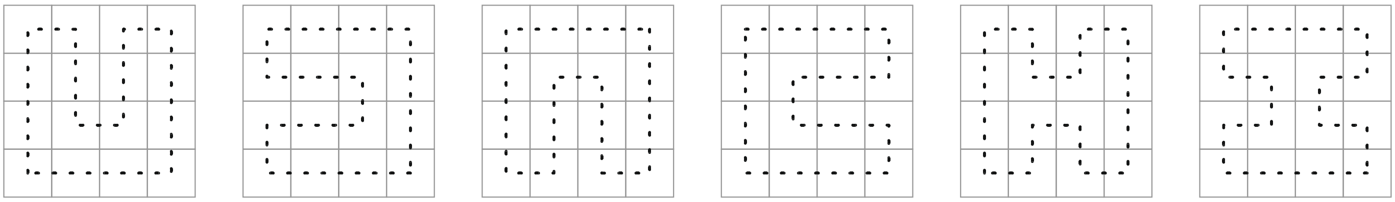
Le uniche caselle in cui la pulce può effettuare una scelta sono solo la prima (decide se andare a destra o in basso) e in ciascun'altra casella gialla, in cui può solo decidere se continuare diritta o fare una U fino a tornare sulla prima riga. Ogni altra scelta impedisce al percorso di chiudersi.

Siccome tutte le scelte sono binarie, vi sono $2^{10} = 1024$ possibili percorsi diversi.

PROBLEMA 8 [12]



Notiamo subito che i salti della pulce nelle caselle d'angolo sono obbligati (entrando da una parte deve uscirene dall'altra. L'unica libertà ci rimane su come raggiungere le caselle del centro e il verso di percorrenza.
Il centro può essere descritto con una U entrando ed uscendo dallo stesso lato e attraversando tutte e 4 le caselle o con due U entrando ed uscendo da un lato e facendo la stessa cosa da quello opposto.
In definitiva abbiamo solo le seguenti configurazioni:



Ciascuna può percorsa nei due sensi, per un totale di 12 possibili percorsi.

PROBLEMA 9 [2520]

La risposta corretta è $\frac{7!}{2} = 2520$ perché in metà delle permutazioni dei 7 test, quello di velocità precede quello di resistenza al sonno, mentre nell'altra metà sono in ordine invertito.

PROBLEMA 10 [3440]

Il numero di permutazioni degli 8 test che soddisfano le condizioni richieste è $\binom{8}{3} \cdot 2 \cdot 5! = 13440$, Infatti, scelte le 3 posizioni dei test (test di velocità, test di resistenza al sonno e test di resistenza al lavoro notturno), quello di velocità va la primo posto, gli altri possono essere messi in modo indifferente. I restanti 5 possono essere permutati in tutti i modi nelle caselle rimaste.

PROBLEMA 11 [40]
Siano a , b e c i lati del triangolo relativi alle altezze 63 , 28 e 27 .
Abbiamo che $2A = 63a = 28b = 27c$.
Sia x la distanza da calcolare. Abbiamo che $xa + 4b + 6c = 2A$
Ricavando dalla prima e sostituendo nella seconda si ottiene

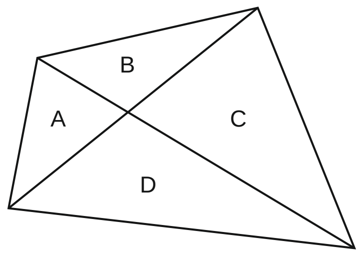
$$x\frac{\cancel{2A}}{63} + 4\frac{\cancel{2A}}{28} + 6\frac{\cancel{2A}}{27} = \cancel{2A}$$

da cui $\frac{x}{63} = 1 - \frac{4}{28} - \frac{6}{27}$.
Eseguendo i calcoli:

$$\frac{x}{63} = \frac{40}{63}$$

da cui $x = 40$.

PROBLEMA 12 [700]



Sappiamo che

$$\begin{cases} AC = BD \\ A+B = B+C = 525 \quad \text{e quindi } A = C \\ D+C = A+D = 1050 \end{cases}$$

Il sistema si riduce a

$$\begin{cases} A^2 = BD \\ A+B = 525 \\ A+D = 1050 \end{cases}$$

, ricavando B e D dalla seconda e dalla terza equazione e sostituendo nella prima si otteniene $A^2 = (525-A)(1050-A)$, equazione che risolta porta a determinare $A = 350$ e di conseguenza $B = 175$ e $D = 700$.

PROBLEMA 13 [3276]

Si tratta di scegliere x_1 salti di ampiezza 1, x_2 salti di ampiezza $\sqrt{2}$ e x_3 salti di ampiezza π. Siccome i tre valori sono tra loro incommensurabili, non vi sarà alcun punto raggiungibile con combinazioni di salti diverse. Si tratta ora di risolvere $x_1 + x_2 + x_3 \leq 25$ che ha $\binom{25+3}{25} = 3276$ soluzioni possibili (infatti è equivalente a $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$).

PROBLEMA 14 [1002]

Se x sono i salti di lunghezza $\frac{1}{7}$, y quelli di lunghezza $\frac{1}{11}$ e z quelli di lunghezza $\frac{1}{13}$ l'equazione che descrive la distanza raggiunta è $\frac{1}{7}x + \frac{1}{11}y + \frac{1}{13}z = d$ che possiamo anche scrivere, facendo il minimo comun denominatore $\frac{11\cdot 13x + 7\cdot 13y + 7\cdot 11z}{1001} = d$. La minima distanza sarà quindi $\frac{1}{1001}$ in quanto d dovrà avere denominatore pari al minimo comun denominatore appena calcolato e a numeratore il più piccolo numero ottenibile come combinazione lineare di $11\cdot 13x + 7\cdot 13y + 7\cdot 11z$. Siccome i tre numeri che compongono l'equazione sono primi tra loro, il più piccolo sarà certamente 1.

La soluzione richiesta è $1 + 1001 = 1002$

PROBLEMA 15 [112]

Siccome n ha 12 divisori, la sua scomposizione può essere dei seguenti tipi:

$n = p_1^{11}$, $n = p_1^{5} \cdot p_2$, o $n = p_1^{2} \cdot p_2 \cdot p_3$. Il terzo è il nostro caso, infatti se fosse del primo tipo il suo quadrato $n^2 = p_1^{22}$ avrebbe 23 divisori, se fosse del secondo tipo $n^2 = p_1^{10} \cdot p_2^{2}$ ne avrebbe 33.

Solo $n^2 = p_1^{4} \cdot p_2^{2} \cdot p_3^{2}$ ne ha 45.

$n^3 = p_1^{6} \cdot p_2^{3} \cdot p_3^{3}$ ha $7\cdot 4\cdot 4 = 112$ divisori.

PROBLEMA 16 [5202]

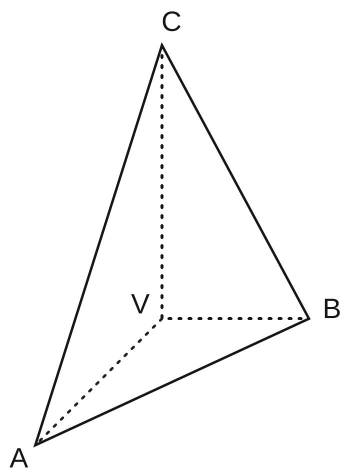
Siano $AV = a$, $BV = b$ e $CV = c$.

Abbiamo che $R = \sqrt[3]{\frac{ab}{2}\cdot\frac{bc}{2}\cdot\frac{ac}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(abc)^2}$. Siccome $V = \frac{abc}{6}$

$R = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(abc)^2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{36V^2}$.

Per aiutarci nei calcoli, scomponiamo in fattori primi: $176868 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17^3$.

$$R = \frac{1}{2}\sqrt[3]{36V^2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{36\cdot(2^2\cdot 3^2\cdot 17^3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^6\cdot 3^6\cdot 17^6} = \frac{2^2\cdot 3^2\cdot 17^2}{2} = 2\cdot 3^2\cdot 17^2 = 5202.$$



PROBLEMA 17 [8816]

Devo scegliere su quale delle colonne e su quale delle righe mettere le tre torri, lo posso fare in $\binom{8}{3}^2$ modi. Nella prima delle colonne scelte ho 3 possibili scelte (per una delle tre righe selezionate), nella seconda me ne rimangono 2 e sono obbligato nell'ultima.

In totale $\binom{8}{3}^2 \cdot 3! = 18816$ modi possibili.

PROBLEMA 18 [1092]

Sia h l'altezza del prisma. La misura delle basi è $\frac{312}{h}$, $\frac{325}{h}$ e $\frac{91}{h}$.

Esprimiamo l'area della base per mezzo della formula di Erone:

$84 = \sqrt{\frac{364}{h} \cdot \frac{52}{h} \cdot \frac{39}{h} \cdot \frac{273}{h}}$ che possiamo anche riscrivere:

$84h^2 = \sqrt{2^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^2 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13}$

cioè $84h^2 = \sqrt{2^4 \cdot 7^2 \cdot 13^4 \cdot 3^2}$ e quindi $84h^2 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 3$ da cui otteniamo $h^2 = 13^2$ cioè $h = 13$.

Il volume è semplicemente $V = 84 \cdot 13 = 1092$.

PROBLEMA 19 [38]

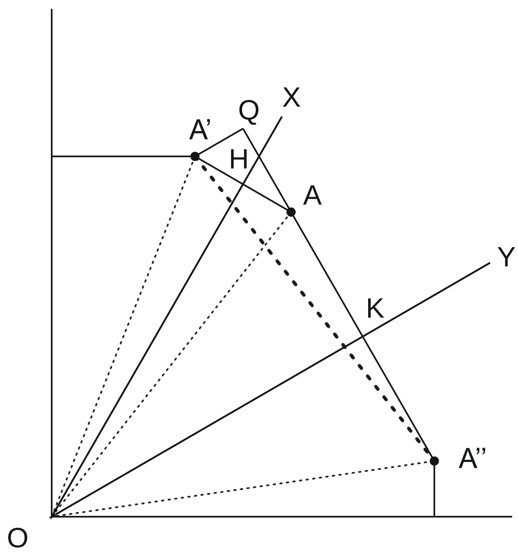
Rappresentiamo la situazione graficamente e immaginiamo di riflettere l'angolo sia rispetto ad una semiretta che all'altra.

Il perimetro minimo risulta essere la lunghezza del segmento $A'A''$.

Del triangolo $A'AA''$ conosciamo due lati, $AA' = 10\sqrt{3}$ e $AA'' = 22$. L'angolo tra essi compreso vale $150°$ visto che $OHA = AKO = 90°$.

Costruendo il triangolo rettangolo $AA'Q$ ($30° - 60° - 90°$) prolungando il lato AA'' otteniamo in triangolo rettangolo $A'QA''$ di lati $A'Q = 5\sqrt{3}$ e $A''Q = 22 + 15 = 37$.

$A'A'' = \sqrt{37^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1444} = 38$ la misura del perimetro minimo cercata.



PROBLEMA 20 [176]

Immaginiamo di avere le due sequenze BA da qualche parte nella parola:

$-------BA-----BA------$. Cosa possiamo fare con le restanti A e B per non creare altre coppie BA?. Negli spazi tra le due sequenze scritte possiamo inserire solamente gruppi di A seguiti da gruppi di B. Se a_1, a_2 e a_3 sono il numero di A utilizzate nei tre spazi e analogamente b_1, b_2 e b_3, dovrà accadere che $a_1 + a_2 + a_3 = 2022$ e $b_1 + b_2 + b_3 = 2022$ e quindi

$$\binom{2024}{2022}^2 = \left(\frac{2024 \cdot 2023}{2}\right)^2 = (1012 \cdot 2023)^2 = ...0176$$

dove nell'ultimo calcolo ci siamo limitati a calcolare le ultime 4 cifre del risultato.