6° Trofeo COPERNICO

Gara a squadre di matematica – 05 Maggio 2025

Soluzioni

(1) La mitica sigla	**4000**
(2) Il primo avvistamento di un minidisco (Ep. 1)	**0001**
(3) Alcor e Actarus (Ep. 1)	**0007**
(4) Rigel (Ep. 1)	**0037**
(5) Arriva Goldrake! (Ep. 1)	**0504**
(6) La faccia oscura della Luna (Ep. 2)	**0565**
(7) Allarme rosso (Ep. 5)	**0271**
(8) Alabarda spaziale! (Ep. 55)	**5158**
(9) L'eclissi solare (Ep. 11)	**0006**
(10) La nuova tattica di Hydargos (Ep. 23)	**0300**
(11) La difesa magnetica (Ep. 22)	**0017**
(12) Goldrake! Agganciamento! (Ep. 4)	**1253**
(13) Le radiazioni di vegatron (Ep. 51)	**0256**
(14) Il mostro mutante (Ep. 33)	**2025**
(15) Goldrake 2: Avanti! (Ep. 35)	**5778**
(16) S.O.S. dal centro spaziale (Ep. 42)	**0302**
(17) Ultimatum a Tokyo (Ep. 60)	**6426**
(18) Condizionamento telepatico (Ep.71)	**0014**
(19) Il sacrificio di Rubina (Ep. 72)	**0150**
(20) La morte di re Vega (Ep. 74)	**7744**
(21) Non tutti sanno che …	**0195**

(1) La mitica sigla

Siano α, β, γ e δ gli zeri di $p(x)$. Allora si ha

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)=a_3^2-2a_2=400-230=170$$

Dato che il numero delle diagonali di un poligono di n lati è $\frac{(n-3)n}{2}$, allora si ottiene $n^2-3n-340=0$. Risolvendo si ha $n=20$. Il perimetro del poligono è $2p=500=4\cdot 5^3$, che in base 5 si scrive quindi come 4000. La risposta è quindi $\mathbf{4000}$.

(2) Il primo avvistamento di un minidisco (Ep. 1)

Considera la somma $\binom{2025}{1}+2025\binom{2025}{3}+2025^2\binom{2025}{5}+\cdots+2025^9\binom{2025}{19}+2025^{10}\binom{2025}{21}$.

Si osserva che $2024=2^3\cdot 11\cdot 23$, quindi $2025\equiv 1 \bmod 23$, così come 2025^n. Inoltre $\binom{2025}{n}\equiv 0 \bmod 23$ con $3\leq n\leq 21$. Ne segue che tutti gli addendi della somma, eccetto il primo e l'ultimo, sono congrui $0 \bmod 23$, quindi $2025\binom{2025}{3}+\cdots+2025^{10}\binom{2025}{2023}\equiv 0 \bmod 23$. Allora, poiché $\binom{2025}{1}\equiv 1 \bmod 23$, la nostra somma è congrua $1 \bmod 23$. La risposta è pertanto $\mathbf{0001}$.

(3) Alcor e Actarus (Ep. 1)

Se lo zero si trova nella m-esima posizione da destra, N si scrive come $10^m A+B$, con $A>0$ e $B<10^{m-1}$. Cancellando lo zero si ha $10^m A+B=9(10^{m-1}A+B)$, cioè $10^{m-1}A=8B$. Visto che $B<10^{m-1}$, si ottiene $A<8$. Visto che quello rimosso deve essere l'unico zero, si ha che B non è multiplo di 10, ma per ogni scelta di $A=1,2,3,4,5,6,7$ esiste esattamente un valore di m per il quale $B=\frac{10^{m-1}A}{8}$ sia intero e non multiplo di 10. I numeri ottenuti sono 10125, 2025, 30375, 405, 50625, 6075, 70875. La risposta è $\mathbf{0007}$.

(4) Rigel (Ep. 1)

Dato che $2025=45^2$, il prossimo anno che è un quadrato perfetto è $46^2=2116$. Cerchiamo di trovare i quadrati perfetti che dividono i numeri tra 2025 e 2116 con una sorta di crivello considerando i quadrati dei numeri primi in ordine crescente. Iniziamo con i numeri divisibili per $2^2=4$ che vanno da 2028 a 2116 e sono 23. Passiamo poi ai divisibili per $3^2=9$ che vanno da 2025 a 2115 che sono 11. I divisibili per $5^2=25$ che vanno da 2025 a 2100 che sono 4. I divisibili per $7^2=49$ che sono 2058 e 2107 quindi 2. L'unico divisibile per $11^2=121$ è 2057. L'unico divisibile per $13^2=169$ è 2028. L'unico divisibile per $23^2=529$ è 2116. In totale sono 43 numeri. In tal modo però abbiamo contato più volte i numeri che hanno più di un quadrato perfetto nella fattorizzazione. Dobbiamo allora togliere quelli che sono divisibili per $4\cdot 9=36$ (che sono 2), $4\cdot 25=100$ (che è 1), $4\cdot 49=196$ (nessuno), $4\cdot 121=484$ (nessuno), $4\cdot 169=676$ (che è 1), $4\cdot 529=2116$ (che è 1), $9\cdot 25=225$ (che è 1), $9\cdot 49=441$ (nessuno), $9\cdot 121=1089$ (nessuno), $9\cdot 169=1521$ (nessuno), $25\cdot 49=1225$ (nessuno). Quindi dobbiamo togliere 6 a 43. La risposta è pertanto $\mathbf{0037}$.

(5) Arriva Goldrake! (Ep. 1)

Usando il teorema del binomiale scriviamo

$$(28+1)^{72}-1=\sum_{k=1}^{72}\binom{72}{k}28^k.$$

La massima potenza di 2 che divide il termine corrispondente a $k=1$ è 2^5, mentre tutti gli altri termini sono divisibili almeno per 2^6, quindi 2^5 è la massima potenza di 2 che divide $29^{72}-1$. Allo stesso modo 7 è la massima potenza di 7 che lo divide, quindi i divisori di $29^{72}-1$ della forma $2^a\cdot 7^b$ soddisfano $0\leq a\leq 5$ e $0\leq b\leq 1$. La loro somma è

$$\sum_{a=0}^{5}\sum_{b=0}^{1}2^a\cdot 7^b=\frac{2^6-1}{2-1}\cdot\frac{7^2-1}{7-1}=63\cdot 8=504\,.$$

La risposta è pertanto $\mathbf{0504}$.

(6) La faccia oscura della Luna (Ep. 2)

Affinché l'intersezione della piramide con un piano formi un pentagono, il piano deve intersecare tutte le facce della piramide. Visto che il pentagono è regolare, detti P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i suoi vertici (vedi Figura 1), si ha che P_1P_5 è parallelo a BD. Detto P_0 il punto d'intersezione tra il piano e il prolungamento del segmento VA, i triangoli $P_1P_3P_5$ e $P_0P_1P_5$ sono triangoli (aurei) congruenti. Inoltre $\overline{P_2P_4} = \varphi\overline{P_1P_5}$ da cui $\overline{P_0N} = \varphi\overline{P_0M}$, dove M, N sono rispettivamente i punti medi di P_1P_5 e P_2P_4.

Con queste informazioni, consideriamo la sezione determinata dal piano passante per i punti A, C, V, come nella Figura 2: scriviamo i punti P_0, P_3 come $P_0 = V + \lambda(A - V)$ e $P_3 = V + \mu(C - V)$.

Ora si ha che

$$M = \frac{P_0 + P_3}{2} = \frac{\lambda}{2}A + \frac{\mu}{2}C + \left(1 + \frac{\lambda + \mu}{2}\right)V$$

e M appartiene al segmento AC, dunque $1 - \frac{\lambda+\mu}{2} = 0$, cioè $\mu = 2 - \lambda$.

Se O è il piede dell'altezza della piramide sulla base, $O = \frac{A+C}{2}$, N giace sul segmento VO e $\overline{P_0N} = \varphi\overline{P_0M}$. Questo si traduce nella condizione $P_0 = \varphi(M - P_0) = N = \eta V + (1 - \eta)O$,

cioè

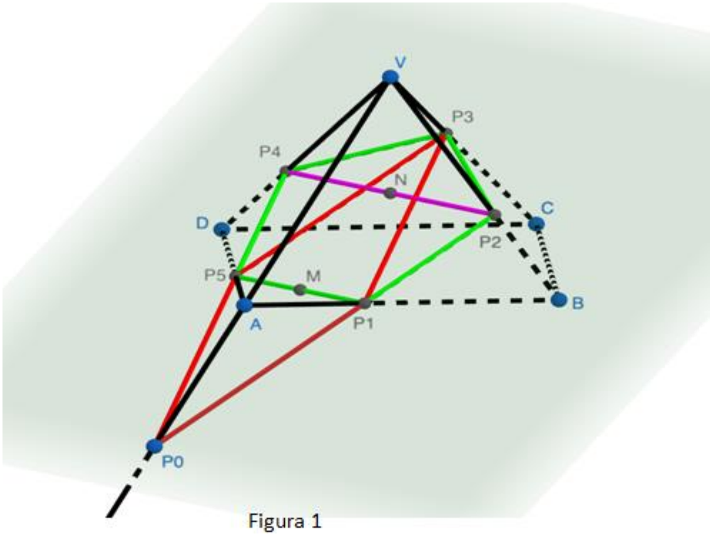


Figura 1

$$V + \lambda(A - V)\varphi + \left(-\frac{\lambda}{2}A + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)C + (\lambda - 1)V\right) = \eta V + \frac{1-\eta}{2}A + \frac{1-\eta}{2}C.$$

Eguagliando i coefficienti si ricavano le relazioni

$$\begin{cases} \lambda - \varphi\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{1-\eta}{2} \\ \varphi\left(1 - \dfrac{\lambda}{2}\right) = \dfrac{1-\eta}{2} \\ 1 - \lambda + \varphi(\lambda - 1) = \eta \end{cases}$$

da cui $\lambda = \varphi$ e $\eta = 2 - \varphi$. Per comodità definiamo $y := \frac{l}{\sqrt{2}}$ e introduciamo delle coordinate in modo che $A(0, -y, 0)$, $B(y, 0,0)$, $C(0, y, 0)$, $D(-y, 0,0)$, $V(0,0, h)$. Dalla discussione segue che $M(0, (1 - \varphi)y, 0)$ e quindi

$$\overline{P_1P_5} = 2(2 - \varphi)y,$$

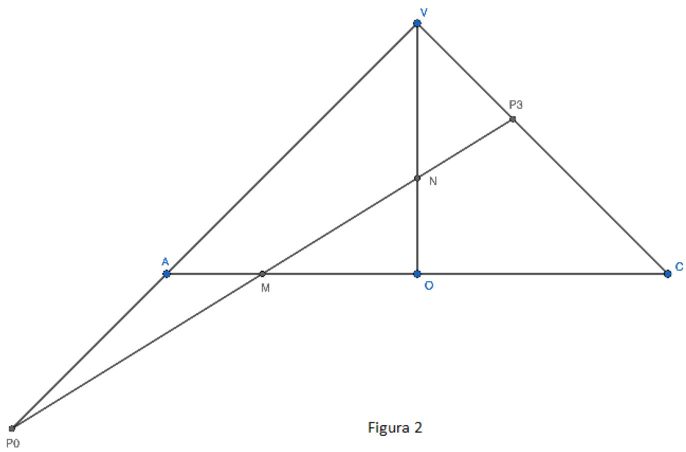


Figura 2

inoltre $P_0 = (0, -\varphi y, (1 - \varphi)h)$, da cui

$$\overline{P_0M}^2 = y^2 + (1 - \varphi)^2h^2.$$

Detto a il lato del pentagono, $a = \overline{P_1P_5}$ e $\varphi a = \overline{P_0P_1}$, quindi per il teorema di Pitagora

$$\overline{P_0M}^2 = (\varphi a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

e infine

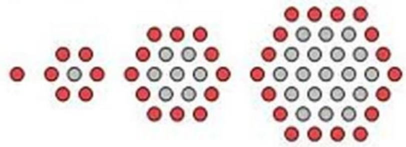
$$y^2 + (1 - \varphi)^2h^2 = \tfrac{4\varphi+3}{4}(2(2 - \varphi)y)^2,$$

cioè $h = y$. Questo vuol dire che l'altezza della piramide è $h = \frac{l}{\sqrt{2}}$. Sostituendo i valori si ottiene

$$h = \frac{800}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \cdot 100 = 565{,}68\,m.$$

La risposta è $\mathbf{0565}$.

(7) Allarme rosso (Ep. 5)



Si osserva facilmente che un numero esagonale si ottiene per ricorsione dalla seguente relazione $E_{n+1} = 6n + E_n$, con $E_1 = 1$. Per ottenere la formula chiusa consideriamo la somma $E_2 - E_1 = 6$, $E_3 - E_2 = 12$, … , $E_{n+1} - E_n = 6n$; sommando membro a membro si ottiene

$$E_{n+1} - E_1 = 6 + 12 + \cdots + 6n = 6(1 + 2 + \cdots + n) = 3n(n+1) \quad \to$$
$$E_{n+1} = 1 + 3n(n+1)$$

Utilizzando la formula chiusa scriviamo la somma di tre numeri esagonali consecutivi

$$E_{n+2} + E_{n+1} + E_n = 1 + 3(n+1)(n+2) + 1 + 3n(n+1) + 1 + 3n(n-1) =$$
$$= 3[1 + (n+2)(n+1) + n(n+1) + n(n-1)] =$$
$$= 3[1 + 3n^2 + 3n + 2] = 9(n^2 + n + 1)$$

Ora $657 = 9(n^2 + n + 1)$ da cui si ottiene $n^2 + n - 72 = (n+9)(n-8) = 0$. Dunque $n = 8$ e il numero esagonale cercato è $E_{10} = 1 + 3 \cdot 9 \cdot 10 = 271$. La risposta è $\mathbf{0271}$.

(8) Alabarda spaziale (Ep. 55)

Il volume del prisma è $V = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^3$, dove l è la misura dello spigolo di base e dell'altezza. Si ottiene $27000 = 3\sqrt{3} l^3$ e quindi $l = 10\sqrt{3}$. La superficie totale dei due solidi è data dalla superficie del prisma più due volte la superficie della sezione. La superficie laterale del prisma è $S_L = 6l^2$, la superficie delle due basi è $S_{2B} = 3\sqrt{3}\, l^2$. La sezione che si ottiene con il taglio è un esagono con due lati opposti coincidenti con gli spigoli del prisma, gli altri quattro lati giacciono su quattro facce laterali congiungono un vertice al punto medio dello spigolo della faccia laterale non concorrente nel vertice. La misura di questi è $s = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} l$. La sezione è quindi costituita da due trapezi isosceli congruenti aventi altezza l, base minore l e base maggiore $2l$. L'area di una sezione è quindi $A_S = 3l^2$. La superficie totale dei due solidi è $S_{TOT} = 6l^2 + 6l^2 + 3\sqrt{3} l^2 = \left(12 + 3\sqrt{3}\right) l^2 = 17{,}1963 \cdot 300 = 5158{,}89$. La risposta è pertanto $\mathbf{5158}$.

(9) L'eclissi solare (Ep. 11)

Moltiplicando l'equazione per 4 e aggiungendo 1 si ottiene

$$(2y+1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$$

Il membro di destra è quasi un quadrato perfetto, infatti

$$(2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 1 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (2x^2 + x + 1)^2 - x^2 + 2x$$

Se accade che $3x^2 + 4x + 1 > 0$ e $x^2 - 2x > 0$, allora si conclude che

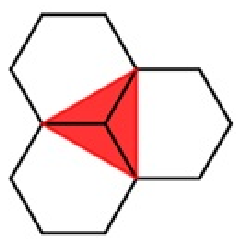
$$(2x^2 + x)^2 < (2y+1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2,$$

che è impossibile in quanto non può esserci un quadrato strettamente compreso tra i quadrati di due numeri successivi. Allora rimangono da analizzare i casi in cui una delle quantità sia non positiva, cioè $(3x+1)(x+1) \le 0$ oppure $x(x-2) \le 0$. La prima disuguaglianza dà $-1 \le x \le -\frac{1}{3}$ ed la seconda dà $0 \le x \le 2$, quindi bisogna controllare i casi $x = -1, 0, 1, 2$.

- $x = -1$: $(2y+1)^2 = 1$ e quindi $y = -1, 0$;
- $x = 0$: $(2y+1)^2 = 1$ e quindi $y = -1, 0$;
- $x = 1$: $(2y+1)^2 = 17$ non ha soluzioni;
- $x = 2$: $(2y+1)^2 = 121$ e quindi $y = -6, 5$.

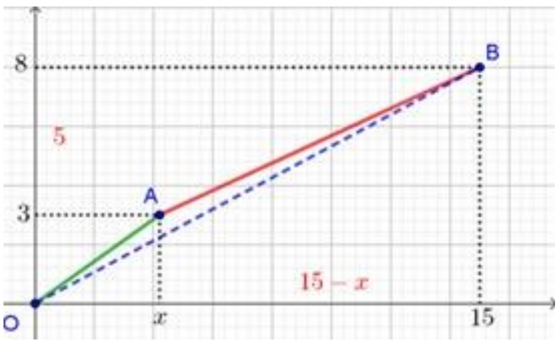
Le soluzioni sono allora: $(-1,-1)$; $(-1,0)$; $(0,-1)$; $(0,0)$; $(2,-6)$; $(2,5)$. La risposta è $\mathbf{0006}$.

(10) La nuova tattica di Hydargos (Ep. 23)



Il triangolo rosso è diviso in tre triangoli isosceli congruenti ciascuno dei quali è equivalente a un sesto di ciascun esagono in figura. Ne segue che la parte della figura bianca è equivalente a cinque volte la parte colorata di rosso. Quindi la risposta è $\mathbf{0300}$.

(11) La difesa magnetica (Ep. 22)



Poiché $y = 15 - x$ si tratta di trovare il minimo di $f(x) = \sqrt{9+x^2} + \sqrt{25+(15-x)^2}$. Siano OA e AB due segmenti tali che

$$\overline{OA} = \sqrt{9+x^2} \text{ e } \overline{AB} = \sqrt{25+(15-x)^2}\,.$$

Il minimo della loro somma si ha se i due segmenti sono adiacenti: per la disuguaglianza triangolare infatti se OA e AB non fossero adiacenti, si avrebbe $OA + AB > OB$ (vedi figura) e quindi non realizzerebbero la configurazione di minima somma. Quindi si ha che

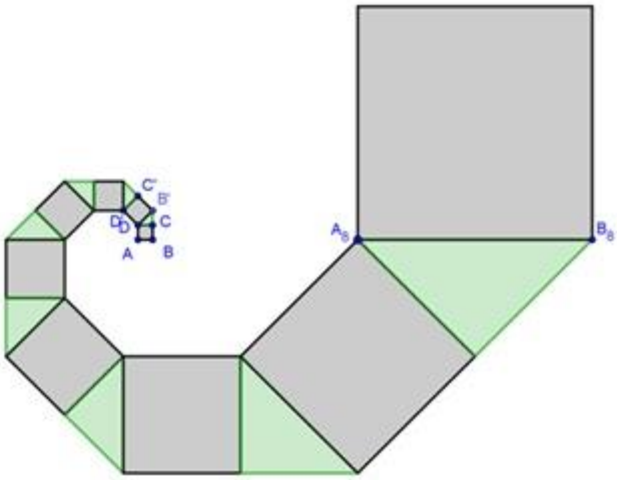
$$\min f(x) = \overline{OB} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$$

La risposta è $\mathbf{0017}$.

(12) Goldrake! Agganciamento! (Ep. 4)

Per contare i possibili "percorsi", li dividiamo in due famiglie: quelli in cui si effettua il "salto" speciale e quelli in cui non lo si effettua. Nel secondo caso i percorsi si trovano contando gli anagrammi di una parola formata da 5 lettere P, che indicano la diminuzione del primo numero, e 5 lettere S, che indicano la diminuzione del secondo numero. Queste sequenze sono $\binom{5+5}{5} = 252$. I percorsi del primo tipo prevedono un totale 10 P e soltanto 4 S, quindi sono in corrispondenza con i percorsi che vanno da $(14{,}4)$ a $(0{,}0)$. Usando il caso precedente questi sono $\binom{10+4}{10} = 1001$. Le sequenze di allineamento totali sono $252 + 1001 = 1253$. La risposta è $\mathbf{1253}$.

(13) Le radiazioni di vegatron (Ep. 51)



La sequenza di poligoni è costituita da quadrati e triangoli rettangoli isosceli. Se abbiamo al massimo 4 colori per colorare tutti gli n poligoni, in modo che due poligoni con un lato in comune non siano dello stesso colore, per il primo abbiamo 4 possibili colori, per il secondo 3, per il terzo 3 e così via. Le possibili colorazioni saranno $4 \cdot 3^{n-1}$. Ora $172186884 = 4 \cdot 3^{16}$ e quindi $n = 17$. Dei 17 poligoni, 9 sono quadrati e 8 sono triangoli rettangoli isosceli. Si osserva che a partire dal secondo quadrato ognuno ha lato uguale $L_n = \sqrt{2}L_{n-1}$, dove $L_0 = 10\ m$. L'ultimo quadrato costruito ha lato $L_8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 L_0$ e quindi la sua area è $A_8 = L_8^2 = 160^2 = 25600\ m^2$. La risposta è dunque $\mathbf{0256}$.

(14) Il mostro mutante (Ep. 33)

Chiamiamo N_Ae N_B il numero medio di passi per raggiungere C partendo da A e B rispettivamente. Allora calcoliamo N_A come segue:

$$N_A = 1 + (1-p)N_A + pN_B\,.$$

Infatti, dopo un passo si rimane in A con probabilità 1- p e quindi sono ancora necessari in media N_A passi; si va invece in B con probabilità p e sono necessari in media ulteriori N_B passi. Con un analogo ragionamento su N_B si ottiene

$$N_B = 1 + pN_A.$$

Mettendo a sistema le due condizioni, si deduce che

$$N_A = 1 + (1-p)N_A + p(1 + pN_A)$$

e quindi

$$N_A = \frac{1+p}{p(1-p)} \qquad\qquad N_B = \frac{2}{1-p}$$

Ma $N_A = k\ N_B$, quindi si ricava

$$p = \frac{1}{2k-1}.$$
Essendo $k = \frac{2025}{2024}$, si ha $p = \frac{1}{2k-1} = \frac{2024}{4050-2024} = \frac{1012}{1013}$. La risposta è quindi $\mathbf{2025}$.

(15) Goldrake 2: Avanti! (Ep. 35)

Si può osservare che $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9$ allora $x + \frac{1}{x} = 3, x > 0$.

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3x\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3^2 = 18$$

$$x^9 + \frac{1}{x^9} = \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^3 - 3x^3\frac{1}{x^3}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) = 18^3 - 3\cdot 18 = 18(324-3) = 5778$$

La risposta è $\mathbf{5778}$.

(16) S.O.S. dal centro spaziale (Ep. 42)

Tre vertici si possono scegliere in $\binom{243}{3}$ modi distinti. Fissata l'attenzione su un vertice è facile osservare che il centro del poligono sarà esterno al triangolo se gli altri due vertici sono scelti tra i successivi 121, e ciò si può fare in $\binom{121}{2}$ modi differenti. La probabilità che il centro non cada internamente al triangolo è

$$\bar{p} = \frac{\binom{121}{2}\cdot 243}{\binom{243}{3}} = 121\cdot 60\cdot 243\cdot\frac{6}{243\cdot 242\cdot 241} = \frac{3\cdot 60}{241}$$

La probabilità richiesta è quindi

$$p = 1 - \bar{p} = 1 - \frac{180}{241} = \frac{61}{241}$$

La risposta è $\mathbf{0302}$.

(17) Ultimatum a Tokyo (Ep. 60)

Soluzione 1: Procediamo analizzando i vari casi in base al grado del polinomio. **Grado 2**: i polinomi sono tanti quanti i modi di distribuire 7 palline in tre cassetti (una pallina si considera inserita nel cassetto relativo al coefficiente di grado 2 che non può essere nullo) → $\frac{9!}{7!\cdot 2!} = 36$. **Grado 3**: in modo del tutto analogo devo distribuire 7 palline in quattro cassetti → $\frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$. **Grado 4**: in modo del tutto analogo devo distribuire 7 palline in cinque cassetti → $\frac{11!}{7!\cdot 4!} = 330$. **Grado 5**: in modo del tutto analogo devo distribuire 7 palline in sei cassetti → $\frac{12!}{7!\cdot 5!} = 792$. **Grado 6**: in modo del tutto analogo devo distribuire 7 palline in sette cassetti → $\frac{13!}{7!\cdot 6!} = 1716$. **Grado 7**: in modo del tutto analogo devo distribuire 7 palline in otto cassetti → $\frac{14!}{7!\cdot 7!} = 3432$. Il numero dei polinomi richiesto è quindi $36 + 120 + 330 + 792 + 1716 + 3432 = 6426$. La risposta è $\mathbf{6426}$.

Soluzione 2: Partendo dalla considerazione che per ogni polinomio $p(x)$ il valore di $p(1)$ equivale alla somma dei suoi coefficienti, il numero di polinomi di grado minore o uguale a 7 tali che $p(1) = 8$ corrisponde al numero di modi di distribuire 8 palline in 8 contenitori, ovvero $\binom{15}{8} = 6435$, in cui la presenza di uno o più contenitori vuoti nelle prime posizioni della sequenza corrisponde al conteggio dei polinomi di grado strettamente minore di 7. Dal totale occorre poi eliminare i polinomi di grado minore di 2, ossia i 9 polinomi della forma $p(x) = kx + 8 - k$, con $0 \le k \le 8$. La risposta è dunque $6435 - 9 = 6426$. La risposta è $\mathbf{6426}$.

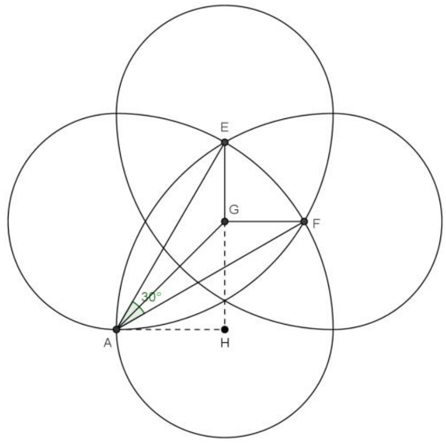
(18) Condizionamento telepatico (Ep. 71)

Si può osservare $f(1-x) = \frac{(1-x)^2}{2(1-x)-1} = \frac{1+x^2-2x}{1-2x}$.

$$f(x) + f(1-x) = \frac{x^2}{2x-1} + \frac{1+x^2-2x}{1-2x} = \frac{x^2-1-x^2+2x}{2x-1} = \frac{2x-1}{2x-1} = 1$$

Nell'espressione da calcolare gli argomenti della funzione sono a coppie del tipo x e $1-x$. Le coppie nel complesso sono 14. La risposta è quindi $\mathbf{0014}$.

(19) Il sacrificio di Rubina (Ep. 72)



Consideriamo il quadrato centrale $ABCD$ di lato L. Indichiamo con E, F, G e H i vertici della parte di figura di cui conosciamo l'area. Si osserva che l'angolo $F\hat{A}E = \frac{\pi}{6}$, quindi l'area del settore circolare AEF è

$$A_S = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}L^2 = \frac{\pi}{12}L^2$$

e l'area del triangolo isoscele AEF è

$$A_T = \frac{1}{2}L^2 \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}L^2.$$

L'area del segmento circolare più piccolo di base EF è

$$A_C = A_S - A_T = \frac{L^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - 1\right).$$

Il segmento EF ha misura $l = \sqrt{2L^2 - 2L^2\cos\frac{\pi}{6}} = L\sqrt{2-\sqrt{3}}$ e quindi il quadrato $EFGH$ ha area $A_Q = L^2\left(2-\sqrt{3}\right)$. L'area della parte colorata è

$$A_P = A_Q + 4A_C = L^2\left(2-\sqrt{3}\right) + L^2\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) = L^2\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)$$

$$A_P = \frac{L^2}{3}\left(\pi + 3 - 3\sqrt{3}\right)$$

Poiché sappiamo $A_P = 48\left(\pi + 3 - 3\sqrt{3}\right)$ allora $L = 12$. Il fregio è costituito da una circonferenza di raggio L e da due circonferenze di raggio $\frac{L}{2}$ per cui la sua lunghezza totale è $\gamma = 2\pi L + 2\pi L = 4\pi L$. Sostituendo i valori si ha $\gamma = 4 \cdot 3{,}1416 \cdot 12 = 150{,}7968$. La risposta è $\mathbf{0150}$.

(20) La morte di re Vega (Ep. 74)

Un numero forma $aabb$ si scrive come $11(100a + b)$. Essendo forma $aabb$ un quadrato, 11 deve dividere $100a + b$, cioè deve dividere $a + b$ e, poiché a e b sono cifre, si ha $a + b = 11$.

$$\frac{100a + b}{11} = \frac{99a + 11}{11} = 9a + 1$$

è ancora un quadrato. Questo accede solo se $a = 7$, quindi il numero cercato è 7744. La risposta è $\mathbf{7744}$.

(21) Non tutti sanno che …

Soluzione 1: Immaginiamo le quattro cifre da individuare come dei contenitori in cui dobbiamo distribuire 16 palline. La cifra delle migliaia non può essere 0, pertanto consideriamo che almeno una pallina si trovi nel contenitore corrispondente. Allora 15 palline possono essere distribuite in 4 contenitori in $\frac{18!}{15!\cdot 3!}$ modi. In questo modo però si contano anche casi in cui in un contenitore ci possono essere 10 o più palline. Dobbiamo togliere tutti questi casi. Supponiamo di mettere 10 palline nel contenitore delle migliaia; rimangono 6 palline da distribuire e ciò può essere fatto in $\frac{9!}{6!\cdot 3!}$ modi. Se invece consideriamo 10 palline nel contenitore delle centinaia e 1 in quello delle migliaia, rimangono da distribuire 5 palline e ciò è possibile farlo in $\frac{8!}{5!\cdot 3!}$ modi. Lo stesso ragionamento si può fare per le decine e le unità. In conclusione i numeri naturali di quattro cifre la cui somma delle cifre è 16 sono

$$\frac{18!}{15!\cdot 3!} - \frac{9!}{6!\cdot 3!} - 3\cdot\frac{8!}{5!\cdot 3!} = 3\cdot 17\cdot 16 - 3\cdot 4\cdot 7 - 3\cdot 8\cdot 7 = 564.$$

Tra tutti questi numeri, dobbiamo considerare quelli che sono formati da due cifre diverse che si ripetono ciascuna esattamente due volte sono tanti quanti i modi. La somma delle due cifre deve essere 8. I casi possibili sono quelli dati dalle coppie $(1{,}7)$, $(2{,}6)$, $(3{,}5)$, e per finire il caso particolare della coppia $(0{,}8)$. Per ognuna delle prime tre coppie abbiamo $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ possibili numeri, nel caso particolare, poiché la cifra delle migliaia non può essere 0, i numeri possibili sono 3. Quindi i numeri di quattro cifre formati da sole due cifre diverse che si ripetono ciascuna esattamente due volte sono 21. Allora la probabilità cercata è $\frac{21}{564} = \frac{7}{188}$. La risposta è $\mathbf{0195}$.

Soluzione 2: Consideriamo le quattro cifre come contenitori in cui dobbiamo distribuire 16 palline. Immaginando inizialmente che non ci siano vincoli per il numero di palline in ciascun contenitore, il numero di distribuzioni possibili è $\binom{19}{16} = 969$. Da queste occorre però eliminare quelle che prevedono la presenza di almeno 10 palline in uno dei contenitori, ovvero $4 \cdot \binom{9}{6} = 336$ (le 10 palline possono essere sistemate in uno qualsiasi dei 4 contenitori e a questo punto restano da distribuire le rimanenti 6 palline nei medesimi contenitori). Si arriva così a $969 - 336 = 633$ distribuzioni ammissibili. Occorre infine conteggiare, e successivamente sottrarre dal totale fin qui ottenuto, il numero di distribuzioni in cui il primo contenitore rimanga vuoto, corrispondenti ai numeri di quattro cifre in cui la cifra delle migliaia è uguale a zero. Effettuando il calcolo in modo del tutto analogo al caso precedente, si ottiene che tale numero è dato da $\binom{18}{16} - 3 \cdot \binom{8}{6} = 153 - 84 = 69$. Sottraendo questo valore dal totale precedentemente trovato, si ricava che il numero effettivo di distribuzioni possibili è $633 - 69 = 564$, corrispondenti ad altrettanti numeri di quattro cifre con somma 16. Tra tutti questi numeri dobbiamo ora considerare quelli formati da due cifre distinte che si ripetono esattamente due volte. La somma di tali due cifre deve ovviamente essere 8 e pertanto i casi possibili sono quelli dati dalle cifre $(1,7)$, $(2,6)$ e $(3,5)$, oltre al caso particolare $(8,0)$. Per ciascuna delle prime tre coppie si possono formare $\binom{4}{2} = 6$ numeri distinti, mentre nel caso della coppia $(8,0)$, poiché la cifra delle migliaia deve essere non nulla, i numeri possibili sono soltanto 3.In totale si hanno dunque $3 \cdot 6 + 3 = 21$ 3 numeri di quattro cifre che verificano i requisiti richiesti. La probabilità richiesta è dunque $\frac{21}{564} = \frac{7}{188}$ e la risposta è $\mathbf{0195}$.