XXVI Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 10 Maggio 2025

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Prima parte: «Ehi, dov'è Perryodico?»

1. Sigla iniziale

Poco più di tre giorni di gare e di spiaggia, e poi ricomincia la scuola.
Sembrerebbe davvero una grave mancanza, sprecare il tempo che vola...
Potremmo: trovarci al grattacielo, farci una nuotata,
a beach volley fare una schiacciata
o chiederci: quanti sono i numeri pari di 3 *cifre con la proprietà*
che la cifra delle centinaia è strettamente maggiore della somma delle cifre delle decine e delle unità?
Restate qui con ϕ-neas e Ferbmat: comincia il loro show!
[MAMMA, ϕ-NEAS E FERBMAT HANNO FATTO IL PROBLEMA INIZIALE!]

2. Montagne russe

ϕ-neas: «Ehi Ferbmat, so cosa faremo oggi: costruiremo delle montagne russe!» (*Ferbmat approva silenziosamente*). ϕ-neas: «I binari sono posti sugli spigoli di un icosaedro. Il vagone partirà da un vertice e dovrà seguire un percorso che non attraversi mai due volte lo stesso spigolo, arrivando in un vertice che non necessariamente sarà quello da cui è partito». Quanti spigoli, al massimo, potrà attraversare il vagone?

3. Messaggio romantico

Mentre ϕ-neas e Ferbmat costruiscono le montagne russe, tan(*dace*) è al telefono con Stauchy, che cerca di convincerla a scrivere un messaggio romantico per Jermain. tan(*dace*) decide quindi di scrivere tutti i numeri interi da 1 fino a un certo intero n. Per rendere il tutto ancora più speciale, vuole che, al termine della scrittura del numero n, siano state utilizzate esattamente $2025 \cdot n$ cifre in totale. Quanto vale la somma delle cifre di n?

4. C.E.S.E.N.A.T.I.C.O.

ϕ-neas: «Ehi, dov'è Perryodico?». Perryodico, o meglio agente π, è impegnato nella sua missione quotidiana contro il Dr. DoofenSchwartz, che è riuscito a catturarlo! Dr. DoofenSchwartz: «Ti ho preso, Perryodico l'ornitorinco... Guarda la mia ultima invenzione: si chiama *Collocare Efficientemente Su Elementi Non Allineati Torri In Colori Omologhi*, in breve C.E.S.E.N.A.T.I.C.O.! Essa permette di collocare 8 torri degli scacchi su una classica scacchiera 8×8, in modo che stiano tutte su caselle dello stesso colore, senza che alcuna coppia di torri si trovi sulla stessa riga o sulla stessa colonna». Neanche il tempo di finire la frase, che Perryodico riesce a liberarsi. «Sventura a te, Perryodico l'ornitorinco!» urla DoofenSchwartz. In quanti modi è possibile effettuare la collocazione?

5. La macchina del tempo

Dopo aver costruito le montagne russe, ϕ-neas e Ferbmat si mettono alla prova creando un portale che permette di viaggiare nel tempo! Hanno tracciato il progetto della loro ultima creazione su un foglio. Sul foglio è disegnato il portale, che è un esagono convesso $ABCDEF$, con le seguenti annotazioni:

- I vertici dell'esagono si trovano in punti a coordinate intere (in metri).
- I lati dell'esagono hanno lunghezze intere (in metri), tutte diverse tra loro.
- I lati opposti dell'esagono sono paralleli.
- L'angolo $\hat{A}$ è retto.
- Tre lati consecutivi dell'esagono misurano, in quest'ordine, $3m$, $8m$ e $5m$.

Per evitare paradossi temporali, il portale deve avere la forma dell'esagono di area minima che soddisfa tutte queste condizioni. Quanti m^2 misura l'area del portale?

6. Normale

Normale è il robot umanoide costruito dal Dr. DoofenSchwartz per essere il suo assistente personale. «Il mio nome è Normale. I nemici naturali dell'ornitorinco sono l'uomo... e i numeri primi esprimibili come $n^4 - 2023n^2 + 1$, con n intero» afferma Normale con voce robotica. Quanto vale la somma dei numeri primi nemici degli ornitorinchi? O degli ornitorinci? O degli ornituncoli... insomma, avete capito. Quanto vale?

7. Regali inaspettati

Il Dr. DoofenSchwartz decide di fare una sorpresa a sua figlia. Vanasse DoofenSchwartz: «Papà, che ci fai qui?». Dr. DoofenSchwartz: «Ho una sorpresa per te. È una cosa che hai sempre desiderato e chiesto mille volte. Nelle mie mani ho la chiave della tua...». Vanasse DoofenSchwartz: «... della mia nuova macchina?!». Dr. DoofenSchwartz: «No, della tua felicità! Dicevi che se ti avessi comprato un polinomio sarei stato un padre stupendo». (*Il Dr. DoofenSchwartz ha infatti acquistato un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali tale che* $p(p(x)) = p(x) + x^4 + x^2 + 1$). Quanto vale $p(2025)$?

8. Mathside Girls

Le Mathside Girls sono un gruppo di brillanti studentesse che adorano risolvere problemi di matematica in compagnia e raccogliere distintivi svolgendo ogni tipo di attività. tan(*dace*) vuole diventare una di loro entro domani e, per riuscirci, deve guadagnare 50 distintivi in un solo giorno! Il cinquantesimo e ultimo distintivo è quello di *consegna tortine*. Per ottenerlo deve consegnare n tortine, dove n è il più grande intero positivo di 5 cifre, con tutte le cifre distinte tra loro e nessuna cifra nulla, tale che sia divisibile per ciascuna delle proprie cifre. Quante sono le tortine?

9. Inverti-monet-inator

Stanco dei suoi insuccessi, il Dr. DoofenSchwartz crea il potente *inverti-monet-inator*! Lo testa nel suo laboratorio segreto dove si trova una griglia di 2025×2025 monete, ciascuna delle quali mostra T o C con uguale probabilità, indipendentemente dalle altre. Se fra due monete T (rispettivamente C) nella stessa riga o colonna ci sono solo monete C (rispettivamente T), l'*inverti-monet-inator* può capovolgere tutte le C (rispettivamente T). Ad esempio, se una riga contiene la sequenza TTCCCTTCT, è possibile effettuare la mossa T(TCCCT)TCT $\to$ T(TTTTT)TCT. Qual è la probabilità che DoofenSchwartz possa far mostrare la stessa faccia a tutte le monete, azionando opportunamente l'*inverti-monet-inator* un numero finito di volte? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

10. O.W.C.A.

Maggiore MonoGraham: «Curl! Non c'è un attimo di pace... Il Dr. DoofenSchwartz ha costruito un *triangolo-rettangol-inator*, che genera triangoli rettangoli. Contatta subito tutti gli agenti della O.W.C.A.!». Curl: «Fatto! L'agente π non è contattabile. Tuttavia, l'agente δ ha scoperto che l'ultimo triangolo ABC creato da DoofenSchwartz è rettangolo in B, e che le tangenti alla circonferenza di diametro AC in B e C si incontrano in X. L'agente α ha invece scoperto che il circocentro del triangolo BCX giace sulla circonferenza di diametro AC». Maggiore MonoGraham: «Per disattivare il macchinario non ci resta che capire quanto misurano i lati AB e AC...». Curl: «L'agente γ mi ha appena comunicato che il lato AB misura 2025 metri, signore». Quanti metri misura AC?

11. Il problema preferito di Belljeet

Impegnati nella costruzione della macchina del tempo, ϕ-neas e Ferbmat non si accorgono che Belljeet è rimasto bloccato su un albero, ma per fortuna c'è qualcuno pronto ad aiutarlo! BuFourier: «Ehi, guarda qua! Ho una calcolatrice e il tuo problema preferito di matematica! Te lo ricordi? Parla di un numero reale a tale che

$$\frac{a^2+1}{23} = \frac{(a+1)^2}{11}».$$

Belljeet: «Certo! Chiedeva di trovare il valore di $\dfrac{a^3+1}{(a+1)^3}$». Qual è la risposta al problema preferito di Belljeet? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

12. Gara di surf

Stufi di viaggiare nel tempo, ϕ-neas e Ferbmat decidono di costruire un'intera spiaggia... in giardino! E con una spiaggia a disposizione, cosa c'è di meglio di una gara di surf? La prova di surf di ϕ-neas viene valutata da 10000 giudici, ciascuno dei quali esprime un voto che è un intero positivo. La media aritmetica dei voti ottenuti è

$$M = 2025{,}abcd$$

dove a, b, c, d sono, in quest'ordine, le uniche cifre decimali di M dopo la virgola. ϕ-neas osserva che, se i giudici fossero stati in numero inferiore a 10000, la media non avrebbe potuto essere uguale a M. Sia S la somma di tutti i possibili valori di M che ϕ-neas potrebbe aver ottenuto. Quanto vale S?

SECONDA PARTE: «OH, ECCOTI QUA, PERRYODICO!»

13. Buongiorno agente π

Maggiore MonoGraham: «Buongiorno agente π, finalmente sei arrivato! Oggi abbiamo un incarico speciale per te. Il Dr. DoofenSchwartz ha costruito l'ennesimo macchinario! Fortunatamente, il dispositivo può essere disattivato inserendo come codice le ultime quattro cifre di $1^7+2^7+\ldots+2025^7$». Agente π: «Grrrllrrrll». Quale codice dovrà inserire l'agente π per disattivare il dispositivo?

14. Sistema di tubi

Come riesce Perryodico l'ornitorinco ad affrontare così tante missioni in così poco tempo? Per muoversi rapidamente tra la casa di ϕ-neas e Ferbmat (punto A), il quartier generale (punto B) e il laboratorio di DoofenSchwartz (punto C), Perryodico utilizza un elaborato sistema di tubi segreti. I tre punti chiave A, B, C formano un triangolo acutangolo. Per velocizzare ulteriormente gli spostamenti, Perryodico considera anche tre stazioni intermedie M, D, E, che sono rispettivamente il punto medio di BC, il piede della bisettrice uscente da A e il piede dell'altezza uscente da A. Sapendo che $AE = 960\,m$, $AD = 1200\,m$ e $DM = 1600\,m$, quanti metri distano il quartier generale e il laboratorio di DoofenSchwartz?

15. Danville

Grazie al sistema di tubature, Perryodico l'ornitorinco arriva al laboratorio del Dr. DoofenSchwartz, che ha già creato una nuova invezione, l'*invert-inator*: quando viene puntato su un triangolo, crea il triangolo simmetrico a quello di partenza rispetto al proprio incentro. DoofenSchwartz vuole utilizzarlo sulla città di Danville, che ha la forma di un triangolo ABC di lati lunghi 13, 14 e $15\,km$, per creare una nuova città, Ellivnad (un triangolo $A'B'C'$), perfettamente simmetrica di Danville rispetto all'incentro di Danville. Per sventare il piano, l'agente π deve calcolare la differenza, in km^2, tra l'area del poligono convesso $AC'BA'CB'$ e l'area dell'intersezione tra Ellivnad e Danville. Quale valore deve trovare l'agente π per sventare il piano?

16. L'aiuola perfetta [$\star$]

ϕ-neas e Ferbmat vogliono costruire un'aiuola triangolare per metterci della sabbia. ϕ-neas prende un primo bastoncino da $15\,cm$, Ferbmat uno da $13\,cm$ e IsAbel un terzo bastoncino da $14\,cm$. Anche se il triangolo così ottenuto ha proprio l'area giusta per metterci la sabbia che hanno a disposizione, ϕ-neas non è soddisfatto. Chiede allora un quarto bastoncino che formi con gli ultimi due un nuovo triangolo, diverso da quello precedente, ma avente la stessa area. Per effetto del passaparola arrivano uno dopo l'altro 2025 bastoncini oltre ai tre iniziali: ogni volta il nuovo arrivato viene abbinato con gli ultimi due, mentre il bastoncino più vecchio viene scartato. I 2026 triangoli così provati sono tutti diversi, ma equivalenti: l'ultimo finalmente soddisfa ϕ-neas. Dette a la lunghezza dell'ultimo bastoncino che rende ϕ-neas soddisfatto e b la lunghezza del penultimo scartato, quanto vale $1000 \cdot \frac{a}{b}$?

17. Il compasso più grande del mondo

IsAbel torna a far visita a ϕ-neas e Ferbmat. IsAbel: «Ehi, ragazzi. Che state facendo?». ϕ-neas: «Stiamo costruendo il compasso più grande del mondo!» (*Ferbmat disegna per terra una griglia infinita con caselle quadrate di lato* $1\,m$ *e poi* ϕ*-neas posiziona la punta fissa del compasso in un vertice della griglia).* ϕ-neas: «Ora traccio una circonferenza di raggio $2025\,m$ e coloro di rosso le caselle che hanno almeno un punto in comune con la circonferenza tracciata dal compasso (anche solo sul bordo della casella)». Quante caselle ha colorato di rosso ϕ-neas?

18. Sfida matematica [$\star$]

Dopo che Belljeet è riuscito a scendere dall'albero, ϕ-neas e Ferbmat propongono a lui e a BuFourier una sfida. ϕ-neas: «Dovete scegliere ciascuno un numero intero il cui valore assoluto sia minore o uguale a 40. Vincerete se i due numeri scelti, che chiameremo x e y, rispettano la condizione scritta sulla lavagna». (*Nel frattempo, Ferbmat ha scritto sulla lavagna* $x^2+3xy+5y^2=3149$). Belljeet: «Ho già calcolato quanto varrà $|x+y|$ nel caso in cui dovessimo vincere!». Che numero ha calcolato Belljeet?

19. C.E.S.E.N.A.T.I.C.N.O.

Poiché l'invenzione C.E.S.E.N.A.T.I.C.O. si è rivelata un fallimento, il Dr. DoofenSchwartz ha deciso di perfezionarla per lanciare un'ultima sfida a Perryodico l'ornitorinco. Nasce così C.E.S.E.N.A.T.I.C.N.O., ovvero *Collocare Efficientemente Su Elementi Non Allineati Torri In Colori Non Omologhi.* A differenza della versione precedente, questa nuova invenzione permette di collocare 8 torri degli scacchi su una classica scacchiera 8×8, in modo che 4 siano su caselle bianche e 4 su caselle nere, senza che alcuna coppia di torri si trovi sulla stessa riga o sulla stessa colonna. In quanti modi è possibile effettuare questa collocazione?

20. Radici re(g)ali

L'estate sta finendo e ϕ-neas e Ferbmat hanno appena costruito una macchina capace di calcolare il prodotto delle radici reali di un polinomio. Per testarla, decidono di inserire il polinomio $p(x)=16x^4-16x^3-4x+1$. Mentre la macchina sta elaborando il risultato, BuFourier esclama: «Radici reali? Allora devono avere una corona o qualcosa del genere, no?». (*Improvvisamente, da un angolo del giardino compare Perryodico l'ornitorinco*). ϕ-neas: «Oh, eccoti qua, Perryodico!». Detto r il risultato calcolato dalla macchina, quanto vale $10000\cdot r$?

21. L'ultimo giorno d'estate [$\star$]

ϕ-neas: «È arrivato l'ultimo giorno d'estate, per cui dobbiamo creare un'opera memorabile! Che ne dici di un Tetraedro Gigante $ABCD$?». (*Ferbmat fa cenno di sì e si mette al lavoro, segnando i punti* X, Y, Z *e* W *rispettivamente sugli spigoli* AB, BC, CD *e* AD). ϕ-neas: «Perfetto! I piani ABZ, BCW, CDX e DAY passano tutti per uno stesso punto, proprio come da progetto». (tan(*dace*) *prende il telefono e chiama la mamma*). tan(*dace*): «Mammaaa! ϕ-neas e Ferbmat stanno costruendo un tetraedro gigante in giardino. Ti giuro, si vede chiaramente che i tetraedri $AXCD$ e $ABYD$ hanno volume rispettivamente di 1980 e $2070\,m^3$, mentre i tetraedri $ABCZ$ e $ABCW$ hanno volume uguale!». (*La mamma arriva di corsa... ma, ovviamente, trova davanti a sé il solito giardino*). Quanti m^3 misura il volume del Tetraedro Gigante?

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Sigla iniziale	0095
2	Montagne russe	0025
3	Messaggio romantico	2043
4	C.E.S.E.N.A.T.I.C.O.	1152
5	La macchina del tempo	0078
6	Normale	4051
7	Regali inaspettati	0626
8	Mathside Girls	8136
9	Inverti-monet-inator	0009
10	O.W.C.A.	4050
11	Il problema preferito di Belljeet	0040
12	Gara di surf	2000
13	Buongiorno agente π	5625
14	Sistema di tubi	4800
15	Danville	0112
16	L'aiuola perfetta [$\star$]	6854
17	Il compasso più grande del mondo	6220
18	Sfida matematica [$\star$]	0007
19	C.E.S.E.N.A.T.I.C.N.O.	0736
20	Radici re(g)ali	2500
21	L'ultimo giorno d'estate [$\star$]	4050