Olimpiadi Italiane di Matematica – XLI edizione

Cesenatico, 9 maggio 2025

1. Per ogni intero positivo n, indichiamo con $s(n)$ la somma delle cifre di n nell'usuale rappresentazione in base 10. Ad esempio, $s(7) = 7$ e $s(10654) = 16$.

   (a) Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $n = 225 \cdot s(n)$.

   (b) Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $n = 225 \cdot s(n)^2$.

2. Determinare per quali valori *interi* di a l'insieme degli *interi* x che soddisfano la disuguaglianza
$$10x^2 + a \leq 33x$$
è costituito da esattamente un elemento.

3. Dato un intero positivo n, sia $p(n)$ il numero di primi distinti che dividono n. Ad esempio, $p(12) = 2$ e $p(120) = 3$. Un intero n si dice *bilanciato* se $p(n)$ è pari, e *sbilanciato* se $p(n)$ è dispari.

   Dimostrare che esistono infinite coppie di interi positivi *consecutivi* che sono entrambi bilanciati oppure entrambi sbilanciati.

4. Un insieme S si dice *annoso* se è costituito da 2025 numeri reali positivi (distinti). Per ogni insieme annoso S, indichiamo con $d(S)$ il numero di potenze di 2, con esponenti interi positivi *distinti*, che si possono scrivere come somma di due elementi *distinti* di S.

   Determinare il massimo di $d(S)$ al variare di S tra tutti gli insiemi annosi.

5. Sia ABC un triangolo e sia D il piede della bisettrice uscente da A. L'asse del segmento AD interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in E ed F, con E e B che stanno da parti opposte rispetto alla retta AD. Sia G l'intersezione tra BE e DF, e sia H l'intersezione tra CF e DE.

   Dimostrare che le rette GH e BC sono parallele.

6. Siano α e β due angoli di ampiezza positiva e minore di $90°$. Una *formica alfabetaria* è un essere che avanza in linea retta sul piano. La formica è estremamente pesante, per cui non può essere spostata da un posto all'altro. Può solo essere ruotata in modo che rimanga nello stesso punto, ma sia orientata in una diversa direzione del piano. Possiamo scegliere noi i punti in cui avviene la rotazione (che possono essere tanti quanti ne vogliamo) e la nuova direzione in cui disporla in ciascuno di essi, ma questa è l'unica operazione concessa.

   Quando viene ruotata, la formica si ferma un istante, e può decidere di mantenere la nuova direzione in cui è stata disposta, oppure di girare ulteriormente di α in senso orario, o di β in senso antiorario; poi riprende la sua marcia. Se la formica ripassa per un punto in cui è stata ruotata in precedenza, se ne accorge, si spaventa, si ferma e non procede più.

   Dimostrare che per ogni valore ammissibile di α e β è sempre possibile fermare una formica alfabetaria con un numero finito di rotazioni.

Problema 1 – Soluzione.

Domanda (a) Il più piccolo n con la proprietà richiesta è 2025.

Infatti dall'equazione segue che n è multiplo di 225, dunque in particolare multiplo di 9. La somma delle cifre dei numeri multipli di 9 è a sua volta multipla di 9. Ne segue che $s(n)$ è multiplo di 9, e quindi n è multiplo di $225 \cdot 9 = 2025$. Poiché già 2025 verifica la proprietà, si conclude che è proprio il minimo n che la verifica.

Domanda (b) Il più piccolo n con la proprietà richiesta è 72 900.

Infatti come prima deduciamo che $s(n)$ è multiplo di 9, e di conseguenza ora n deve essere multiplo di $225 \cdot 81 = 18\,225$, che però non verifica l'equazione. Ne segue che $s(n)$ non può essere uguale a 9, e la possibilità successiva è $s(n) = 18$, da cui $n = 225 \cdot 18^2 = 72\,900$, che verifica la proprietà richiesta (e di conseguenza è il minimo intero positivo che la verifica).

Osservazione In entrambi i casi si può dimostrare che 2025 e 72 900 sono gli unici numeri che verificano la proprietà. Per farlo serve una qualche disuguaglianza che dica che da un certo punto in poi n supera il prodotto a destra dell'uguale, per cui alla fine restano da testare un numero finito di casi. Più precisamente,

- nel primo caso si può dimostrare che $n > 225 \cdot s(n)$ per ogni intero $n \geq 10\,000$, per cui è sufficiente testare i primi quattro multipli di 2025;
- nel secondo caso si può dimostrare che $n > 225 \cdot s(n)^2$ per ogni intero $n \geq 1\,000\,000$. Inoltre, possiamo riscrivere l'equazione come

$$n = (15 \cdot s(n))^2.$$

  Poiché a destra dell'uguale abbiamo un quadrato perfetto, ogni possibile soluzione è della forma $n = (15 \cdot 9 \cdot h)^2$ con $15 \cdot 9 \cdot h \leq 1000$. È quindi sufficiente testare i valori interi di h che verificano questa disuguaglianza, e cioè quelli fino a 7.

Problema 2 – Soluzione.

Gli unici valori di a per cui la disequazione ha un'unica soluzione intera sono 24, 25, 26.

Per dimostrarlo, scriviamo la disequazione nella forma

$$p(x) = x(33 - 10x) \geq a.$$

Osserviamo ora che il polinomio $p(x)$ assume valori negativi o nulli quando $x \leq 0$ oppure $x \geq 4$, e quindi, al variare di x negli interi, i valori più grandi che assume il polinomio sono $p(1) = 23$, $p(2) = 26$ e $p(3) = 9$. Di conseguenza

- se $a \geq 27$ non ci sono soluzioni intere,
- se $a \leq 23$ ci sono almeno due soluzioni intere, e cioè $x = 1$ e $x = 2$,
- per $a = 24, 25, 26$ l'unica soluzione intera è $x = 2$.

Soluzione alternativa Riscriviamo per comodità la disequazione nella forma

$$10x^2 - 33x + a \leq 0.$$

Si tratta di una classica disequazione di secondo grado nella variabile x. Il polinomio di secondo grado ha discriminante

$$\Delta = 33^2 - 40a = 1089 - 40a.$$

Se $\Delta < 0$ la disequazione non ha nemmeno soluzioni reali.

Se $\Delta \geq 0$ le soluzioni reali sono tutti e soli i numeri reali compresi tra le due radici x_1 e x_2, che sono

$$x_1 = \frac{33 - \sqrt{\Delta}}{20} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{33 + \sqrt{\Delta}}{20}.$$

Si tratta quindi di un intervallo centrato in $33/20$. L'intero più vicino al centro è $x = 2$, il quale appartiene all'intervallo se e solo se $\sqrt{\Delta} \geq 7$. Il secondo intero più vicino al centro è $x = 1$, il quale appartiene all'intervallo se e solo se $\sqrt{\Delta} \geq 13$. Di conseguenza, nell'intervallo cade un solo intero, e dunque esiste un unico x intero che soddisfa la disequazione (che poi è $x = 2$), se e solo se $7 \leq \sqrt{\Delta} < 13$, e cioè se e solo se (si noti che la disuguaglianza di sinistra implica automaticamente che il discriminante è positivo, dunque la sua radice è ben definita)

$$49 \leq 1089 - 40a < 169.$$

Dalla disuguaglianza di sinistra deduciamo che $a \leq 1040/40 = 26$, mentre da quella di destra deduciamo che $a > 920/40 = 23$, e cioè $a \geq 24$.

Problema 3 – Soluzione.

Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa, cioè che esista solo un numero finito di coppie di interi positivi consecutivi che sono entrambi bilanciati oppure entrambi sbilanciati. Questo vorrebbe dire che da un certo punto in poi gli interi saranno alternativamente bilanciati e sbilanciati, il che si traduce in due possibilità:

- da un certo punto in poi tutti i pari sono bilanciati e tutti i dispari sono sbilanciati,
- da un certo punto in poi tutti i pari sono sbilanciati e tutti i dispari sono bilanciati.

Tuttavia entrambe le opzioni non possono realizzarsi, dal momento che tutte le potenze di 2 e tutte le potenze di 3 sono sbilanciate, però le prime sono pari e le seconde sono dispari.

Soluzione alternativa. Osserviamo che ogni numero primo è sbilanciato. Si presentano due casi:

1. per infiniti numeri primi dispari p, almeno uno fra $p-1$ e $p+1$ è sbilanciato: allora abbiamo trovato infinite coppie di numeri sbilanciati, della forma $(p-1, p)$ oppure $(p, p+1)$, e quindi abbiamo finito.

2. per ogni numero primo p sufficientemente grande, sia $p-1$ che $p+1$ sono bilanciati. In tal caso, consideriamo la coppia (p^2-1, p^2). Il numero p^2 è sbilanciato, perché è divisibile per un unico numero primo, cioè p. Affermiamo che il numero $p^2-1 = (p-1)(p+1)$ è anch'esso sbilanciato. Per dimostrare questo fatto, osserviamo innanzitutto che l'insieme dei divisori primi di $(p-1)(p+1)$ è dato dall'unione dell'insieme D_- dei divisori primi di $p-1$ e dell'insieme D_+ di quelli di $p+1$. Per ipotesi sappiamo che D_- e D_+ contengono un numero pari di elementi.

   L'unico elemento in comune fra D_- e D_+ è il primo 2: è chiaro che 2 divide sia $p-1$, sia $p+1$, e viceversa, se un primo q divide sia $p-1$ sia $p+1$, allora deve dividere la loro differenza $2 = (p+1)-(p-1)$, e quindi $q = 2$. Ne segue che l'insieme dei divisori primi di p^2-1, cioè l'unione di D_+ e D_-, ha cardinalità pari a $|D_+| + |D_-| - 1$, dove il -1 è dovuto al fatto di non contare due volte il primo 2. Siccome $|D_+|$ e $|D_-|$ sono pari, questa quantità è dispari, come voluto.

   Abbiamo allora costruito infinite coppie di numeri consecutivi sbilanciate, ovvero quelle della forma (p^2-1, p^2), e anche in questo caso la tesi è dimostrata.

Problema 4 – Soluzione.

Il massimo valore possibile per $d(S)$ è 2024.

Stima dal basso Mostrando che esiste un insieme S annoso da sui si possono ottenere 2024 potenze di 2 distinte sommando coppie di elementi.

Consideriamo infatti l'insieme S costituito dai numeri

$$1, \qquad 2^2-1, \qquad 2^3-1, \qquad 2^4-1, \qquad \ldots, \qquad 2^{2025}-1.$$

Si tratta di 2025 numeri reali positivi distinti, ed è evidente che tutte le 2024 potenze da 2^2 fino a 2^{2025} possono essere espresse come somma di due elementi distinti di S (più precisamente, la potenza 2^k è la somma di 1 e 2^k-1 per ogni k che va da 2 a 2025).

Stima dall'alto Dimostriamo che $d(S) \leq 2024$ per ogni insieme annoso S, cioè che non è possibile scrivere 2025 o più potenze di 2 distinte come somma di due elementi distinti di un insieme S di 2025 numeri reali positivi. Per farlo, dimostriamo più in generale che, dato un qualunque insieme S costituito da n numeri reali positivi, non è possibile ottenere n potenze di 2 come somma di coppie di elementi di S.

Procediamo per induzione. Il caso $n=2$ è sostanzialmente banale, perché esiste una sola coppia di elementi di S e quindi si può realizzare al massimo una potenza di 2 prendendo la loro somma.

Supponiamo ora la tesi vera per un certo n e consideriamo un insieme S costituito da $n+1$ numeri reali positivi distinti. Supponiamo per assurdo che si possano scrivere $n+1$ potenze di 2 distinte come somma di coppie di elementi distinti di S. Tra queste potenze di 2, consideriamo le n che hanno gli esponenti minori. Vi sono allora due casi.

- Se esiste un elemento di S che non è mai stato utilizzato nelle coppie che hanno prodotto queste prime n potenze di 2, allora vuol dire che si possono produrre n potenze di 2 distinte a partire da un insieme con soli n elementi, il che però non è possibile per ipotesi induttiva.

- Se tutti gli elementi di S sono stati utilizzati in almeno una coppia per produrre le prime n potenze di 2, allora non è possibile produrre una nuova potenza di 2 maggiore di tutte le precedenti. Tale potenza di 2 sarebbe infatti maggiore della somma di tutte le prime n potenze (questo è un fatto generale: ogni potenza di 2 è maggiore della somma di tutte quelle che la precedono), quindi maggiore della somma di tutti gli elementi di S (che sono stati utilizzati almeno una volta per produrre le prime n potenze), e quindi di sicuro maggiore della somma di una qualunque coppia di elementi di S (che sono tutti positivi).

Approccio alternativo alla stima dall'alto Se $0 < a < b$ sono due numeri reali tali che

$$a+b=2^C,$$

allora necessariamente a deve essere più piccolo di metà della somma, e b deve essere più grande di metà della somma, oltre che minore della somma stessa, cioè

$$0 < a < 2^{C-1} < b < 2^C.$$

In particolare, se possiamo scrivere $m = d(S)$ potenze di 2 distinte con esponente intero

$$2^{C_1} < 2^{C_2} < \ldots < 2^{C_m},$$

allora gli elementi più grandi delle coppie che li realizzano sono m numeri tutti diversi, dal momento che gli intervalli $(2^{C_i-1}, 2^{C_i})$ sono tutti disgiunti quando i C_i sono interi.

Se fosse $m = 2025$, i 2025 elementi più grandi delle coppie esaurirebbero già tutto l'insieme S, e nessuno di questi potrebbe essere l'elemento più piccolo della coppia che realizza la potenza di 2 più piccola. Di conseguenza deve essere necessariamente $d(S) \leq 2024$.

Problema 5 – Soluzione.

Sia M il punto medio della bisettrice AD, sia K l'intersezione tra AC ed EF, e sia K' l'intersezione tra AB ed EF.

- Dimostriamo che i quadrilateri $EKHC$ e $FK'GB$ sono ciclici.

  Infatti, essendo ME l'asse di AD, avremo che $\angle DEM = \angle AEM$. Inoltre $\angle AEM = \angle AEF = \angle ACF$, in quanto insistono sullo stesso arco AF della circonferenza circoscritta ad ABC. Per transitività ne segue che $\angle HEK = \angle DEM = \angle HCK$, da cui la ciclicità del quadrilatero $EKHC$.

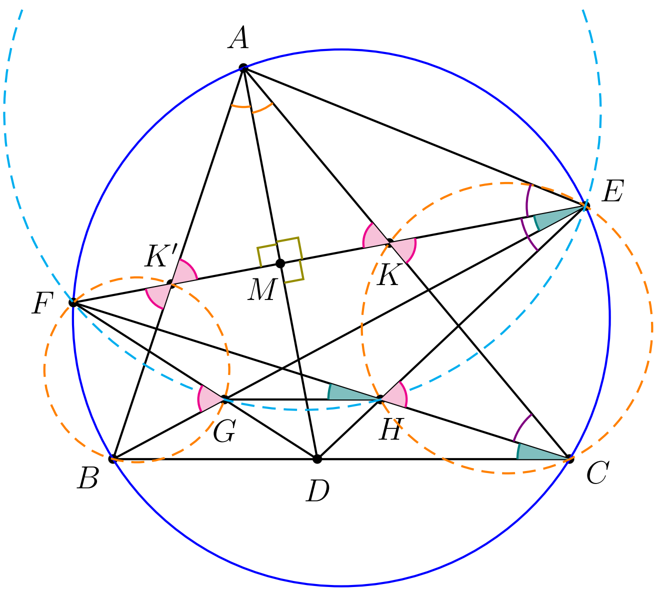
  La dimostrazione della ciclicità di $FK'GB$ è analoga.

- Dimostriamo che il quadrilatero $GHEF$ è ciclico.

  Per far questo ci basta dimostrare che $\angle EGF = \angle EHF$, il che è equivalente a dimostrare che i loro supplementari sono uguali, cioè $\angle FGB = \angle CHE$. Ora $\angle FGB$ è uguale a $\angle FK'B$ (per la ciclicità di $FK'GB$), il quale a sua volta è uguale a $AK'M$, in quanto opposti al vertice. Analogamente, $\angle CHE$ è uguale a $\angle CKE$, il quale a sua volta è uguale a $\angle MKA$. Ci basta dunque osservare che $AK'M$ è uguale a $\angle MKA$, dal momento che il triangolo $AK'K$ è isoscele sulla base KK' (essendo AM contemporaneamente altezza e bisettrice).

- Dimostriamo che le rette GH e BC sono parallele.

  Per far questo ci basta dimostrare che $\angle FCB = \angle FHG$. D'altra parte sappiamo che $\angle FCB = \angle FEB$, in quanto insistono sullo stesso arco FB della circonferenza circoscritta ad ABC, e $\angle FEB = \angle FEG = \angle FHG$ per la ciclità di $GHEF$, da cui l'uguaglianza richiesta segue per transitività.



Seconda soluzione Sia N l'ulteriore intersezione tra la bisettrice AD e la circonferenza circoscritta al triangolo ABC, sia I l'intersezione tra ED ed FN, e sia J l'intersezione tra FD ed EN.

- Dimostriamo che D è l'ortocentro del triangolo FNE, ed in particolare il quadrilatero $FIJE$ è ciclico (dal momento che i punti I e J vedono FE sotto un angolo retto).

  A tal fine, dal momento che NM è già perpendicolare per costruzione a FE, ci basta dimostrare che FJ è perpendicolare a EN, ed EI è perpendicolare a FN. Consideriamo i triangoli DJN e DMF. Gli angoli in D sono opposti al vertice. Inoltre $\angle DNJ = \angle AFE = \angle DFM$, dove la prima uguaglianza segue dal fatto che entrambi gli angoli insistono sullo stesso arco AE della circonferenza circoscritta ad ABC, e la seconda segue dal fatto che FM è asse di AD. Ma allora anche $\angle DJN = \angle DMF$, e quest'ultimo è retto.

  La dimostrazione che EI è perpendicolare a FN è del tutto analoga.

- Dimostriamo che $\angle GFH = \angle GEH$, da cui poi segue che il quadrilatero $GHEF$ è ciclico.

  A tal fine iniziamo osservando che

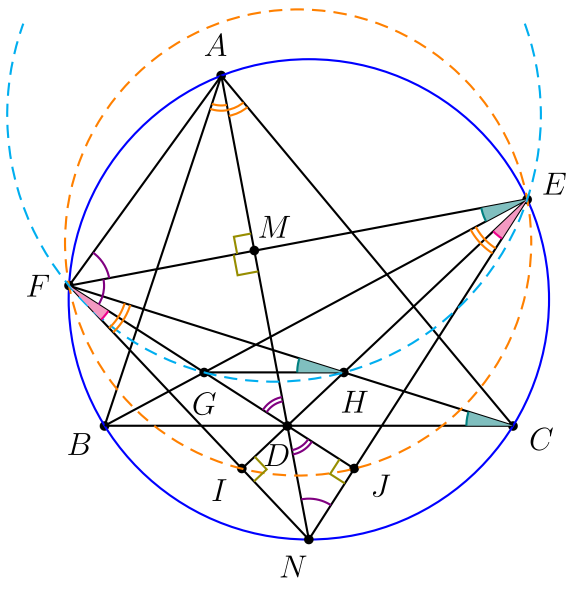
  $$\angle NFC = \angle NAC = \angle BAN = \angle BEN.$$

  Inoltre $\angle DEJ = \angle IFD$ per la ciclicità del quadrilatero $FIJE$. A questo punto per differenza di angoli uguali

  $$\angle GFH = \angle IFC - \angle IFD = \angle BEJ - \angle DEJ = \angle GEH,$$

  da cui la tesi.

- Una volta ottenuta la ciclicità del quadrilatero $GHEF$, il parallelismo tra GH e BC segue come nella prima soluzione.



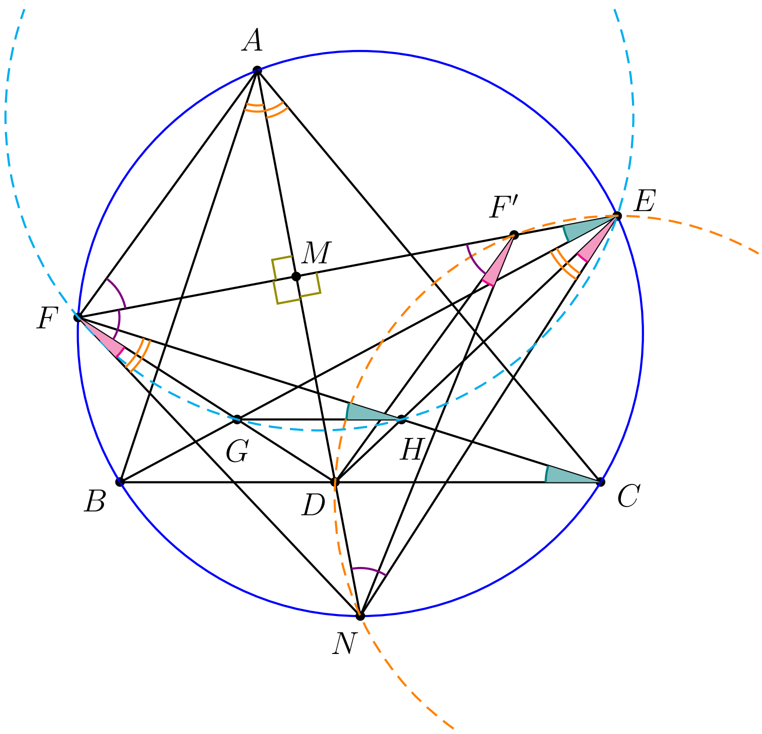
Terza soluzione Sia N l'ulteriore intersezione tra la bisettrice AD e la circonferenza circoscritta al triangolo ABC, e sia F' il simmetrico di F rispetto al punto medio M di AD (stiamo qui supponendo che $AB < AC$, ma l'altro caso è simmetrico).

- Dimostriamo che $\angle DNE = \angle MF'D$, da cui poi segue che il quadrilatero $ENDF'$ è ciclico.

  A tal fine basta osservare che $\angle DNE = \angle ANE = \angle AFE$ in quanto insistono sullo stesso arco AE della circonferenza circoscritta ad ABC. Inoltre $\angle AFE = \angle DFM$, poiché MF è l'asse di AD, e infine $\angle DFM = \angle MF'D$ per simmetria rispetto alla retta AN.

- Dimostriamo che $\angle DEN = \angle NFD$, da cui poi la dimostrazione prosegue come nella seconda soluzione.

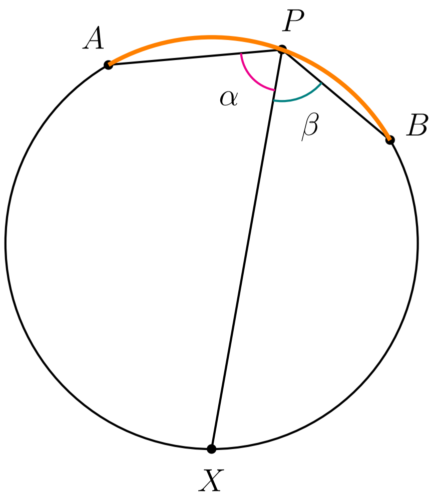
  A tal fine basta osservare che $\angle DEN = \angle DF'N$, grazie alla ciclicità del quadrilatero $ENDF'$, e $\angle DF'N = \angle NFD$ per il fatto che i triangoli NDF' e NDF sono simmetrici rispetto alla retta AN. A questo punto la tesi segue per transitività.



Problema 6 – Soluzione.

Consideriamo una circonferenza che contiene all'interno la posizione iniziale della formica. Su tale circonferenza consideriamo in senso antiorario tre punti A, X, B tali che il minore dei due archi XA sottenda archi alla circonferenza di ampiezza α e il minore dei due archi XB sottenda archi alla circonferenza di ampiezza β.

Supponiamo ora che la formica si trovi in un qualunque punto P dell'arco AB che non contiene X: se noi ruotiamo la formica in modo da puntare verso X, allora essa si dirigerà verso X, A, o B, a seconda che scelga di conservare la direzione imposta o ruotare ulteriormente. In questo senso diciamo che la terna di punti X, A, B *sistema* l'arco AB non contenente X.



Ora possiamo ruotare tale configurazione in modo che l'unione degli archi sistemati sia tutta la circonferenza. Otteniamo in questo modo un numero finito di punti $A_1, \ldots, A_n$, $X_1, \ldots, X_n$, $B_1, \ldots, B_n$ con la proprietà che da ogni punto della circonferenza possiamo sempre ruotare la formica in modo che, qualunque cosa decida di fare, finirà sempre in A_i, X_i, o B_i per un qualche indice i tra 1 ed n.

Dal momento che i punti sono $3n$, dopo al più $3n+1$ rotazioni almeno uno di essi sarà stato visitato due volte.

Osservazione Vale la pena notare che nella soluzione precedente il numero dei punti da costruire per fermare la formica aumenta man mano che α e β si avvicinano a $90°$.

Se invece almeno uno dei due angoli α e β è compreso tra $90°$ e $180°$, allora si può dimostrare che non è possibile fermare la formica senza la sua collaborazione. Infatti, supponendo senza perdita di generalità che la formica inizialmente si muova lungo la direzione positiva dell'asse x, dopo ogni rotazione la formica potrà sempre agire in modo che la sua direzione abbia una componente positiva rispetto all'asse x. Questo vuol dire che la sua coordinata x cresce con il tempo, impedendole di tornare sui suoi passi.

Casi speciali Per valori particolari di α e β esistono configurazioni speciali che permettono di fermare la formica. Qui sotto ne segnaliamo alcune.

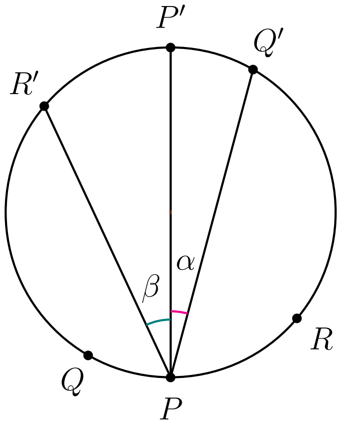
- Se $\alpha = \beta = 45°$, possiamo fermare la formica usando i vertici di un quadrato. Appena la formica arriva in un vertice, noi la ruotiamo verso il vertice opposto: qualunque cosa decida di fare, di dirigerà comunque verso uno dei restanti tre vertici.

- Se α e β sono $30°$ o $60°$, anche diversi l'uno dall'altro, possiamo fermare la formica usando i vertici di un esagono. Ancora una volta, appena la formica arriva in un vertice, noi la ruotiamo verso il vertice opposto, e se anche decide di ruotare ulteriormente finirà comunque per dirigersi verso uno dei restanti cinque vertici.

- Se α e β sono entrambi multipli di un qualche angolo la cui ampiezza è $1/n$ di $360°$, possiamo sempre fermare la formica utilizzando un poligono regolare di n lati, in analogia ai casi precedenti.

- Se $\alpha + \beta < 90°$, possiamo fermare la formica utilizzando sei punti disposti lungo una circonferenza come nella figura qui sotto, in cui i punti P', Q', R' sono i simmetrici di P, Q, R rispetto al centro della circonferenza. All'inizio la formica arriva in P, e noi la ruotiamo verso P'. Qualunque cosa decida, finirà comunque in uno dei tre punti P', Q', R'.

  A quel punto noi la orientiamo verso P e, analogamente a prima, finirà comunque in uno dei tre punti P, Q, R. Indipendentemente da dove è arrivata, la orientiamo nuovamente verso P', e ancora una volta finirà comunque in uno dei tre punti P', Q', R'. Visto che la formica deve sempre passare per uno di questi sei punti, dopo un po' uno si ripeterà.



Osserviamo che questa configurazione funziona solo se $\alpha + \beta < 90°$ perché questa condizione garantisce che i punti P', Q', R' stanno in una stessa semicirconferenza, opposta rispetto a quella in cui stanno P, Q, R, e questo a sua volta garantisce, per esempio, che $\angle QR'P = \alpha$ e $\angle PR'R = \beta$, cosa che serve per far funzionare il procedimento descritto sopra.