Olimpiadi Italiane della Matematica – XLII edizione

Cesenatico, 8 maggio 2026

1. Esistono tre tipi di monete denominate in dollari altairiani (DA), del valore di 3 DA, 5 DA e 7 DA. Andromeda vorrebbe comprare una merendina da una di quelle macchinette malefiche che non restituiscono resto. Con le monete che possiede, potrebbe acquistare una merendina da 29 DA, pagando però 32 DA, e non ha modo di farlo con meno. C'è una merendina da 24 DA: quanto deve spendere Andromeda, al minimo, per averla?

2. Un cono retto e cavo di cialda croccante è alto 10 cm. Vi si introduce una sfera di gelato, centrata in un punto O dell'asse del cono e tangente alla superficie laterale del cono lungo la circonferenza della base. Sia V il vertice del cono e K il punto di intersezione del segmento VO con la superficie della sfera. Dimostrare che la distanza VK fra il vertice del cono e la sfera è maggiore di 5 cm.

3. (a) Determinare tutte le coppie di interi positivi $n > m$ con la seguente proprietà: esiste un intero positivo a tale che il più **piccolo** numero primo che divide $n + a$ coincide con il più **piccolo** numero primo che divide $m + a$.

   (b) Determinare tutte le coppie di interi positivi $n > m$ con la seguente proprietà: esiste un intero positivo a tale che il più **piccolo** numero primo che divide $n + a$ coincide con il più **grande** numero primo che divide $m + a$.

4. Sia ABC un triangolo con $AC > AB$ e D il punto medio dell'arco BC della circonferenza circoscritta ad ABC non contenente A. La retta perpendicolare ad AD passante per B interseca la retta parallela ad AD passante per C nel punto E. La retta parallela ad AB passante per E interseca AC nel punto F.

   Dimostrare che l'angolo $\widehat{AFD}$ è retto.

5. Un insieme di numeri interi positivi S si dice *distanziato* se **non** contiene alcuna coppia di elementi la cui differenza sia uno dei numeri $5, 10, 12, 17$. Ad esempio, $\{1, 2, 3, 10, 30\}$ è distanziato, mentre $\{1, 2, 3, 11\}$ non lo è (perché $11 - 1 = 10$). Quanti elementi può avere, al massimo, un sottoinsieme distanziato di $\{1, 2, 3, \ldots, 2025, 2026\}$?

6. La banda "Mostly Harmless" è composta di nove musicisti che procedono in fila indiana. Inizialmente, la distanza fra ciascun musicista e il successivo è di un metro. Ad ogni colpo della grancassa, il primo della fila avanza di un metro. Poi, procedendo in ordine, dal secondo fino all'ottavo, ciascun musicista si dispone nel punto medio fra la posizione occupata da quello che lo precede e la posizione occupata da quello che lo segue. Infine, il nono, e ultimo, si porta un metro dietro all'ottavo. Dire se, dopo un numero sufficiente di colpi di grancassa, la fila supererà i 42 m di lunghezza.

Problema 1 – Soluzione.

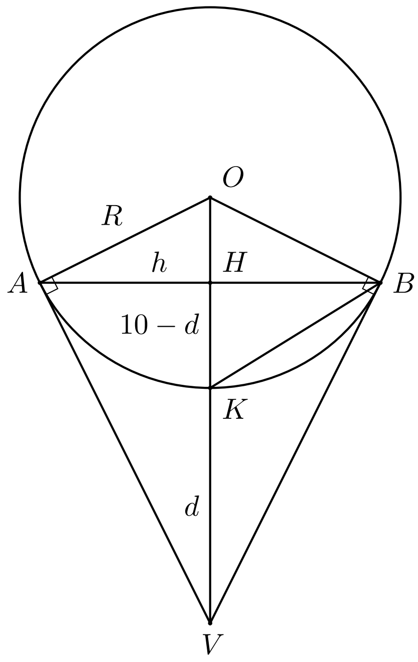
Andromeda deve spendere almeno 25 DA.

Dimostrazione. Andromeda può pagare 32 DA, ma non 29 DA. Quindi nella combinazione di monete che compone quei 32 DA non può trovarsi alcuna moneta da 3 DA; se così fosse, infatti, Andromeda potrebbe sottrarre questa moneta, restando con una combinazione da 29 DA. L'unico modo di ottenere 32 DA con sole monete da 5 DA e 7 DA è con cinque monete da 5 DA e una da 7 DA. Per controllare questo fatto, basta osservare che Andromeda può usare al massimo 4 monete da 7 DA, perché con 5 tali monete pagherebbe già 35 DA. Tolta la cifra che paga con monete da 7 DA, le resta quindi da pagare uno dei seguenti prezzi: 32 DA, 32 DA-7 DA=25 DA, 32 DA- 14 DA= 18 DA, 32 DA-21 DA=11, 32 DA-28 DA= 4 DA; l'unico di questi che è possibile pagare con sole monete da 5 DA è 25 DA.

Andromeda può quindi pagare la somma di 25 DAcon le cinque monete da 5 DA. Resta da escludere che Andromeda possa pagare i 24 DA esattamente. Supponiamo, per assurdo, che Andromeda abbia una combinazione da 24 DA. Questa combinazione non include tutte le monete da 5 DA di Andromeda, perché ne ha almeno cinque, e $5 \cdot 5 = 25 > 24$. Di conseguenza, avanza almeno una moneta da 5 DA. Aggiungendo questa moneta alla combinazione da 24 DA, però, Andromeda otterrebbe una combinazione da 29 DA, contraddicendo il fatto che ella non può pagare 29 DA esattamente.

Problema 2 – Soluzione.

Intersecando il solido descritto con un piano contenente l'asse del cono si ottiene la configurazione rappresentata nella figura seguente.



In questa figura, i segmenti VA e VB sono le due tangenti da V a una circonferenza di centro O. H e K sono le due intersezioni del segmento VO, rispettivamente, col segmento AB e con la circonferenza. L'altezza VH del triangolo isoscele ABV è lunga $10\,\text{cm}$. Si deve dimostrare che $\overline{VK} > 5\,\text{cm}$.

Prima soluzione. Osserviamo intanto che basta dimostrare $\overline{VK} > \overline{KH}$. Ne segue infatti, sommando $\overline{VK}$ ad ambo i membri, $2\,\overline{VK} > \overline{VK} + \overline{KH} = \overline{VH} = 10\,\text{cm}$. Siccome il triangolo AVB è isoscele, H è il punto medio di AB. Di conseguenza, HO è mediana del triangolo isoscele AOB, quindi VO è la bisetrice dell'angolo AOB, da cui segue che gli archi AK e KB, in cui K divide l'arco AKB, sono uguali. Gli angoli ABK e KBV sono uguali, in quanto angoli alla circonferenza che insistono su archi uguali, per cui BK è la bisettrice dell'angolo in B del triangolo rettangolo VBH. Di conseguenza, i segmenti VK e KH stanno, fra loro, nella medesima proporzione di VB e BH, che sono rispettivamente l'ipotenusa e un cateto di VBH. Ne segue che $\overline{VK} > \overline{KH}$.

Seconda soluzione. Esprimiamo tutte le lunghezze in centimetri e chiamiamo R il raggio della sfera, h la lunghezza del segmento AH e $d = \overline{KV}$ la distanza fra la sfera e il vertice del cono. Dal secondo teorema di Euclide, applicato al triangolo rettangolo VAO, otteniamo che $h^2 = \overline{OH} \cdot \overline{HV} = 10 \cdot \overline{OH}$ (infatti h è l'altezza relativa all'ipotenusa e OH, HV sono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa). Ne segue $\overline{OH} = h^2/10$. Dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo OHA otteniamo poi $R^2 = \overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + h^2 = h^4/100 + h^2$. La distanza d è data da

$\overline{OV} - \overline{OK} = (\overline{HV} + \overline{OH}) - R = \left(10 + \frac{h^2}{10}\right) - \sqrt{h^4/100 + h^2}$. Il problema chiede di dimostrare che questa distanza è maggiore di 5, ovvero che

$$\left(10 + \frac{h^2}{10}\right) - \sqrt{h^4/100 + h^2} > 5 \Leftrightarrow 5 + \frac{h^2}{10} > \sqrt{h^4/100 + h^2}.$$

Per confrontare queste quantità positive possiamo elevare al quadrato entrambi i lati, ottenendo la disuguaglianza

$$5^2 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{h^2}{10} + \frac{h^4}{100} > \frac{h^4}{100} + h^2,$$

che (dal momento che $2 \cdot 5 \cdot \frac{h^2}{10} = h^2$) si riscrive come

$$\frac{h^4}{100} + h^2 + 5^2 > \frac{h^4}{100} + h^2,$$

che è ovviamente vera.

Terza soluzione. Questa è una piccola variante della soluzione precedente, in cui evitiamo il teorema di Euclide e usiamo solo il teorema di Pitagora. Come sopra, esprimiamo tutte le lunghezze in centimetri e osserviamo che la domanda si riduce a dimostrare $d = \overline{VK} \geq 5\,\text{cm}$. È immediato osservare che i triangoli OHA, AHV e VAO sono rettangoli. Chiamiamo R il raggio della sfera, $h = \overline{AH}$, $x = \overline{OH}$ e d la distanza $\overline{VK}$. Applicando il teorema di Pitagora ai tre triangoli rettangoli considerati sopra otteniamo le relazioni

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = R^2 \\ 10^2 + h^2 = \overline{AV}^2 \\ R^2 + \overline{AV}^2 = (x+10)^2 \end{cases}$$

ed inoltre abbiamo $d = \overline{VK} = \overline{VH} + \overline{HO} - \overline{OK} = 10 + x - R$. Esprimiamo tutto in funzione di un solo parametro, ad esempio h. Sostituendo la prima e la seconda equazione nella terza troviamo

$$x^2 + h^2 + 10^2 + h^2 = x^2 + 20x + 10^2,$$

che ci dà $2h^2 = 20x$, e cioè $x = h^2/10$ (questo fatto segue anche dal teorema di Euclide, come visto nella seconda soluzione; essenzialmente, abbiamo ridimostrato il teorema di Euclide nel nostro caso particolare). Sostituendo nella prima equazione troviamo $R^2 = h^4/100 + h^2$, e quindi $d = 10 + h^2/10 - \sqrt{h^4/100 + h^2}$. Possiamo ora concludere come nella seconda soluzione.

Quarta soluzione. Lavoriamo in un sistema di coordinate cartesiane con origine in $V = (0,0)$ e con asse y perpendicolare ad AB. Esprimiamo tutte le lunghezze e le coordinate in centimetri. I punti A e B avranno coordinate $A = (-h, 10)$ e $B = (h, 10)$ per un qualche h. Il centro O si può trovare come l'intersezione della perpendicolare ad AV condotta da A e della perpendicolare a BV condotta da B. La retta AV ha equazione $y = -\frac{10}{h}x$; la sua perpendicolare passante per A è quindi la retta di equazione $y = \frac{h}{10}(x+h) + 10$ (si ricorda che i coefficienti angolari m, m' di due rette perpendicolari soddisfano $mm' = -1$). Similmente troviamo che la perpendicolare a VB passante per B ha equazione $y = -\frac{h}{10}(x-h)+10$. Per simmetria, l'intersezione O di queste due rette ha coordinata x uguale a 0, e quindi coordinata y uguale a $\frac{h^2}{10}+10$: si ha cioè $O = \left(0, \frac{h^2}{10}+10\right)$. Lo stesso risultato si può naturalmente trovare anche risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{h}{10}(x+h)+10 \\ y = -\frac{h}{10}(x-h)+10. \end{cases}$$

Il raggio della circonferenza si può ottenere come la distanza fra O e A, e cioè è dato da

$$R = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2} = \sqrt{(0-h)^2 + \left(\left(\frac{h^2}{10}+10\right)-10\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{h^4}{100}}.$$

Il punto K si trova sotto O ad una distanza pari ad R, e quindi le sue coordinate sono

$$K = \left(0, \frac{h^2}{10} + 10 - \sqrt{h^2 + \frac{h^4}{100}}\right).$$

Ci siamo quindi ricondotti a dimostrare che questo punto si trova ad un'altezza superiore a 5, ovvero che

$$\frac{h^2}{10} + 10 - \sqrt{h^2 + \frac{h^4}{100}} > 5,$$

disuguaglianza che si dimostra facilmente come nella seconda soluzione.

Quinta soluzione. Notiamo che $\overline{OK} = \overline{OA}$ in quanto raggi di una stessa circonferenza. Per il secondo teorema di Euclide, siccome $\overline{AH}$ è altezza nel triangolo rettangolo OAV, abbiamo $\overline{OH} \cdot \overline{OV} = \overline{OA}^2 = \overline{OK}^2$.

Per la disuguaglianza tra la media aritmetica e la media geometrica, abbiamo

$$\frac{\overline{OH} + \overline{OV}}{2} \geq \sqrt{\overline{OH} \cdot \overline{OV}} = \overline{OK}$$

Inoltre vale l'uguaglianza fra la medie solo se $\overline{OH} = \overline{OV}$, ma questo è impossibile perché H è interno alla circonferenza mentre V è esterno. Abbiamo quindi $\overline{OH} + \overline{OV} > 2\,\overline{OK}$. Sostituendo in questa disuguaglianza $\overline{OV} = \overline{OH} + \overline{HK} + \overline{KV}$ e $\overline{OK} = \overline{OH} + \overline{HK}$, otteniamo $\overline{OH} + \overline{OH} + \overline{HK} + \overline{KV} > 2\,\overline{OH} + 2\,\overline{HK}$, che semplificando dà $\overline{KV} > \overline{HK}$, da cui concludiamo come nella prima soluzione.

In alternativa, possiamo dimostrare la disuguaglianza $\overline{OH} + \overline{OV} > 2\overline{OK}$ come segue: eleviamo entrambi i membri al quadrato e otteniamo che è equivalente a $\overline{OH}^2 + 2\,\overline{OH} \cdot \overline{OV} + \overline{OV}^2 > 4\,\overline{OK}^2 = 4\,\overline{OH} \cdot \overline{OV}$, ossia $\overline{OH}^2 - 2\,\overline{OH} \cdot \overline{OV} + \overline{OV}^2 > 0$, che, essendo equivalente a $(\overline{OH} - \overline{OV})^2 > 0$, vale perché $\overline{OH} \neq \overline{OV}$.

Sesta soluzione. Chiamiamo α l'angolo $\widehat{AVO} = \widehat{OVB}$. I triangoli VAH e VAO sono rettangoli: il primo perché la tangente è sempre perpendicolare al raggio passante per il punto di tangenza, il secondo perché VH è l'altezza del triangolo AVB relativa al lato AB. Di conseguenza, poiché $\overline{VH} = 10\,\text{cm}$, si ha che

$$\begin{aligned}
&\overline{VA} = \overline{VB} = \frac{10\,\text{cm}}{\cos\alpha}, \\
&\overline{VO} = \frac{10\,\text{cm}}{\cos^2\alpha} \qquad \text{e} \\
&\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OK} = \frac{10\,\text{cm}}{\cos\alpha}\tan\alpha = \frac{10\,\text{cm}\ \sin\alpha}{\cos^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare

$$\overline{VK} = \overline{VO} - \overline{OK} = \left(\frac{10\,\text{cm}}{\cos^2\alpha} - \frac{10\,\text{cm}\ \sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{10\,\text{cm}\,(1-\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha} = \frac{10\,\text{cm}}{1+\sin\alpha}.$$

Ma, come è noto, $\sin\alpha < 1$ per ogni angolo acuto α, quindi

$$\frac{10\,\text{cm}}{1+\sin\alpha} > \frac{10\,\text{cm}}{2} = 5\,\text{cm}.$$

Problema 3 – Soluzione.

1. Le coppie volute sono tutte e sole quelle in cui n ed m hanno la stessa parità.

   La condizione è sufficiente. Se n, m hanno la stessa parità, è possibile scegliere un intero positivo a in modo che $n + a$ e $m + a$ siano entrambi pari (ad esempio, $a = 2$ se m, n sono entrambi pari e $a = 1$ se sono entrmabi dispari). In tal caso, il più piccolo fattore primo di $n + a$ e il più piccolo fattore primo di $m + a$ sono entrambi uguali a 2 (è chiaro che non ci possono essere fattori primi più piccoli), e quindi la coppia (n, m) ha la proprietà voluta.

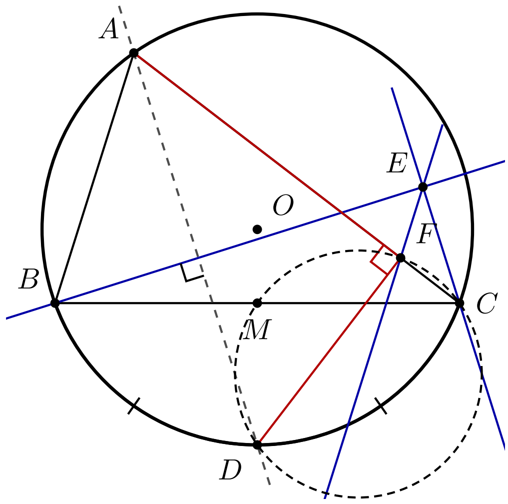
   La condizione è necessaria. Viceversa, se n, m sono di parità opposta, lo stesso vale per $n + a$ e $m + a$, per ogni intero positivo a. Tuttavia, questo vuol dire che il più piccolo fattore primo di uno dei due è 2, mentre il più piccolo fattore primo dell'altro è dispari e quindi diverso da 2. Questo mostra che la coppia (n, m) non soddisfa la condizione del testo.

2. Le coppie volute sono tutte e sole quelle per cui $n > m + 1$.

   La condizione è sufficiente. Sia p il più piccolo numero primo che divide la differenza $n - m$. Almeno un tale numero primo esiste, perché $n - m > 1$. Siano poi $p_1, p_2, \ldots, p_r$ gli eventuali numeri primi strettamente più piccoli di p. Scegliamo un intero positivo e sufficientemente grande da far sì che $p_1 p_2 \ldots p_r \cdot p^e$ sia strettamente maggiore di m, e poniamo $a = p_1 p_2 \ldots p_r \cdot p^e - m$, che è un intero positivo. Nel caso non ci siano primi inferiori a p (cioè nel caso $p = 2$), prendiamo semplicemente $a = 2^e - m$, con e sufficientemente grande da far sì che questo sia un intero positivo.
   Mostriamo che l'intero a così costruito soddisfa la condizione del testo. Da un lato, per costruzione abbiamo $m + a = p_1 p_2 \ldots p_r \cdot p^e$, il cui più grande fattore primo è p. Dall'altro, abbiamo $n + a = (m + a) + (n - m)$; affermiamo che questo numero è divisibile per p, ma non è divisibile per alcun primo più piccolo di p, e quindi il suo fattore primo più piccolo è proprio p, come voluto. Siccome p divide sia $m + a$, sia $n - m$ per definizione, sicuramente divide anche la loro somma $n + a$. D'altro canto, consideriamo un primo q minore di p (se non esiste un tale primo q, cioè se $p = 2$, abbiamo già finito). Per come abbiamo definito la lista $p_1, \ldots, p_r$ sappiamo che q è uno dei primi $p_1, p_2, \ldots, p_r$, e quindi divide $m + a = p_1 p_2 \ldots p_r \cdot p^e$. D'altro canto, siccome q è minore di p e p è *il più piccolo* fattore primo di $n - m$, otteniamo che q *non* divide $n - m$. Se per assurdo q dividesse $n + a$, otterremmo che q divide anche la differenza $(n + a) - (m + a) = n - m$, il che contraddirebbe quanto appena dimostrato. Ne segue che q in effetti non divide $n + a$, e siccome questo vale per tutti i primi q inferiori a p, ne deduciamo che il più piccolo fattore primo di $n + a$ è p, che – come voluto – coincide con il più grande fattore primo di $m + a$.

   La condizione è necessaria. Resta solo da vedere che le coppie con $n = m + 1$ non soddisfano la proprietà del testo. Se $n = m + 1$, per ogni intero positivo a gli interi $m + a$ e $n + a = m + a + 1$ sono consecutivi. Se il primo p dividesse sia $n + a$, sia $m + a$, dovrebbe dividere la loro differenza $(n + a) - (m + a) = n - m = 1$, assurdo. Gli interi $m + a$ ed $n + a$ non hanno quindi fattori primi in comune, e in particolare non è possibile che il più piccolo fattore primo di $n + a$ coincida con il più grande fattore primo di $m + a$.

Problema 4 – Soluzione.

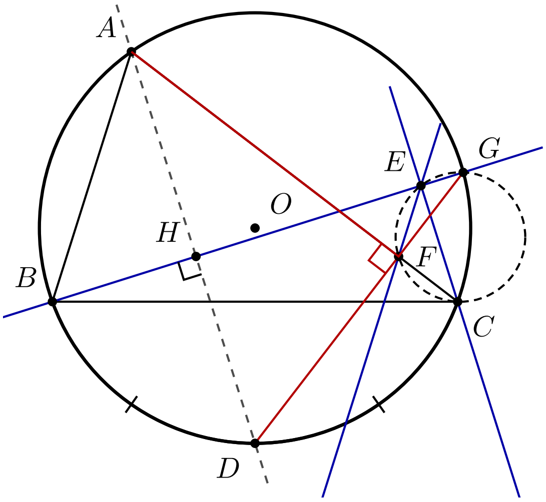


Prima soluzione. Sia M il punto medio del segmento BC. Siccome $\widehat{BEC} = 90°$, i punti B, C ed E giacciono tutti su una circonferenza di centro M. In particolare $ME = MC$. Dimostriamo ora che $FE = FC$, o equivalentemente che $\widehat{FCE} = \widehat{FEC}$. Per mostrare questa uguaglianza di angoli, usiamo la catena di uguaglianze $\widehat{FCE} = \widehat{ACE} = \widehat{DAC} = \widehat{BAD} = \widehat{FEC}$, dove la prima è vera per definizione, la seconda perché gli angoli in questione sono gli angoli interni per le parallele EC e AD tagliate dalla trasversale AC, la terza perché AD è la bisettrice dell'angolo in A, e l'ultima per i parallelismi $BA \parallel FE$, $AD \parallel CE$. Abbiamo così ottenuto $FE = FC$, come voluto, e ne segue che MF è l'asse di CE. Abbiamo quindi $\widehat{MFC} = 180° - \widehat{CFE}/2 = 90° + (\widehat{FCE} + \widehat{FEC})/2 = 90° + \widehat{BAD} = 90° + \widehat{BAC}/2$. D'altro canto, $\widehat{MDC} = \widehat{BDC}/2 = 90° - \widehat{BAC}/2$, quindi $\widehat{MDC} + \widehat{MFC} = 180°$, da cui $DMFC$ è ciclico. Per concludere, si ha $\widehat{AFD} = 180° - \widehat{DFC} = 180° - \widehat{DMC} = 90°$.

Seconda soluzione. Supponiamo che le rette BE e DF si incontrino sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC, in un punto che chiamiamo G. Dimostreremo in seguito che questo effettivamente accade. Ammesso questo fatto, la dimostrazione si può concludere come segue. Sia H il punto d'incontro di AD e BE e poniamo $\alpha = \widehat{BAC}$. L'angolo $\widehat{GBA} = \widehat{HBA}$ è pari a $90° - \alpha/2$, perché il triangolo AHB è rettangolo in H per costruzione, e l'angolo $\widehat{BAD}$ è pari ad $\alpha/2$ per costruzione. Siccome A, B, D, G giacciono tutti sulla circonferenza circoscritta ad ABC, gli angoli $\widehat{GBA}$ e $\widehat{GDA}$ sono uguali, in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco GA. Ne segue allora

$$\widehat{FDA} = \widehat{GDA} = \widehat{GBA} = \widehat{HBA} = 90° - \alpha/2,$$

e d'altro canto abbiamo $\widehat{DAF} = \widehat{DAC} = \alpha/2$ per costruzione. Per differenza nel triangolo AFD otteniamo quindi $\widehat{AFD} = 180° - \widehat{DAF} - \widehat{FDA} = 180° - \alpha/2 - (90° - \alpha/2) = 90°$, come voluto.



Resta quindi solo da dimostrare che le rette DF e BE si incontrano effettivamente sulla circonferenza circoscritta ad ABC, che chiamiamo ω. Per dimostrare questo fatto, definiamo il punto G come l'intersezione fra DF e ω, e dimostriamo che G si trova anche sulla retta BE. Dato che BE e DF si incontrano in un solo punto, questo implicherà ovviamente che il loro punto di intersezione è proprio G, che si trova su ω per costruzione. Abbiamo

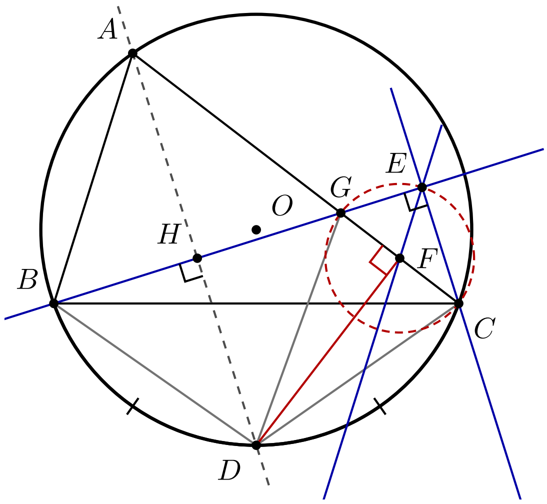
$$\widehat{FGC} = \widehat{DGC} = \widehat{DAC} = \alpha/2 = \widehat{BAD} = \widehat{FEC},$$

dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che $\widehat{DGC}, \widehat{DAC}$ sono angoli alla circonferenza che insistono sull'arco DC, mentre l'ultima uguaglianza deriva dai parallelismi $AB \parallel EF$, $AD \parallel EC$. L'uguaglianza $\widehat{FGC} = \widehat{FEC}$ implica che il quadrilatero $FCGE$ è ciclico. In particolare, gli angoli $\widehat{EGF}$ e $\widehat{ECF}$ sono uguali, perché entrambi insistono sull'arco EF della circonferenza circoscritta a $FCGE$. Otteniamo allora

$$\widehat{EGF} = \widehat{ECF} = \widehat{DAC} = \alpha/2,$$

dove la sequenza uguaglianza segue dal fatto che gli angoli $\widehat{ECF}$ e $\widehat{DAF} = \widehat{DAC}$ sono angoli alterni interni delle parallele $AD \parallel EC$ tagliati dalla trasversale AC. D'altro canto, abbiamo anche $\widehat{BGF} = \widehat{BGD} = \widehat{BAD} = \alpha/2$, e quindi le rette contenenti i segmenti EG e BG formano lo stesso angolo con la retta GF. Questo vuol dire che le rette EG e BG sono parallele, ma visto che hanno il punto G in comune devono coincidere. In particolare, i punti B, E, G sono allineati, cioè G appartiene alla retta BE, come voluto.

Terza soluzione. Sia G il punto d'intersezione di BE con AC. La retta AD è perpendicolare a GB per costruzione, ed è anche bisettrice dell'angolo A nel triangolo BAG. Ne segue che BAG è isoscele su base BG; similmente, la retta DA è altezza e mediana nel triangolo GDB, che quindi è isoscele su base GB. In particolare, $DB = DG$. Abbiamo inoltre $DB = DC$ per ipotesi. Sappiamo quindi $DC = DG$, cioè il triangolo CDG è isoscele su base CG.



L'angolo $\widehat{ECF} = \widehat{ECA}$ è uguale a $\widehat{DAC} = \alpha/2$, perché le rette EC e AD sono parallele. L'angolo $\widehat{EFA}$ è uguale a $\widehat{BAF} = \widehat{BAC} = \alpha$ perché le rette EF e AB sono parallele. Il triangolo CEG è rettangolo per costruzione (EC è parallela a AD, e AD è perpendicolare a BE); la sua circonferenza circoscritta ha diametro GC. Siccome l'angolo alla circonferenza $\widehat{ECG}$ è la metà dell'angolo $\widehat{EFG}$, e F si trova sul diametro, otteniamo che F è il centro di tale circonferenza circoscritta, e quindi il punto medio di CG.

Per quanto appena visto, nel triangolo isoscele CDG il segmento DF è mediana (perché F è il punto medio di CG); siccome sappiamo già che questo triangolo è isoscele, tale segmento è anche altezza, e cioè $\widehat{DFG} = \widehat{DFA} = 90°$, come voluto.

Problema 5 – Soluzione.

Chiamiamo $M(n)$ il massimo numero di elementi dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ che possiamo colorare *bene*, ossia in modo tale che non ci siano numeri colorati a distanza 5, 10, 12 o 17 fra loro (in altre parole, la massima cardinalità di un sottoinsieme distanziato di $\{1, \ldots, n\}$). L'esercizio chiede di determinare $M(2026)$, e dimostreremo che $M(2026) = 646$.

L'osservazione chiave è che $M(22n) = n\,M(22)$ per ogni intero positivo n. Per dimostrare questo fatto, osserviamo intanto che il problema di colorare bene i numeri $1, \ldots, n$ equivale al medesimo problema per una qualunque sequenza $1 + k, \ldots, n + k$ di n numeri interi consecutivi: la traslazione di k è, infatti, una corrispondenza biunivoca fra le colorazioni dei primi e quelle dei secondi che preserva le distanze. Ne segue che $M(22n) \leq n\,M(22)$. Infatti possiamo suddividere i numeri $1, \ldots, 22n$ in n sequenze di 22 numeri consecutivi: in questo modo, una buona colorazione di questi numeri si suddivide in n buone colorazioni di 22 numeri consecutivi, ciascuna delle quali ha al più $M(22)$ numeri colorati.

Per ottenere la disuguaglianza opposta, $n\,M(22) \leq M(22n)$, fissiamo una buona colorazione $\mathcal{C}$ dei numeri $1, \ldots, 22$. Sostengo che è buona altresì la colorazione di $1, \ldots, 22\,n$ ottenuta *ripetendo* $\mathcal{C}$ per n volte, ossia, considerando ogni numero x che sia colorato in $\mathcal{C}$, e colorando gli n numeri $x, x+22, x+44, \ldots, x+22(n-1)$. Supponiamo infatti per assurdo, di colorare $x+22a$ e $y+22b$, con x e y colorati in $\mathcal{C}$, e che la distanza fra questi numeri sia una di quelle vietate. Allora $a \neq b$, altrimenti x e y sarebbero alla medesima distanza vietata. Supponiamo, senza perdita di generalità, $a < b$. Allora deve valere $b = a + 1$, perché altrimenti la distanza fra i due numeri sarebbe > 22, e quindi maggiore di tutte le distanze vietate. Ora, e questo è il punto cruciale, se $(y + 22(a + 1)) - (x + 22a) = 22 - (x - y)$ fosse una distanza vietata, allora anche $x - y$ sarebbe una distanza vietata, perché si osserva che 22 meno una distanza vietata è sempre una distanza vietata ($22 - 5 = 17$, $22 - 10 = 12$, $22 - 12 = 10$ e $22 - 17 = 5$). Però x e y non possono trovarsi a una distanza vietata, perché $\mathcal{C}$ è buona, e questo è l'assurdo cercato.

Abbiamo stabilito che $M(22n) = n\,M(22)$. Dimostriamo ora che $M(22) = 7$. Una buona colorazione di 7 numeri si ottiene con 1, 2, 8, 9, 10, 16, 17. Supponiamo, per assurdo, di avere una buona colorazione di 8 numeri. Allora $M(330) = 15\,M(22) \geq 15 \cdot 8 = 120$, per cui c'è una buona colorazione dei numeri $1, \ldots, 330$ con 120 numeri colorati. Però questi numeri possono essere suddivisi in 110 insiemi del tipo $\{x, x+5, x+10\}$, ciascuno dei quali può contenere al più un numero colorato (dato che le distanze fra questi numeri sono tutte vietate). Siccome $110 < 120$, abbiamo la contraddizione cercata.

Abbiamo quindi ottenuto $M(2024) = M(92 \cdot 22) = 92 \cdot 7 = 644$, per cui $M(2026) \leq 646$. Per colorare bene 646 dei numeri $1, \ldots, 2026$, basta considerare la buona colorazione di $1, \ldots, 22$ data nel paragrafo precedente, ripetuta 92 volte, insieme ai numeri 2025 e 2026. Questa contiene 644 dei numeri $1, \ldots, 2024$, più i numeri $2025 = 1 + 92 \cdot 22$ e $2026 = 2 + 92 \cdot 22$, per un totale di 646 elementi. È inoltre una buona colorazione, perché se ripetessimo 93 volte la buona colorazione data di $1, \ldots, 22$ otterremmo un sottoinsieme distanziato di $1, \ldots, 22 \cdot 93$, e stiamo semplicemente considerando i numeri in tale insieme distanziato che sono minori o uguali a 2026.

Commenti e soluzioni alternative.
La soluzione sopra illustrata si fonda su tre osservazioni, che possiamo riassumere così:

- Il valore di $M(22)$ fornisce una stima dall'alto per $M(2026)$
- Un sottoinsieme distanziato di $\{1, 2, \ldots, 22\}$ può essere esteso a un sottoinsieme distanziato di $\{1, 2, \ldots, 2026\}$
- $M(22) = 7$

Al momento non sono note soluzioni che evitino la prima di queste tre osservazioni. D'altro canto, sebbene la seconda sia utilizzata sia per costruire l'esempio sia per dimostrarne l'ottimalità, essa non è strettamente necessaria. Vedremo quindi una costruzione dell'esempio basata su una versione leggermente più debole di tale osservazione e alcune dimostrazioni alternative di $M(22) \leq 7$.

Costruzione alternativa dell'esempio.
Notiamo che se esiste un insieme $S \subseteq \{0, 1, \ldots, 21\}$ di classi di resto modulo 22 tale che, per ogni $x, y \in S$, $x - y \not\equiv 5 \pmod{22}$ e $x - y \not\equiv 10 \pmod{22}$, allora l'insieme $\tilde{S}$ degli elementi di $\{1, 2, \ldots, 2026\}$ appartenenti a una di quelle classi di resto è distanziato.

Infatti, siccome tutti gli elementi di $\tilde{S}$ sono congrui a elementi di S, per ogni $x, y \in \tilde{S}$, né $x - y$ né $y - x$ possono essere congrui a 5 o a 10 modulo 22, quindi $x - y$ non è congruo a nessun elemento di $\{5, 10, 12, 17\}$ modulo 22 e quindi, a maggior ragione, non apparterrà a $\{5, 10, 12, 17\}$. Ne segue che $\tilde{S}$ è distanziato.

Dal momento che gli elementi di $\{1, 2, \ldots, 2026\}$ che appartengono a una specifica classe di resto modulo 22 sono 92 (eccezion fatta per le classi 1 e 2, per i quali ne abbiamo 93), ci basta esibire un insieme S di classi di resto modulo 22 di cardinalità 7, che goda della proprietà di cui sopra e che contenga 1 e 2. In questo modo $|\tilde{S}| = 92 \cdot 7 + 2 = 646$.

Questa cosa può essere fatta in due modi leggermente diversi:

- Possiamo esibire direttamente $S = \{1, 2, 8, 9, 10, 16, 17\}$ e verificare a mano che soddisfa la proprietà.
- Un modo più sofisticato di costruire S è di prendere le classi di resto di $15k + c$ modulo 22 per $0 \leq k \leq 6$, dove c è fissato. Infatti, se $(15k + c) - (15l + c) \equiv 5 \pmod{22}$ si ottiene $5(3k - 3l - 1) \equiv 0 \pmod{22}$, quindi $3k - 3l - 1 \equiv 0 \pmod{22}$, cosa impossibile per $0 \leq k, l \leq 6$. Allo stesso modo non si può avere $(15k + c) - (15l + c) \equiv 10 \pmod{22}$. Rimane solo da accertarsi che si può scegliere c in modo da avere 1 e 2 nell'insieme: per questo basta prendere $c = 1$.

Dimostrazione alternativa di $M(22) \leq 7$.
Approccio alternativo 1: Immaginiamo di disporre le classi di resto modulo 22 su una circonferenza, dove mettiamo in k-esima posizione la classe di resto di $5k$. Questo si può fare perché 5 e 22 sono primi tra loro. A questo punto, consideriamo le classi di resto a cui appartiene almeno un elemento del nostro insieme distanziato $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 22\}$. Due di esse non potranno trovarsi a distanza 1 né 2, poiché ciò implicherebbe l'esistenza di $x, y \in S$ con $x - y \equiv 5 \pmod{22}$

oppure $x - y \equiv 10 \pmod{22}$, da cui $|x-y| \in \{5, 10, 12, 17\}$, visto che $1 \leq x, y \leq 22$. Ma per il principio dei cassetti, se prendessimo 8 dei 22 punti sulla circonferenza (lasciando quindi $14 < 8 \cdot 2$ spazi vuoti), almeno uno di essi avrebbe solo uno spazio vuoto avanti a lui in senso orario, quindi $|S| \leq 7$.

Approccio alternativo 2: Quest'ultimo approccio è il meno "illuminato" e si basa soltanto su una metodica analisi dei casi possibili.

Sia S_k, per $1 \leq k \leq 5$, l'insieme degli elementi di S congrui a k modulo 5. Utilizzando il fatto che due elementi di S non possono differire di 5 né di 10, si vede facilmente che $|S_k| \leq 2$ per ogni k. Inoltre, $|S_3| = 2 \implies S_3 = \{3, 18\}$, $|S_4| = 2 \implies S_4 = \{4, 19\}$, $|S_5| = 2 \implies S_5 = \{5, 20\}$. A questo punto notiamo che:

- Non si può avere $|S_3| = |S_5| = 2$, perché ciò implicherebbe che $3, 20 \in S$, assurdo, quindi $|S_3| + |S_5| \leq 3$.

- Se $|S_4| = 2$, allora $4, 19 \in S$, quindi $16, 21, 2, 7 \notin S$, da cui $S_1 \subseteq \{1, 6, 11\}$ e $S_2 \subseteq \{12, 17, 22\}$, da cui facilmente $|S_1| \leq 1$ e $|S_2| \leq 1$. Mettendo insieme i pezzi, questo implica $|S| \leq 7$.

- Supponiamo ora che $|S_4| \leq 1$ e che $|S| \geq 8$. Siccome $|S_3| + |S_5| \leq 3$, questo implica $|S_1| + |S_2| \geq 4$, da cui $|S_1| = |S_2| = 2$. Da $|S_1| = 2$ segue che S_1 deve contenere un elemento tra 1 e 6, ma allora in entrambi i casi si ha $18 \notin S$, da cui per le osservazioni preliminari $|S_3| \leq 1$. Da $|S_2| = 2$ segue che S_2 deve contenere un elemento tra 17 e 22, ma allora in entrambi i casi si ha $5 \notin S$, da cui per le osservazioni preliminari $|S_5| \leq 1$. Otteniamo quindi $|S_3| + |S_5| \leq 2$, che, insieme a $|S_4| \leq 1$ e $|S_1| + |S_2| \leq 4$ (osservazioni preliminari), implica $|S| \leq 7$ anche in questo caso, assurdo (siccome avevamo supposto $|S| \geq 8$).

Considerazioni generali.

Al di là delle diverse varianti delle dimostrazioni, un punto cruciale è l'osservazione che i numeri dati nel testo non sono casuali e quindi bisogna utilizzare in qualche modo le proprietà aritmetiche della quintupla $(5, 10, 12, 17, 2026)$. La più importante è che $5 + 17 = 10 + 12 = 22$. Tuttavia, è rilevante anche la vicinanza di 2026 a un multiplo di 22 e il fatto che $10 = 5 \cdot 2$ (almeno in uno dei metodi per costruire l'esempio). L'osservazione che $5 + 17 = 10 + 12 = 22$ serve per comprendere che cercare costruzioni con un periodo di 22 è una buona idea: la prima soluzione lo fa nella maniera più forte possibile e dimostra che il problema con il dato 2026 è equivalente quasi in toto al problema con il dato 22. L'equivalenza sarebbe completa se 2026 fosse un multiplo di 22, cosa che non è, ma siccome 2026 non è troppo lontano da $2024 = 22 \cdot 92$ abbiamo visto che questo non è un grande problema. In ogni caso, si può risolvere il problema anche senza capire questa "quasi-equivalenza" fino in fondo, come illustrato dalle varie soluzioni alternative.

Problema 6 – Soluzione.

Dimostreremo che, in realtà, la lunghezza della fila non supererà mai 37 m. Immaginiamo una seconda fila di nove fantasmi, che marciano parallelamente ai musicisti, con lo stesso ritmo e il medesimo metodo. I fantasmi, tuttavia, partono da una configurazione diversa:

- il primo fantasma parte a fianco del primo musicista;
- il secondo fantasma parte 8 m dietro il primo;
- il terzo parte 7 m dietro il secondo;
- e così via fino ad arrivare al nono fantasma, che parte un metro dietro l'ottavo.

Vedremo che:

1. Ogni musicista è sempre davanti, o al più affiancato, al fantasma corrispondente;
2. Ad ogni passo, ciascun fantasma avanza di un metro.

Stabiliti i punti 1. e 2., è chiaro che l'intera fila dei musicisti è sempre compresa fra il primo e l'ultimo dei fantasmi (perché il primo fantasma e il primo musicista sono sempre affiancati, mentre l'ultimo fantasma precede l'ultimo musicista). D'altro canto, i due fantasmi in testa e in coda, per il punto 2., quando fanno un passo avanzano di un metro. Di conseguenza, la loro distanza non supera mai la distanza iniziale di $1\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m} + \cdots + 8\,\mathrm{m} = 36\,\mathrm{m}$, aumentata di un metro per tener conto del periodo fra un passo del primo fantasma e il successivo dell'ultimo.

Dimostrazione di 1.

La condizione è vera all'inizio. Supponiamo, per assurdo, che non permanga. Chiamiamo allora Mozart il primo musicista a essere superato dal proprio fantasma. Mozart non può essere il capofila, perché i due capofila procedono di pari passo. Mozart non può chiudere la fila, perché i due ultimi seguono i rispettivi penultimi alla distanza di un metro, per cui il penultimo musicista avrebbe dovuto essere superato prima. Mozart è quindi preceduto e seguito da altri due musicisti. Al momento del sorpasso, questi due non sono dietro i rispettivi fantasmi, quindi il loro punto medio, cioè il posto di Mozart, non può essere dietro il punto medio dei fantasmi, cioè il posto del fantasma di Mozart. E questa è un contraddizione.

Dimostrazione di 2.

Supponiamo, per assurdo, che non sia così. Chiamiamo Roderic il primo fantasma a perdere il passo. Per costruzione, Roderic non può essere il capofila. Roderic non può neanche essere l'ultimo della fila, perché, se così fosse, il penultimo dovrebbe aver perso il passo prima. Roderic precede quindi un fantasma, inizialmente di x metri, e segue un fantasma, inizialmente di $x+1$ metri. Se ci troviamo all'n-esimo colpo della grancassa, il predecessore di Roderic deve essere avanzato, fin'ora, di n metri, mentre lui e il successore sono avanzati di $n-1$. Appena prima di moversi, Roderic dista, quindi, $x+2$ metri dal fantasma precedente, e x dal successivo. Ma allora, per portarsi nel punto medio, deve avanzare di un metro: assurdo.

Osservazione. La stessa soluzione si può riformulare in modo più algebrico nel modo seguente. Introduciamo le distanze $d_1, d_2, \ldots, d_8$ fra i vari musicisti: d_1 è la distanza fra il primo e il secondo, d_2 quella fra il secondo e il terzo, e così via. Si può dimostrare che, se in un certo momento queste distanze soddisfano $d_1 \leq 8\,\mathrm{m}, d_2 \leq 7\,\mathrm{m}, d_3 \leq 6\,\mathrm{m}, \ldots, d_8 \leq 1\,\mathrm{m}$, allora anche dopo un colpo di grancassa (e dopo che tutti i musicisti si sono spostati) le stesse disuguaglianze rimangono vere. Siccome all'inizio le disuguaglianze sono verificate, rimangono sempre vere, e quindi la lunghezza della fila non supera $(1 + 2 + \cdots + 8)\,\mathrm{m} = 36\,\mathrm{m}$. I numeri $8, 7, 6, \ldots, 1$ possono essere ricavati, almeno euristicamente, chiedendosi sotto quali condizioni le distanze fra i vari musicisti rimangono costanti nel tempo. Mostriamo ad esempio come impostare il calcolo per d_1 e d_2. Siccome il primo musicista avanza di un metro, anche il secondo deve avanzare di un metro: fissiamo l'origine nel terzo musicista, così che i primi tre musicisti della fila si trovano nelle posizioni $0, d_2, d_1 + d_2$. Dopo un passo, i primi due si troveranno nelle posizioni $\frac{d_1+d_2+1}{2}, d_1 + d_2 + 1$. Ne segue che la nuova prima distanza è $d_1' = \frac{d_1+d_2+1}{2}$; affinché questa sia uguale alla vecchia distanza d_1, deve valere

$$\frac{d_1 + d_2 + 1}{2} = d_1 \iff d_1 + d_2 + 1 = 2d_1 \iff d_1 = d_2 + 1.$$

In maniera simile si ricava che $d_2 = d_3 + 1$, eccetera, il che – siccome l'ultima distanza è pari a 1 per costruzione – conduce proprio a considerare la configurazione in cui le distanze sono $8, 7, \ldots, 1$.