



XXVII Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 9 Maggio 2026



Ministero dell'Istruzione
e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

PRIMA PARTE: IL CIELO DI BERKHOFF

«Questa è *Berkhoff*: si trova 12 giorni a nord di Interpolazione, esattamente sul Meridiano della Misura. Nel mio villaggio abbiamo la pesca, la matematica e un'incantevole vista del tramonto. L'unico problema sono le infestazioni: in molti posti hanno pulci saltellanti o formiche alfabetiche, noi abbiamo...»

1. ... i draghi!

Dopo l'ennesimo attacco dei draghi, tutti i 1000 vichinghi del villaggio di Berkhoff si riuniscono attorno a una tavola rotonda per discutere le strategie di difesa. Alcuni di loro sono *vichinghi leali*, che dicono sempre la verità, mentre altri sono *vichinghi imbroglioni*, che mentono sempre. A turno, ciascuno di loro dichiara: «In totale, tra i due vichinghi seduti alla mia destra e i due vichinghi seduti alla mia sinistra, c'è un numero pari di vichinghi leali». Qual è il numero minimo possibile di vichinghi leali?

2. Fourier Buia

Durante l'attacco dei draghi a Berkhoff, Hilcup tenta di colpire una *Fourier Buia* con una delle sue improbabili invenzioni. Studiando il volo della *Fourier Buia*, si ritrova a considerare la disequazione

$$(k+1-t)t \geq 3 \left(\frac{k(k+1)}{2} + t \right).$$

«L'ho presa!» esclama Hilcup, ma quando lo racconta agli altri nessuno gli crede. Così, mentre suo padre lo rimprovera, ripensa alla disequazione appena studiata e si domanda: «Qual è il minimo intero positivo k per cui esiste un intero positivo t che la soddisfa?».

3. Quello scudo è mio!

«Se siete costretti a scegliere tra una spada e uno scudo, prendete lo scudo», ripete Scalarchio ai giovani apprendisti nell'*Arena dei Draghi*. Nel mentre, Θ (tufo) e Θ bruta stanno già litigando per stabilire chi debba impugnare un particolare scudo da addestramento, sul cui fronte compare un disegno: AB è un segmento di lunghezza 108 cm, mentre Γ è una circonferenza di centro B e raggio 72 cm. « K è il punto di intersezione di Γ con AB » urla Θ (tufo). « P è uno dei due punti di Γ per cui AP è tangente a Γ » risponde Θ bruta. Sono infine evidenziati il punto Q , che è la proiezione ortogonale di K sulla retta AP , e il punto X , che è l'ulteriore intersezione della retta QK con Γ . Quanti centimetri misura QX ?

4. Ala artificiale

«Perché non riesci a volare via?», si domanda Hilcup osservando la *Fourier Buia* che ha colpito. Abbozzandone uno schizzo sul suo quadernetto, si accorge che al drago manca un'ala posteriore, a forma di trapezio $ABCD$, con base maggiore CD e base minore AB . Hilcup calcola che $AB = 20$ dm, $CD = 80$ dm, e che gli angoli in C e D misurano rispettivamente 55° e 35° . Per costruire un'ala artificiale, deve determinare la lunghezza di MN , dove M e N sono i punti medi di AB e CD , rispettivamente. Quanti decimetri misura MN ?

5. L'Orripilante Biiezione

Moduloso e Nashtrid stanno allenando la loro capacità di fare più cose contemporaneamente nell'arena. Nello sconfiggere il drago *Orripilante Biiezione*, devono anche usare tutte le cifre da 1 a 9 una sola volta per

comporre tre numeri di tre cifre che risultino *autodivisibili*. «Un numero si dice autodivisibile se è multiplo di ciascuna delle proprie cifre» spiega Scalarchio. Tra tutte le possibili soluzioni, Nashtrid trova la terna di numeri con somma massima S , mentre Moduloso trova quella con somma minima s . Quanto vale $S + s$?

6. Mancato!

«Attenta, ci penso io!» esclama Moduloso rivolto a Nashtrid, mentre lancia un'acchetta contro un drago e lo manca completamente. «Avevo il sole negli occhi! Però almeno so determinare tutte le coppie di interi non negativi (m, n) che soddisfano $4m! + 1 = 2^n + 3^n$ ». Sia (a, b) la somma componente per componente di tutte le coppie trovate; dare come risposta $a \cdot b$. Si ricorda che $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$, mentre $0! = 1$.

7. Cronache di Berkhoff

Γ (pesce) sta leggendo le cronache di Berkhoff e delle incursioni dei draghi che hanno colpito il villaggio. Mentre confronta con attenzione le date annotate nei registri, si accorge di una curiosa regolarità: avviene un'incursione in ogni anno la cui somma delle cifre è uguale al doppio della somma delle cifre dell'anno successivo. «Quali sono allora il primo e l'ultimo anno in cui avverrà un'incursione, tra il 2000 e il 2999?» si chiede Γ (pesce). Dare come risposta la somma dei due numeri trovati.

8. Sbuffo infuocato

Con uno sbuffo infuocato, Stellato ha cancellato parte degli appunti di Hilcup! Ciò che rimane sono i due polinomi $p(x) = x^2 + \star x + 1$ e $q(x) = x^2 + x + \star$, dove \star indica un coefficiente ormai illeggibile. Hilcup ricorda però che i coefficienti cancellati nei due polinomi erano uguali e che i polinomi avevano almeno una radice reale in comune. Qual è il massimo valore che può avere $q(0)^2$?

9. Figlio di un mezzo troll

Nashtrid osserva con crescente fastidio i continui progressi di Hilcup: non solo è diventato sorprendentemente bravo con i draghi, ma pare cavarsela fin troppo bene anche con la matematica. Per metterlo alla prova, decide di proporgli un quesito: «Quanti sono i polinomi di terzo grado a coefficienti interi per cui tutte e tre le radici sono interi di una sola cifra, tutti i coefficienti sono anch'essi interi di una sola cifra e il coefficiente di grado tre è esattamente uno?». Hilcup chiede: «Posso usare anche interi negativi?», a cui Nashtrid risponde: «Certo, tutti gli interi tra -9 e 9 ». Neanche il tempo di finire, che Hilcup già ha risolto il problema. «Figlio di un mezzo troll!» urla Nashtrid spazientita. Qual è la risposta al quesito di Nashtrid?

10. In volo

Nashtrid ha scoperto il nascondiglio di Stellato! Per convincerla che è un drago amichevole, Hilcup la porta a fare un volo in sua compagnia. I due, però, non si accorgono che Stellato si sta dirigendo verso l'arcipelago di cui fa parte anche l'*Isola dei Draghi*. Il suo percorso si può rappresentare sul piano cartesiano: parte dal punto $(0, 0)$, mentre le 1501 isole dell'arcipelago si trovano nei punti (n, n) con $1500 \leq n \leq 3000$. Il drago può muoversi soltanto in direzioni parallele agli assi cartesiani verso destra oppure verso l'alto, e non in diagon... dragonale. Inoltre, al k -esimo battito d'ali percorre esattamente k unità di lunghezza: il primo spostamento è lungo 1, il secondo 2, il terzo 3, e così via (Stellato si muove tra punti a coordinate intere). Quali sono le isole dell'arcipelago che può raggiungere in questo modo? Indicare quante ne sono.

11. Fraintendimenti

«Per Odino, è stata dura!» esclama Stochastic, commentando gli ottimi risultati di Hilcup nell'arena di addestramento. Mentre parla con suo padre, Hilcup giocherella nervosamente con un foglio di carta quadrato $ABCD$ di lato 1 dm , appoggiato sul tavolo con la faccia bianca rivolta verso l'alto e quella nera verso il basso. Sui lati AB , BC , CD e DA sono segnati, rispettivamente, quattro punti E , F , G e H , tali che $AE = BF = CG = DH = \frac{1}{3} \text{ dm}$. Lasciando fermo il centro del foglio, Hilcup solleva il vertice A e piega il foglio lungo il segmento HE , portando A a toccare l'interno del quadrato. In modo analogo, piega poi il foglio lungo i segmenti EF , FG e GH , sollevando rispettivamente i vertici B , C e D e portandoli a contatto con l'interno del foglio. «Dovrei proprio essere a letto!» dice Hilcup sbadigliando, pur di non proseguire la conversazione con il padre. Quanti mm^2 misura l'area di carta nera visibile dall'alto?

12. Verso l'Isola dei Draghi

Stochastic, furioso per il comportamento del figlio durante l'esame finale, decide di salpare verso l'Isola dei Draghi con l'intenzione di eliminarli una volta per tutte. Per la spedizione prepara 9 imbarcazioni, numerate da 1 a 9, che dovranno procedere in fila indiana. Per evitare confusione durante la navigazione, impone però una regola: ogni nave il cui numero è divisibile per 3 deve avere immediatamente davanti a sé una nave con numero minore del proprio. In quanti modi diversi possono disporre le navi in fila?

13. Corse tra draghi

Dopo la sconfitta della Morte Rossa, a Berkhoff è arrivata la pace: vichinghi e draghi vivono in armonia e, nel tempo libero, si divertono con uno sport chiamato *corse tra draghi*. In una partita si affrontano due squadre, che si sfidano in 5 manche. In ciascuna manche vengono liberate 5 pecore, e ogni pecora viene afferrata al volo da una e una sola squadra. La squadra che in una manche raccoglie più pecore vince la manche e ottiene 1 punto. Al termine delle 5 manche, vince la partita la squadra che ha totalizzato più punti. Nella partita odierna, la squadra di Nashtrid ha vinto contro quella di Moduloso; tuttavia, la squadra di Moduloso ha raccolto complessivamente più pecore di quella di Nashtrid. Quanti diversi tabellini finali sono possibili (con *tabellino finale* si intende la successione ordinata dei risultati delle 5 manche, ciascuno espresso come numero di pecore raccolte da ciascuna delle due squadre in quella manche)?

SECONDA PARTE: OLTRE IL CIELO DI BERKHOFF

14. Prepararsi a essere Capo

Hilcup è appena rientrato da un volo di ricognizione con Stellato quando Stochastic lo richiama subito ai suoi doveri: «Lezione numero uno: il primo dovere di un Capo è verso il suo popolo. Vieni ad aiutare me e Scalarchio con questi 25 cittadini, numerati $1, 2, \dots, 25$. Per non perdere tempo, ciascuno sarà assistito, ma da al più due persone tra me, te e Scalarchio». A fine giornata, i tre si accorgono che

- ognuno di loro ha assistito un numero pari di cittadini;
- preso l'insieme degli assistiti di ognuno, o esso o il suo complementare è costituito o da uno o più cittadini con numeri consecutivi;
- comunque si scelgano due tra loro, il numero di cittadini assistiti da entrambi è dispari.

In quanti modi diversi possono aver assistito i 25 cittadini?

15. Calcolatrice vichinga

Eret(eret) è un cacciatore di draghi al soldo dello spietato Drago Burnsvist. Dopo aver catturato Nashtrid, Γ (pesce) e i gemelli Θ (tufo) e Θ bruta insieme ai loro draghi, vuole stabilire a quanto venderli al suo padrone. Per farlo, parte da sei numeri a, b, c, x, y, z e deve calcolare i valori delle seguenti espressioni:

$$2ay + 2bx + 2cy + 2bz;$$

$$az + bz + cz + cy + cx.$$

Purtroppo Eret(eret) non sa fare calcoli a mente e deve usare una calcolatrice vichinga, che permette soltanto di inserire due numeri alla volta ed eseguire un'operazione tra addizione, sottrazione e moltiplicazione. Tuttavia, egli ha un'ottima memoria e può riutilizzare come input qualunque risultato ottenuto in precedenza. Ogni addizione o sottrazione consuma 4 Odinowatt, mentre ogni moltiplicazione ne consuma 23. Quanti Odinowatt consumerà al minimo Eret(eret) per calcolare entrambe le espressioni?

16. Per ogni mar navigherò

Stochastic fischetta una melodia che viene subito riconosciuta da Valgebra, che inizia a cantare:

*«Per ogni punto a coordinate intere del piano cartesiano io navigherò,
e ciascuno di essi colorerò senza paura:
se due punti disteranno proprio $6767 \cdot 7676$ unità, lo stesso colore a essi darò.
Qual è il massimo numero di colori che usare potrò?»*

17. Tranello ghiacciato

Stellato è tornato in sé e, insieme a Hilcup, sta combattendo contro Drago Burnsvist. «Ormai è finita!» urla Hilcup rivolto al nemico. «Davvero?» ribatte Drago Burnsvist, proprio mentre la Grande Bestia Selvaggia intrappola Hilcup e Stellato in un blocco di ghiaccio a forma di tronco di cono di altezza $6\sqrt{2}$ m, i cui raggi delle basi inferiore e superiore misurano rispettivamente $7\sqrt{3}$ m e $\sqrt{3}$ m. Nel momento in cui vengono intrappolati, Hilcup e Stellato sono in volo, per cui la base superiore del tronco di cono si trova a un'altezza di 180 dm dal terreno. Inoltre, l'asse del tronco di cono è perpendicolare al terreno, che è perfettamente orizzontale. Sapendo che i raggi del Sole, considerati paralleli tra loro, formano un angolo di 30° con il suolo, quanti m^2 misura l'area dell'ombra del blocco di ghiaccio proiettata sul terreno?

18. Il Capo è tornato a casa

È giunto il momento di proclamare il nuovo Capo di Berkhoff! L'anziana Gödhi dà inizio alla cerimonia

tracciando con del carbone, sulla fronte di Hilcup, il polinomio

$$p(x) = x^{15} - 2x^{14} + 2x^{13} - x^{12} + x^{11} - 2x^{10} + 2x^9 - x^8 + x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

Solo chi è davvero degno di questo titolo è capace di calcolare la somma delle potenze 16-esime di tutte le radici di $p(x)$, comprese quelle complesse. Quanto vale tale somma?

19. Ala ignifuga

Stellato si è innamorato di una *Fourier Chiara*, che però non va affatto d'accordo con gli umani. Hilcup capisce che è arrivato il momento di lasciarlo volare anche senza di lui e decide di rivestire l'ala artificiale con pelle di drago, così da renderla ignifuga. L'ala è una griglia 6×10 di caselle quadrate, composta da 6 righe e 10 colonne. I ritagli di pelle di drago sono a forma di trimino ($\square\square$ oppure \square , in una qualunque rotazione). Hilcup riveste l'ala a partire dall'angolo in basso a sinistra, cucendo un ritaglio alla volta, senza sovrapporli. Per facilitare il lavoro, ogni casella coperta da un ritaglio appena cucito deve soddisfare la seguente condizione: la casella immediatamente sotto, se esiste, e la casella immediatamente a sinistra, se esiste, devono essere coperte dal ritaglio appena cucito oppure da un ritaglio cucito in precedenza. In quanti modi Hilcup può rivestire l'intera ala, tenendo conto anche dell'ordine in cui i ritagli vengono cuciti? *Dare come risposta la somma dei primi che dividono la soluzione, contati con molteplicità; ad esempio, se la risposta fosse $12 = 2^2 \cdot 3$, dare come risposta $2 \cdot 2 + 3 = 7$.*

20. Il Mondo Nascosto

Gli abitanti di Berkhoff stanno studiando un'antica mappa che, secondo la leggenda, conduce al *Mondo Nascosto*. Su di essa è tracciato un triangolo ABC , con $AC > AB$, tale che $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} + 30^\circ$. Le istruzioni per raggiungere il Mondo Nascosto sono riportate in una nota: «Considera il punto Z , simmetrico di A rispetto al punto medio di BC . Traccia quindi la circonferenza ω circoscritta al triangolo BCZ ; le rette AB e AC intersecano nuovamente ω rispettivamente nei punti P e Q . Siano inoltre X il centro di ω , Y il circocentro del triangolo APQ e M il punto medio di AX . Il Mondo Nascosto è rappresentato dal triangolo AGM , dove G è il baricentro di ABC ». Nella mappa sono indicate anche le lunghezze reali di due segmenti: $XB = 488 \text{ km}$ e $YP = 423 \text{ km}$. Per quanti km^2 si estende il Mondo Nascosto?

21. Addio

«La leggenda dice che, quando la terra trema o sputa fuori lava, sono i draghi che ci ricordano che esistono ancora...», pensa Hilcup, osservando un'ultima volta lo stormo di draghi allontanarsi nel cielo. «Il mondo crede che non esistano quattro interi positivi consecutivi con lo stesso numero di divisori, ma noi Berkhoffiani sappiamo che non è così, e custodiremo questo segreto finché non verrà il tempo in cui i draghi potranno tornare in pace». Qual è il minimo valore possibile della somma di questi quattro interi?



XXVII Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 9 Maggio 2026



*Ministero dell'Istruzione
e del Merito*

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	... i draghi!	0200
2	Fourier Buia	0000
3	Quello scudo è mio!	0120
4	Ala artificiale	0030
5	L'Orripilante Biiezione	2754
6	Mancato!	0030
7	Cronache di Berkhoff	4568
8	Sbuffo infuocato	0004
9	Figlio di un mezzo troll	0122
10	In volo	0016
11	Fraintendimenti	4444
12	Verso l'Isola dei Draghi	4560
13	Corse tra draghi	0515
14	Prepararsi a essere Capo	8400
15	Calcolatrice vichinga	0109
16	Per ogni mar navigherò	8464
17	Tranello ghiacciato	0492
18	Il Capo è tornato a casa	0012
19	Ala ignifuga	0103
20	Il Mondo Nascosto	8601
21	Addio	0974