XXVI Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 10 Maggio 2025

Ministero dell'Istruzione e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Prima parte: «Ehi, dov'è Perryodico?»

1. Sigla iniziale

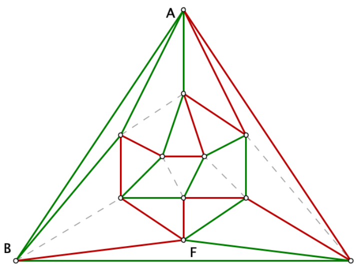
Poco più di tre giorni di gare e di spiaggia, e poi ricomincia la scuola.
Sembrerebbe davvero una grave mancanza, sprecare il tempo che vola...
Potremmo: trovarci al grattacielo, farci una nuotata,
a beach volley fare una schiacciata
o chiederci: quanti sono i numeri pari di 3 cifre con la proprietà
che la cifra delle centinaia è strettamente maggiore della somma delle cifre delle decine e delle unità?
Restate qui con ϕ-neas e Ferbmat: comincia il loro show!
[MAMMA, ϕ-NEAS E FERBMAT HANNO FATTO IL PROBLEMA INIZIALE!]

Soluzione. Consideriamo il numero cdu (centinaia, decine, unità): ragioniamo fissando $u \in \{0,2,4,6,8\}$. Quando $u = 0$ abbiamo che $c > d$ e quindi abbiamo esattamente $10 \cdot 9/2 = 45$ casi. Se $u = 2$ abbiamo $c > d+2$ quindi, fissato $c > 2$, abbiamo $c-2$ scelte per d, da cui $7+6+5+4+3+2+1 = 7 \cdot 8/2 = 28$. Similmente per $u = 4,6,8$ avremo rispettivamente $5 \cdot 6/2 = 15$, $3 \cdot 4/2 = 6$ e $2 \cdot 1/2 = 1$ casi. In totale $45+28+15+6+1 = 95$.

2. Montagne russe

ϕ-neas: «Ehi Ferbmat, so cosa faremo oggi: costruiremo delle montagne russe!» (*Ferbmat approva silenziosamente*).
ϕ-neas: «I binari sono posti sugli spigoli di un icosaedro. Il vagone partirà da un vertice e dovrà seguire un percorso che non attraversi mai due volte lo stesso spigolo, arrivando in un vertice che non necessariamente sarà quello da cui è partito». Quanti spigoli, al massimo, potrà attraversare il vagone?

Soluzione. Posso rappresentare il grafo di un icosaedro nella figura a fianco. Ci sono 12 vertici e ogni vertice ha 5 spigoli uscenti da lui: gli spigoli totali sono quindi 30. Fatta eccezione per il vertice di partenza e quello di arrivo, gli spigoli di un dato vertice che possono essere percorsi dal vagone sono sempre in numero pari, quindi al più 4. Ciò vuol dire che per 10 vertici dovrò escludere almeno uno spigolo uscente, quindi almeno 5 spigoli non possono essere percorsi. In figura è rappresentato un percorso che passa per esattamente 25 spigoli. Si parte da A, poi si va in B e si segue il percorso verde fino a tornare in B, quindi si segue il percorso rosso fino ad arrivare ad F.



3. Messaggio romantico

Mentre ϕ-neas e Ferbmat costruiscono le montagne russe, $\tan(dace)$ è al telefono con Stauchy, che cerca di convincerla a scrivere un messaggio romantico per Jermain. $\tan(dace)$ decide quindi di scrivere tutti i numeri interi da 1 fino a un certo intero n. Per rendere il tutto ancora più speciale, vuole che, al termine della scrittura del numero n, siano state utilizzate esattamente $2025 \cdot n$ cifre in totale. Quanto vale la somma delle cifre di n?

Soluzione. Sicuramente n deve avere più di 2025 cifre altrimenti sicuramente il numero di cifre usate fino a quel momento è $< 2025 \cdot n$. Quindi $n \geq 10^{2025}$. Contiamo ora quante cifre occorrono per arrivare fino a 10^{2025} escluso. I numeri di esattamente k cifre sono $10^{k+1} - 10^k$ quindi il numero di cifre usato fino a 10^{2025} (escluso) sarà

$$K_{2025} = 1 \cdot (10-1) + 2 \cdot (10^2 - 10) + 2 \cdot (10^3 - 10^2) + \ldots + 2025 \cdot (10^{2025} - 10^{2024}) = 2025 \cdot 10^{2025} - \underbrace{1111\ldots111}_{2025 \text{ cifre}}.$$

Quindi per arrivare fino ad n userò $K_{2025}+2026\cdot(n-10^{2025}+1)$ cifre. Ora imponiamo

$$K_{2025}+2026(n-10^{2025}+1)=2025\cdot n$$

$$n=10^{2025}+\underbrace{1111\ldots111}_{\text{2025 cifre}}-2026=\underbrace{1111\ldots1109085}_{\text{2026 cifre}},$$

dove n ha 2026 cifre e quindi la somma delle sue cifre è $2021+9+8+5=2043$.

4. C.E.S.E.N.A.T.I.C.O.

ϕ-neas: «Ehi, dov'è Perryodico?». Perryodico, o meglio agente π, è impegnato nella sua missione quotidiana contro il Dr. DoofenSchwartz, che è riuscito a catturarlo! Dr. DoofenSchwartz: «Ti ho preso, Perryodico l'ornitorinco... Guarda la mia ultima invenzione: si chiama *Collocare Efficientemente Su Elementi Non Allineati Torri In Colori Omologhi*, in breve C.E.S.E.N.A.T.I.C.O.! Essa permette di collocare 8 torri degli scacchi su una classica scacchiera 8×8, in modo che stiano tutte su caselle dello stesso colore, senza che alcuna coppia di torri si trovi sulla stessa riga o sulla stessa colonna». Neanche il tempo di finire la frase, che Perryodico riesce a liberarsi. «Sventura a te, Perryodico l'ornitorinco!» urla DoofenSchwartz. In quanti modi è possibile effettuare la collocazione?

Soluzione. Scegliamo in 2 modi il colore su cui posizionare le torri. Procedendo una riga alla volta dall'alto in basso, ci sono 4 possibili caselle per la torre sulla prima riga, 4 sulla seconda riga, e poi 3, 3, 2, 2, 1, ed 1. Complessivamente, il numero di possibili collocazioni è $2\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1=1152$.

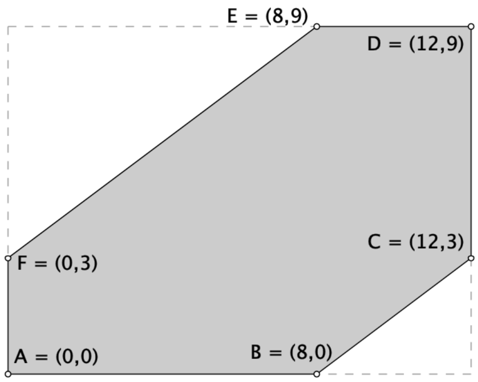
5. La macchina del tempo

Dopo aver costruito le montagne russe, ϕ-neas e Ferbmat si mettono alla prova creando un portale che permette di viaggiare nel tempo! Hanno tracciato il progetto della loro ultima creazione su un foglio. Sul foglio è disegnato il portale, che è un esagono convesso $ABCDEF$, con le seguenti annotazioni:

- I vertici dell'esagono si trovano in punti a coordinate intere (in metri).
- I lati dell'esagono hanno lunghezze intere (in metri), tutte diverse tra loro.
- I lati opposti dell'esagono sono paralleli.
- L'angolo $\hat{A}$ è retto.
- Tre lati consecutivi dell'esagono misurano, in quest'ordine, $3m$, $8m$ e $5m$.

Per evitare paradossi temporali, il portale deve avere la forma dell'esagono di area minima che soddisfa tutte queste condizioni. Quanti m^2 misura l'area del portale?

Soluzione. I lati di $3m$ e $8m$ sono paralleli agli assi coordinati in quanto non possono essere ipotenusa di una terna pitagorica. Possiamo assumere che A sia il vertice tra questi due lati e dunque $A=(0,0)$, $B=(8,0)$ e $F=(0,3)$. Quindi il lato di $5m$ è obliquo abbiamo due scelte: $C=(11,4)$ oppure $C=(12,3)$. Poiché $BC\parallel EF$, quest'ultimo è multiplo di $5m$ (ma non può essere $5m$ perché tutti i lati devono essere diversi). provando $EF=10m$, abbiamo poi un unico modo di chiudere l'esagono. Nel primo caso $E=(6,11)$ e i lati risultano $3,8,5,7,5,10$ (che quindi è da escludere) mentre nel secondo caso $E=(8,9)$ e i lati risulteranno $3,8,5,6,4,10$ per il quale l'area risulta essere $12m\cdot 9m-6m^2-24m^2=78m^2$.



6. Normale

Normale è il robot umanoide costruito dal Dr. DoofenSchwartz per essere il suo assistente personale. «Il mio nome è Normale. I nemici naturali dell'ornitorinco sono l'uomo... e i numeri primi esprimibili come $n^4-2023n^2+1$, con n intero» afferma Normale con voce robotica. Quanto vale la somma dei numeri primi nemici degli ornitorinchi? O degli ornitorinci? O degli ornituncoli... insomma, avete capito. Quanto vale?

Soluzione. Ricordando che $2025=45^2$, possiamo fattorizzare l'espressione data $f(n)$ come segue: $f(n)=n^4-2023n^2+1=n^4+2n^2+1-2025n^2=(n^2+1)^2-(45n)^2=(n^2+45n+1)(n^2-45n+1)$. Assumiamo senza perdita di generalità che $n\geq 0$, poiché $f(n)=f(-n)$. Allora $n^2+45n+1>0$ e $n^2+45n+1\geq n^2-45n+1>0$. Quindi, affinché $f(n)$ sia uguale a un numero primo p, si deve necessariamente avere $n^2+45n+1=p$ e $n^2-45n+1=1$. Da quest'ultima equazione troviamo $n=0$ e $f(n)=1$ (non primo) oppure $n=45$ e $f(n)=4051$ (primo). Quindi la risposta è 4051.

7. Regali inaspettati

Il Dr. DoofenSchwartz decide di fare una sorpresa a sua figlia. Vanasse DoofenSchwartz: «Papà, che ci fai qui?». Dr. DoofenSchwartz: «Ho una sorpresa per te. È una cosa che hai sempre desiderato e chiesto mille volte. Nelle mie mani ho la chiave della tua...». Vanasse DoofenSchwartz: «... della mia nuova macchina?!». Dr. DoofenSchwartz: «No, della tua felicità! Dicevi che se ti avessi comprato un polinomio sarei stato un padre stupendo». (*Il Dr.*

DoofenSchwartz ha infatti acquistato un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali tale che $p(p(x)) = p(x) + x^4 + x^2 + 1$). Quanto vale $p(2025)$?

Soluzione. Se $p(x)$ ha grado d allora $p(p(x))$ ha grado d^2. Ma allora $d^2 = \max\{d, 4\}$ da cui $d = 2$. Scrivendo $p(x) = ax^2 + bx + c$, si osserva subito che il coefficiente di testa di $p(p(x))$ è a^3x^4 quindi si può dedurre che $a = 1$. Ora si può scrivere $p(p(x)) = p(x^2 + bx + c) = (x^2 + bx + c)^2 + b(x^2 + bx + c) + c$ da cui, svolgendo il quadrato del trinomio e ponendo l'uguaglianza, si ottiene

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 + 2c)x^2 + 2bcx + c^2 + bx^2 + b^2x + bc + c = x^2 + bx + c + x^4 + x^2 + 1.$$

Uguagliando i coefficienti di grado 3 si ottiene $b = 0$ e quindi si riduce il tutto a $x^4 + 2cx^2 + c^2 + c = x^4 + 2x^2 + c + 1$ e quindi $c = 1$. Il polinomio è dunque $p(x) = x^2 + 1$ e $p(2025) = 4100626$.

8. Mathside Girls

Le Mathside Girls sono un gruppo di brillanti studentesse che adorano risolvere problemi di matematica in compagnia e raccogliere distintivi svolgendo ogni tipo di attività. tan(*dace*) vuole diventare una di loro entro domani e, per riuscirci, deve guadagnare 50 distintivi in un solo giorno! Il cinquantesimo e ultimo distintivo è quello di *consegna tortine*. Per ottenerlo deve consegnare n tortine, dove n è il più grande intero positivo di 5 cifre, con tutte le cifre distinte tra loro e nessuna cifra nulla, tale che sia divisibile per ciascuna delle proprie cifre. Quante sono le tortine?

Soluzione. Per avere il più grande possibile cominciamo con le cifre 98, allora le ultime 3 cifre formano un multiplo di 8 e hanno somma $\equiv 1 (mod 9)$. Questa somma è almeno $1 + 2 + 3 = 6$ e al più $7 + 6 + 5 = 18$, quindi è 10 (non possiamo avere il 5 perché sarebbe per forza in ultima posizione, ma così non risulterebbe pari). Proviamo allora ad iniziare con 987, quindi può essere solo 98712 (che non funziona) e 98721 (dispari, non va bene). Provando poi gli altri casi, si arriva al primo numero che funziona che è 98136 (alternativamente si possono provare tutti i numeri di 3 cifre $\equiv 64 \pmod{72}$).

9. Inverti-monet-inator

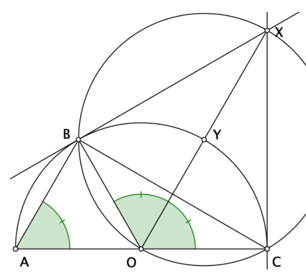
Stanco dei suoi insuccessi, il Dr. DoofenSchwartz crea il potente *inverti-monet-inator*! Lo testa nel suo laboratorio segreto dove si trova una griglia di 2025×2025 monete, ciascuna delle quali mostra T o C con uguale probabilità, indipendentemente dalle altre. Se fra due monete T (rispettivamente C) nella stessa riga o colonna ci sono solo monete C (rispettivamente T), l'*inverti-monet-inator* può capovolgere tutte le C (rispettivamente T). Ad esempio, se una riga contiene la sequenza TTCCCTTCT, è possibile effettuare la mossa T(TCCCT)TCT $\rightarrow$ T(TTTTT)TCT. Qual è la probabilità che DoofenSchwartz possa far mostrare la stessa faccia a tutte le monete, azionando opportunamente l'*inverti-monet-inator* un numero finito di volte? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione. Le monete nelle quattro caselle d'angolo non possono mai essere invertite, quindi è necessario che mostrino fin da subito la stessa faccia (T o C); questo accade con probabilità $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$. D'altra parte, se le monete d'angolo mostrano tutte la stessa faccia (diciamo T), allora è possibile invertire tutte le C in T nella prima riga (effettuando mosse sulla prima riga), invertire tutte le C in T nell'ultima riga (effettuando mosse sull'ultima riga), e invertire tutte le C in T in ciascuna colonna (effettuando mosse sulle colonne). Quindi la probabilità cercata è proprio $1/8$ e la risposta da consegnare è $1 + 8 = 9$.

10. O.W.C.A.

Maggiore MonoGraham: «Curl! Non c'è un attimo di pace... Il Dr. DoofenSchwartz ha costruito un *triangolo-rettangol-inator*, che genera triangoli rettangoli. Contatta subito tutti gli agenti della O.W.C.A.!». Curl: «Fatto! L'agente π non è contattabile. Tuttavia, l'agente δ ha scoperto che l'ultimo triangolo ABC creato da DoofenSchwartz è rettangolo in B, e che le tangenti alla circonferenza di diametro AC in B e C si incontrano in X. L'agente α ha invece scoperto che il circocentro del triangolo BCX giace sulla circonferenza di diametro AC». Maggiore MonoGraham: «Per disattivare il macchinario non ci resta che capire quanto misurano i lati AB e AC...». Curl: «L'agente γ mi ha appena comunicato che il lato AB misura 2025 metri, signore». Quanti metri misura AC?

Soluzione. Detto O il circocentro di ABC, si ha che $BXCO$ è un quadrilatero ciclico, ha due angoli retti opposti e in particolare OX è un diametro della sua circonferenza circoscritta, e dunque Y, il circocentro di BCX, è il punto medio di OX. Ma allora se Y è sulla circonferenza circoscritta di ABC si ha $OX = 2 \cdot OY = 2 \cdot OC$ e quindi il triangolo OCX è un triangolo $30° - 60° - 90°$. Dunque $\widehat{COX} = \widehat{COB} = 60°$ e $\widehat{BAC} = 60°$, da cui $AC = 2 \cdot AB = 4050\,m$.



11. Il problema preferito di Belljeet

Impegnati nella costruzione della macchina del tempo, ϕ-neas e Ferbmat non si accorgono che Belljeet è rimasto bloccato su un albero, ma per fortuna c'è qualcuno pronto ad aiutarlo! BuFourier: «Ehi, guarda qua! Ho una calcolatrice e il tuo problema preferito di matematica! Te lo ricordi? Parla di un numero reale a tale che

$$\frac{a^2+1}{23} = \frac{(a+1)^2}{11}».$$

Belljeet: «Certo! Chiedeva di trovare il valore di $\dfrac{a^3+1}{(a+1)^3}$». Qual è la risposta al problema preferito di Belljeet? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione. Manipolando l'espressione voluta si ottiene

$$\frac{a^3+1}{(a+1)^3} = \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{(a+1)(a+1)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+1}{(a+1)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{23}{11} = \frac{29}{11}.$$

12. Gara di surf

Stufi di viaggiare nel tempo, ϕ-neas e Ferbmat decidono di costruire un'intera spiaggia... in giardino! E con una spiaggia a disposizione, cosa c'è di meglio di una gara di surf? La prova di surf di ϕ-neas viene valutata da 10000 giudici, ciascuno dei quali esprime un voto che è un intero positivo. La media aritmetica dei voti ottenuti è

$$M = 2025{,}abcd$$

dove a, b, c, d sono, in quest'ordine, le uniche cifre decimali di M dopo la virgola. ϕ-neas osserva che, se i giudici fossero stati in numero inferiore a 10000, la media non avrebbe potuto essere uguale a M. Sia S la somma di tutti i possibili valori di M che ϕ-neas potrebbe aver ottenuto. Quanto vale S?

Soluzione. Si ha $M = \frac{2025abcd}{10000}$. Affinché non sia possibile scrivere M come una media di un numero inferiore di interi, bisogna avere che la frazione con cui è espressa M non sia semplificabile. Sappiamo che questo è possibile se e solo se d è dispari ma diverso da 5, quindi $d \in \{1,3,7,9\}$ e il numero N di possibili valori di M è dunque 4000. Inoltre se $abcd$ è ammissibile, lo è anche $10000-abcd$: posso accoppiarle dunque a due a due e ottenere che la somma di tutti i possibili valori di M è $5051\cdot N/2 = 5051\cdot 2000 = 10102000$.

Seconda parte: «Oh, eccoti qua, Perryodico!»

13. Buongiorno agente π

Maggiore MonoGraham: «Buongiorno agente π, finalmente sei arrivato! Oggi abbiamo un incarico speciale per te. Il Dr. DoofenSchwartz ha costruito l'ennesimo macchinario! Fortunatamente, il dispositivo può essere disattivato inserendo come codice le ultime quattro cifre di $1^7+2^7+\ldots+2025^7$». Agente π: «Grrrllrrrll». Quale codice dovrà inserire l'agente π per disattivare il dispositivo?

Soluzione. Sia $S = 1^7+2^7+\ldots+2025^7$. Per trovare le ultime 4 cifre di S, usiamo il Teorema Cinese del Resto e quindi calcoliamo il resto della somma modulo 16 e modulo 625. Innanzitutto notiamo che 2016 è multiplo di 16 e inoltre $2016|i^7+(2016-i)^7$, quindi $S \equiv 2017^7+2019^7+2021^7+2023^7+2025^7 \equiv 1^7+3^7+5^7+7^7+9^7 \equiv 9 \pmod{16}$. Per calcolare il resto nella divisione per 625 notiamo anche in questo caso che $2025|i^7+(2025-i)^7$. Più precisamente

$$\frac{i^7+(2025-i)^7}{2025} = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k(2025-i)^k\cdot i^{6-k} \equiv 7\cdot i^6 \pmod{25}.$$

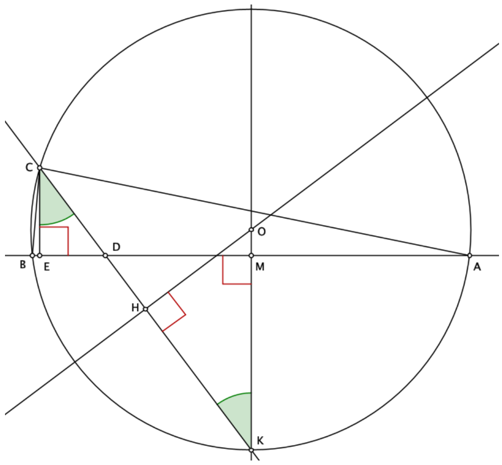
In particolare $\frac{2S}{2025} = \sum_{i=0}^{2025}\frac{i^7+(2025-i)^7}{2025} \equiv 7\sum_{i=0}^{2025} i^7 \equiv 0 \pmod{25}$, ma allora possiamo concludere che $625|S$. L'unica soluzione di $S\equiv 0 \pmod{625}$ e $S \equiv 9 \pmod{16}$ è $S \equiv 9\cdot 625 = 5625 \pmod{10000}$.

14. Sistema di tubi

Come riesce Perryodico l'ornitorinco ad affrontare così tante missioni in così poco tempo? Per muoversi rapidamente tra la casa di ϕ-neas e Ferbmat (punto A), il quartier generale (punto B) e il laboratorio di DoofenSchwartz (punto C), Perryodico utilizza un elaborato sistema di tubi segreti. I tre punti chiave A, B, C formano un triangolo acutangolo. Per velocizzare ulteriormente gli spostamenti, Perryodico considera anche tre stazioni intermedie M, D, E, che sono rispettivamente il punto medio di BC, il piede della bisettrice uscente da A e il piede dell'altezza uscente da A. Sapendo che $AE = 960\,m$, $AD = 1200\,m$ e $DM = 1600\,m$, quanti metri distano il quartier generale e il laboratorio di DoofenSchwartz?

Soluzione. Sia K l'intersezione tra il prolungamento di AD e l'asse del segmento di BC. È noto che essa è sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC: è infatti il punto medio dell'arco BC.

Usando Pitagora troviamo $ED = 720\,m$. Inoltre il triangolo EDC è simile a MDK e conosciamo $MD = 1600\,m$, possiamo trovare anche gli altri lati di MDK: in particolare $MK = \frac{6400}{3}\,m$ mentre $KD = \frac{8000}{3}\,m$. Ora costruiamo O, il centro della circonferenza circoscritta ad ABC, come il punto di incontro degli assi di CK e BC. In particolare, detto H il punto medio di CK, abbiamo che i triangoli OHK e MDK sono nuovamente simili, da cui possiamo ricavare



$$R = OK = \frac{5}{4}HK = \frac{5}{8}CK = \frac{5}{8}(1200\,m + \frac{8000}{3}\,m) = \frac{7250}{3}\,m,$$

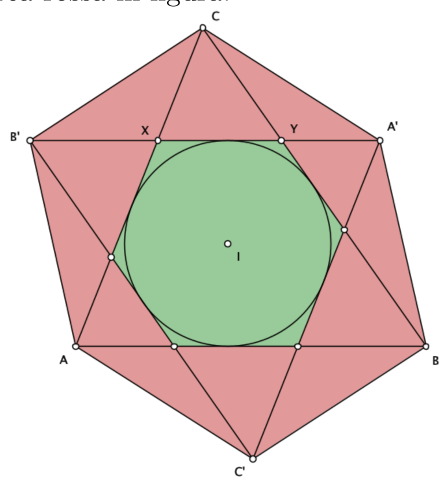
e per differenza $OM = OK - MK = \frac{850}{3}\,m$. Ora non ci resta che calcolare

$$BC = 2\sqrt{R^2 - OM^2} = \frac{100}{3}\sqrt{145^2 - 17^2} = \frac{100}{3} \cdot 144 = 4800\,m$$

15. Danville

Grazie al sistema di tubature, Perryodico l'ornitorinco arriva al laboratorio del Dr. DoofenSchwartz, che ha già creato una nuova invezione, l'*invert-inator*: quando viene puntato su un triangolo, crea il triangolo simmetrico a quello di partenza rispetto al proprio incentro. DoofenSchwartz vuole utilizzarlo sulla città di Danville, che ha la forma di un triangolo ABC di lati lunghi 13, 14 e 15 km, per creare una nuova città, Ellivnad (un triangolo $A'B'C'$), perfettamente simmetrica di Danville rispetto all'incentro di Danville. Per sventare il piano, l'agente π deve calcolare la differenza, in km^2, tra l'area del poligono convesso $AC'BA'CB'$ e l'area dell'intersezione tra Ellivnad e Danville. Quale valore deve trovare l'agente π per sventare il piano?

Soluzione. Scriviamo $S = Area(ABC)$. Notiamo innanzitutto che $ABA'B'$ (e simili) è un parallelogramma e quindi in particolare $A'B'C'$ è congruente ad ABC. Lo scopo è trovare l'area rossa in figura.



Un modo per farlo è calcolare prima l'area dell'esagono $A'BC'AB'C$ come $S_1 = Area(ABA'B') + 2Area(B'A'C)$. Notiamo ora che l'altezza di $ABA'B'$ rispetto ad AB è uguale a $2r$, dove r è il raggio della circonferenza inscritta ad ABC, mentre l'altezza di $B'A'C$ è invece $h_C - 2r$, dove h_C è la misura dell'altezza relativa ad AB. Quindi si ha

$$S_1 = AB \cdot 2r + 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot (h_C - 2r) = AB \cdot h_C = 2Area(ABC) = 2S$$

Per trovare invece l'area dell'esagono verde, essendo un poligono con una circonferenza inscritta di raggio r, la sua area risulterà essere $S_2 = p \cdot r$ dove p è il suo semiperimetro. Calcoliamo ad esempio il lato XY tramite una omotetia (similitudine): infatti $CXY \sim CAB$ e il rapporto di similitudine è pari al rapporto delle altezze che, come visto prima, risulta essere $\frac{h_C - 2r}{h_C}$. Usando anche $h_C = 2S/AB$ e simili possiamo scrivere

$$p = \frac{h_C - 2r}{h_C} \cdot AB + \frac{h_B - 2r}{h_B} \cdot AC + \frac{h_A - 2r}{h_A} \cdot BC = AB + BC + CA - \frac{r}{S}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Possiamo ora sostituire $AB + BC + CA = 42\,km$, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 590\,km^2$, $S = 84\,km^2$, $r = 4\,km$ e quindi

$$S_2 = r \cdot p = 4 \cdot (42 - \frac{4 \cdot 590}{84}) = 56 - \frac{2}{21}\,km^2 \qquad A = S_1 - S_2 = 2S - S_2 = 112 + \frac{2}{21}\,km^2.$$

16. L'aiuola perfetta [$\star$]

ϕ-neas e Ferbmat vogliono costruire un'aiuola triangolare per metterci della sabbia. ϕ-neas prende un primo bastoncino da 15 cm, Ferbmat uno da 13 cm e IsAbel un terzo bastoncino da 14 cm. Anche se il triangolo così ottenuto ha proprio l'area giusta per metterci la sabbia che hanno a disposizione, ϕ-neas non è soddisfatto. Chiede allora un quarto bastoncino che formi con gli ultimi due un nuovo triangolo, diverso da quello precedente, ma avente la stessa area. Per effetto del passaparola arrivano uno dopo l'altro 2025 bastoncini oltre ai tre iniziali: ogni volta il nuovo arrivato viene abbinato con gli ultimi due, mentre il bastoncino più vecchio viene scartato. I 2026 triangoli così provati sono tutti diversi, ma equivalenti: l'ultimo finalmente soddisfa ϕ-neas. Dette a la lunghezza dell'ultimo bastoncino che rende ϕ-neas soddisfatto e b la lunghezza del penultimo scartato, quanto vale $1000 \cdot \frac{a}{b}$?

Soluzione 1. Se gli ultimi tre bastoncini arrivati sono lunghi $\ell_k, \ell_{k+1}, \ell_{k+2}$, allora per capire quanto deve essere lungo il nuovo bastoncino, considero il triangolo ABC con $AC = \ell_k$. Allora consideriamo A' sul prolungamento di AB dal lato di B tale che $A'B = BA$, e allora il nuovo triangolo sarà $A'BC$ che per costruzione ha la medesima area di ABC e ha come lati ℓ_{k+1}, ℓ_{k+2} e $A'C = \ell_{k+3}$. Poiché B è punto medio di AA' e per il teorema della mediana troviamo $A'C^2 + AC^2 = 2(BC^2 + AB^2)$ (medesima conclusione si può avere usando Carnot, oppure formula di Erone e Vièta jumping).

Dunque, chiamando $a_k = \ell_k^2$, si ha $a_{k+3} = 2(a_{k+2} + a_{k+1}) - a_k$, con opportuni dati iniziali. Questa è una successione per ricorrenza lineare e si sa che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \approx A$ dove A è la radice più grande in valore assoluto del polinomio risolutivo, che è $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)(x^2 - 3x + 1)$: ha come radici $-1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\}$, e quindi $A = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ma allora si ha $\frac{\ell_{2030}}{\ell_{2026}} = \sqrt{\frac{a_{2030}}{a_{2026}}} \approx \sqrt{a^4} = A^2$ e quindi risposta è $1000 \cdot \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = 6854,15$.

Soluzione 2. Facendo la stessa costruzione della prima soluzione, ci si può accorgere che il triangolo formato da ℓ_k, ℓ_{k+1} e ℓ_{k+2} diviene sempre più degenere: infatti l'angolo opposto a ℓ_{k+2} diventa sempre più vicino a $180°$. Ma allora ciò vuol dire che per k abbastanza alto abbiamo che $\ell_{k+2} \approx \ell_{k+1} + \ell_k$. Supponendo che il rapporto tra le lunghezze di due bastoncini successivi si "stabilizzi" $\frac{\ell_{k+2}}{\ell_{k+1}} \approx \frac{\ell_{k+1}}{\ell_k} \approx r$, troviamo dalla ricorsione sulle lunghezze che $r = 1 + \frac{1}{r}$ cioé $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La soluzione sarà quindi $1000 \cdot r^4 = 1000 \cdot \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ come prima.

17. Il compasso più grande del mondo

IsAbel torna a far visita a ϕ-neas e Ferbmat. IsAbel: «Ehi, ragazzi. Che state facendo?». ϕ-neas: «Stiamo costruendo il compasso più grande del mondo!» (*Ferbmat disegna per terra una griglia infinita con caselle quadrate di lato* $1m$ *e poi* ϕ*-neas posiziona la punta fissa del compasso in un vertice della griglia).* ϕ-neas: «Ora traccio una circonferenza di raggio $2025m$ e coloro di rosso le caselle che hanno almeno un punto in comune con la circonferenza tracciata dal compasso (anche solo sul bordo della casella)». Quante caselle ha colorato di rosso ϕ-neas?

Soluzione. Supponendo di fissare come origine la posizione della punta del compasso, la figura è chiaramente simmetrica rispetto agli assi coordinati, quindi ci basta controllare quante sono le caselle rosse nel primo quadrante e poi moltiplicare per 4. Immaginiamo di partire ora dal punto $(0, 2025)$: abbiamo 2 quadrati già colorati. Tracciando la circonferenza, passiamo in un nuovo quadratino se attraversiamo una parete orizzontale o una verticale, e questo accade solo quando attraversiamo una retta del tipo $x = k$ oppure $y = j$ con $k, j \in \mathbb{N}$. Questi attraversamenti sono esattamente 2025 per le rette verticali e 2024 per quelle orizzontali (quando arrivo in $(2025, 0)$ conto l'attraversamento di $x = 2025$ ma non conto $y = 0$). Tuttavia ci sono dei punti dove attraverso contemporaneamente una retta verticale ed una orizzontali: questo accade nei punti a coordinate intere che appartengono alla circonferenza. Per ognuno questi punti devo contare una casella colorata in più. In totale dunque nel primo quadrante ci sono $2 + 2025 + 2024 + N$ caselle colorate, dove N è il numero di soluzioni di $x^2 + y^2 = 2025^2$ con x, y naturali positivi. Guardando iterativamente la divisibilità per 3 si trova che necessariamente $x = 81x'$ e $y = 81y'$ da cui $x'^2 + y'^2 = 25^2$ che ha 4 soluzioni $(7,24), (15,20), (20,15), (24,7)$.

Nel primo quadrante ci sono dunque 4055 caselle colorate e quindi in totale ce ne sono $4 \cdot 4055 = 16220$.

18. Sfida matematica [$\star$]

Dopo che Belljeet è riuscito a scendere dall'albero, ϕ-neas e Ferbmat propongono a lui e a BuFourier una sfida. ϕ-neas: «Dovete scegliere ciascuno un numero intero il cui valore assoluto sia minore o uguale a 40. Vincerete se i due numeri scelti, che chiameremo x e y, rispettano la condizione scritta sulla lavagna». (*Nel frattempo, Ferbmat ha scritto sulla lavagna* $x^2 + 3xy + 5y^2 = 3149$). Belljeet: «Ho già calcolato quanto varrà $|x + y|$ nel caso in cui dovessimo vincere!». Che numero ha calcolato Belljeet?

Soluzione 1. Moltiplicando per 4 e completando il quadrato ottengo $(2x + 3y)^2 + 11y^2 = 12596$, da cui $|y| \leq 32$. Inoltre modulo 3 si ottiene che $3|x$ e che $y \equiv \pm 4 \pmod 9$ ma allora $|y| \in \{4, 5, 13, 14, 22, 23, 31, 32\}$. Inoltre, modulo 5 ottengo che il resto di y può essere solo $0, \pm 1$, quindi bisogna controllare solo $|y| \in \{4, 5, 14, 31\}$ e gli unici casi in cui $12596 - 11y^2$ è un quadrato perfetto risultano $y \in \{\pm 5, \pm 31\}$. In questi due casi ottengo rispettivamente $2x + 3y = \pm 111$ e $2x + 3y = \pm 45$. Le soluzioni che ottengo sono quindi $(x, y) \in \{\pm(63, -5), \pm(48, 5), \pm(69, -31), \pm(-24, 31)\}$. Le uniche soluzioni con $|x| \leq 40$ sono dunque $\pm(-24, 31)$ per le quali si ha $|x + y| = 7$.

Soluzione 2. $Q(a, b) = a^2 + 3ab + 5b^2$ è detta una forma quadratica (polinomio omogeneo di grado 2). Per tutte le forme quadratiche di due variabili è possibile trovare una *formula di moltiplicazione*: prodotti di numeri rappresentabili come $Q(a, b)$ sono ancora rappresentabili in questa forma (per $Q'(a, b) = a^2 + b^2$ questa formula è chiamata l'identità di Fibonacci). Nel nostro caso si ha con $x = ac - 5bd$ e $y = ad + bc + 3bd$

$$Q(a, b) \cdot Q(c, d) = (a^2 + 3ab + 5b^2) \cdot (c^2 + 3cd + 5d^2) = x^2 + 3xy + 5y^2 = Q(x, y).$$

Poiché $3149 = 57^2 - 10^2 = 67 \cdot 47$ e inoltre $47 = 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2$ e $67 = 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2$. Possiamo considerare quindi $(a, b) = (3, 2)$ e $(c, d) = (2, 3)$. Sostituendo si trova una possibile coppia che è soluzione $(x, y) = (-24, 31)$, per la quale $|x + y| = 7$. (Possiamo concludere qui; se vogliamo invece trovare altre soluzioni, notiamo che $(a, b) \mapsto (a, -3a - b)$ genera una nuova soluzione della diofantea, nel senso che $Q(a, b) = Q(a, -3a - b)$. Questo permette di trovare altre rappresentazioni per 47 e 67 che, mediante la formula di moltiplicazione, generano altre rappresentazioni per 3149.)

19. C.E.S.E.N.A.T.I.C.N.O.

Poiché l'invenzione C.E.S.E.N.A.T.I.C.O. si è rivelata un fallimento, il Dr. DoofenSchwartz ha deciso di perfezionarla per lanciare un'ultima sfida a Perryodico l'ornitorinco. Nasce così C.E.S.E.N.A.T.I.C.N.O., ovvero *Collocare*

Efficientemente Su Elementi Non Allineati Torri In Colori Non Omologhi. A differenza della versione precedente, questa nuova invenzione permette di collocare 8 torri degli scacchi su una classica scacchiera 8×8, in modo che 4 siano su caselle bianche e 4 su caselle nere, senza che alcuna coppia di torri si trovi sulla stessa riga o sulla stessa colonna. In quanti modi è possibile effettuare questa collocazione?

Soluzione. Le torri ovviamente devono stare su colonne diverse. Dividiamo le colonne in nere e bianche a seconda che la casella in alto sia bianca o nera. Inoltre chiamiamo N_{bb} il numero di colonne bianche sulla quale piazzeremo una torre su casella bianca. Analogamente si definiscono i numeri N_{nn}, N_{bn}, N_{nb}.

L'osservazione fondamentale è che le traverse su cui stanno le caselle nere su colonna nera e le traverse su cui stanno le caselle bianche su colonna bianca sono le stesse (e analogamente per le traverse su cui stanno le caselle bianche su colonne nera e le caselle nere su colonna bianca). questo ci fa dedurre facilmente che $N_{bb}+N_{nn}=4$ e $N_{bn}+N_{nb}=4$. Ragionando analogamente sulle righe e usando che ci sono esattamente 4 torri su caselle bianche e 4 su caselle nere, troviamo che $N_{bb}=N_{nn}=N_{bn}=N_{nb}=2$.

Posso scegliere le colonne nere che hanno una torre su casella nera in $\binom{4}{2}$ modi e analogamente le colonne bianche con una torre su casella bianca, questo determina anche le colonne bianche con casella occupata nera e le colonne nere con casella occupata bianca. Inoltre ho 4! modi per scegliere le traverse per le caselle dello stesso colore della propria colonna e altrettanti per scegliere quelle delle caselle con colore opposto a quella della propria colonna.

Il risultato quindi è dato da $\left(\binom{4}{2}\cdot 4!\right)^2 = 20736$

20. Radici re(g)ali

L'estate sta finendo e ϕ-neas e Ferbmat hanno appena costruito una macchina capace di calcolare il prodotto delle radici reali di un polinomio. Per testarla, decidono di inserire il polinomio $p(x)=16x^4-16x^3-4x+1$. Mentre la macchina sta elaborando il risultato, BuFourier esclama: «Radici reali? Allora devono avere una corona o qualcosa del genere, no?». (*Improvvisamente, da un angolo del giardino compare Perryodico l'ornitorinco*). ϕ-neas: «Oh, eccoti qua, Perryodico!». Detto r il risultato calcolato dalla macchina, quanto vale $10000\cdot r$?

Soluzione 1. Si può notare che $p(x/2)=x^4-2x^3-2x+1$ è un polinomio simmetrico, quindi si può esprimere come x^2 moltiplicato un polinomio in $y=x+\frac{1}{x}$. Difatti

$$p(x/2)=x^2(y^2-2y-2)=x^2(y-(1+\sqrt{3}))(y-(1-\sqrt{3}))=(x^2-(1+\sqrt{3})x+1)(x^2-(1-\sqrt{3})x+1).$$

Quindi le uniche 2 radici reali z_1, z_2 di $p(x/2)$ sono quelle del primo fattore, per cui $z_1z_2=1$. Ora z è radice di $p(x)$ se e solo se $2z$ è radice di $p(x/2)$ quindi il prodotto delle radici reali di $p(x)$ è $\frac{z_1}{2}\cdot\frac{z_2}{2}=1/4$.

Soluzione 2. Provando a completare il quadrato di un trinomio troviamo $p(x)=(4x^2-2x+1)^2-12x^2$ da cui posso scomporre $p(x)$ e concludo come prima.

21. L'ultimo giorno d'estate [$\star$]

ϕ-neas: «È arrivato l'ultimo giorno d'estate, per cui dobbiamo creare un'opera memorabile! Che ne dici di un Tetraedro Gigante $ABCD$?». (*Ferbmat fa cenno di sì e si mette al lavoro, segnando i punti X, Y, Z e W rispettivamente sugli spigoli AB, BC, CD e AD*). ϕ-neas: «Perfetto! I piani ABZ, BCW, CDX e DAY passano tutti per uno stesso punto, proprio come da progetto». (tan(*dace*) *prende il telefono e chiama la mamma*). tan(*dace*): «Mammaaa! ϕ-neas e Ferbmat stanno costruendo un tetraedro gigante in giardino. Ti giuro, si vede chiaramente che i tetraedri $AXCD$ e $ABYD$ hanno volume rispettivamente di 1980 e $2070\,m^3$, mentre i tetraedri $ABCZ$ e $ABCW$ hanno volume uguale!». (*La mamma arriva di corsa... ma, ovviamente, trova davanti a sé il solito giardino*). Quanti m^3 misura il volume del Tetraedro Gigante?

Soluzione 1. Innanzitutto mostriamo che X,Y,Z,W giacciono su uno stesso piano. Chiamiamo

$$P=ABZ\cap BCW\cap CDX\cap DAY.$$

Notiamo che $XZ=ABZ\cap CDX$ e $WY=BCW\cap DAY$. In particolare $P=XZ\cap WY$, quindi i segmenti XZ e WY, sono concorrenti e quindi giacciono necessariamente su uno stesso piano π, e dunque $X,Y,Z,W\in\pi$.

Ora, poiché $ABCZ$ e $ABCW$ hanno il medesimo volume e sono tetraedri aventi stessa base ABC, si ha che Z e W hanno la stessa distanza da ABC. Per Talete possiamo quindi dedurre che $WZ\parallel AC$. Ma allora anche π è parallelo ad AC e, essendo XY intersezione di π con il piano ABC, avremo anche che $XY\parallel AC$. A questo abbiamo

$$Vol(AXCD)=Vol(ABCD)\cdot\frac{AX}{AB}\qquad Vol(ABYD)=Vol(ABCD)\cdot\frac{YB}{BC}$$

Per Talete si ha $\frac{YB}{CB}=\frac{XB}{AB}=1-\frac{AX}{AB}$ e quindi otteniamo

$$Vol(ABYD)=Vol(ABCD)(1-\frac{AX}{AB})=Vol(ABCD)-Vol(AXCD),$$

da cui $Vol(ABCD)=Vol(ABYD)+Vol(AXCD)=4050$.

Soluzione 2. Un modo alternativo per affrontare il problema utilizza le coordinate baricentriche in dimensione 3. Se chiamiamo con P il punto di intersezione dei quattro piani, e con $[a,b,c,d]$, $a+b+c+d=1$ le sue coordinate baricentriche rispetto al tetraedro, possiamo calcolare agevolmente le coordinate baricentriche dei punti X, Y, Z, W come, ad esempio:

$$X = \frac{1}{a+b}[a,b,0,0].$$

Un modo per ottenere questo risultato consiste nel proiettare prima il punto P da D sulla faccia opposta, che equivale a mettere a zero l'ultima coordinata baricentrica di P e poi normalizzare a 1, poi proiettare il punto ottenuto dal vertice C sullo spigolo AB mettendo a zero anche la terza coordinata baricentrica e normalizzando nuovamente. I volumi dei tetraedri $ABCZ$ e $ABCW$ relativamente al volume $|T|$ del tetraedro diventano quindi

$$|ABCZ| = \frac{d}{c+d}|T|, \qquad |ABCW| = \frac{d}{a+d}|T|$$

da cui segue $a=c$. Gli altri due tetraedri menzionati hanno volume:

$$|AXCD| = \frac{b}{a+b}|T| = 1980, \qquad |ABYD| = \frac{c}{b+c}|T| = \frac{a}{a+b}|T| = 2070.$$

Si conclude quindi sommando queste ultime due relazioni: $|T| = 1980+2070 = 4050$.

XXVI Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 10 Maggio 2025

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Sigla iniziale	0095
2	Montagne russe	0025
3	Messaggio romantico	2043
4	C.E.S.E.N.A.T.I.C.O.	1152
5	La macchina del tempo	0078
6	Normale	4051
7	Regali inaspettati	0626
8	Mathside Girls	8136
9	Inverti-monet-inator	0009
10	O.W.C.A.	4050
11	Il problema preferito di Belljeet	0040
12	Gara di surf	2000
13	Buongiorno agente π	5625
14	Sistema di tubi	4800
15	Danville	0112
16	L'aiuola perfetta [$\star$]	6854
17	Il compasso più grande del mondo	6220
18	Sfida matematica [$\star$]	0007
19	C.E.S.E.N.A.T.I.C.N.O.	0736
20	Radici re(g)ali	2500
21	L'ultimo giorno d'estate [$\star$]	4050