ALLENAMENTO ON-LINE - GARA DI MATEMATICA A SQUADRE (09/11/2026)
SOLUZIONI

PROBLEMA 1 [578]

Scomponendo in fattori primi si trova che $24.137.280 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17^2 \cdot 29$. Siccome $\sqrt[3]{27.000.000} = 300$ i numeri che stiamo cercando sono tutti più piccoli di 300. Vista la presenza dei due fattori 17 che dovranno essere entrambi fattori primi dello stesso numero abbiamo $288 \cdot 289 \cdot 290 = 24.137.280$.
La risposta richiesta è $288 + 290 = 578$.

PROBLEMA 2 [1400]

Scelgo i 3 anelli d'oro da mettere nella teca in $\binom{8}{3}$ modi possibile.

Tra i $\binom{7}{4}$ modi di scegliere gli anelli d'argento, devo togliere i casi in cui i due anelli quasi uguali sono stati scelti $\binom{5}{2}$

Abbiamo in tutto $\binom{8}{3} \cdot \left(\binom{7}{4} - \binom{5}{2} \right) = 56 \cdot 25 = 1400$.

PROBLEMA 3 [4212]

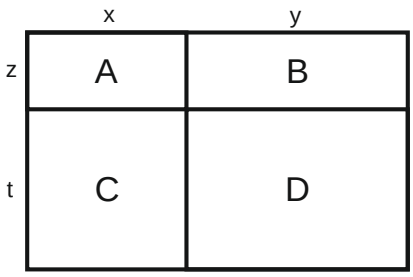
Indipendentemente dalla vincita, Giulio avrà più di $70\,€$ solo se vincerà almeno una scommessa, cosa che accade con probabilità $P(\text{almeno 1 vittoria}) = 1 - P(\text{perde sempre}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \cong 0,4212$

La risposta richiesta è 4212.

PROBLEMA 4 [120]

Divisi i lati del rettangolo in $x+y$ e $z+t$, avremo che $xz = 24$, $yz = 48$ e $tx = 60$.

L'area D vale $yt = \frac{yz \cdot tx}{xz} = \frac{48 \cdot 60}{24} = 120\ \text{cm}^2$.



PROBLEMA 5 [8400]

Scelta una qualunque delle $8 \cdot 5 = 40$ caselle, restano $7 \cdot 4 = 28$ possibili scelte per la seconda, $6 \cdot 3 = 18$ per la terza e $5 \cdot 2 = 10$ per la quarta. Ovviamente, una permutazione delle 4 ci riporta alla stessa configurazione.
Il numero delle possibilità è $\frac{40 \cdot 28 \cdot 18 \cdot 10}{4!} = 8400$.

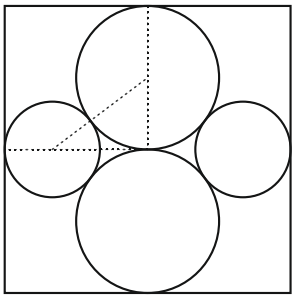
PROBLEMA 6 [960]

Considerando la coppia AB come un "oggetto unico", $C\ D\ E\ F\ G$ possono sedersi in $6! \cdot 2! = 1440$ modi diversi. Vediamo in quanti di questi C e D sono finiti vicini: considerando gli amici AB e CD come oggetti uniti, abbiamo $5! \cdot 2! \cdot 2! = 480$ possibilità.
La configurazione richiesta ha $1440 - 480 = 960$ possibilità.

PROBLEMA 7 [2935]

Calcoliamo il resto della divisione tra i due polinomi: $4 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 5 = 2930$.
Dovrà accadere che $\frac{2930}{n-5}$ è un intero. Il valore più grande possibile si avrà quando $n - 5 = 2930$, cioè $n = 2935$.

PROBLEMA 8 [3600]



Detto x il lato del quadrato, il triangolo rettangolo che si forma unendo i centri delle due circonferenze con il centro del quadrato è formato da cateti lunghi $\frac{x}{4}$ e $\frac{x}{2}-10$ e da un'ipotenusa lunga $\frac{x}{4}+10$. Per il teorema di Pitagora si ha $\left(\frac{x}{4}+10\right)^2=\left(\frac{x}{2}-10\right)^2+\left(\frac{x}{4}\right)^2$, cioè $60x=x^2$. Abbiamo $x=60\text{ cm}$.

L'area del quadrato vale $A=3600\text{ cm}^2$

PROBLEMA 9 [348]

Siano a, $a+x$ e $a+2x$ i tre termini della prima progressione aritmetica e b, $b+y$ e $b+2y$ i termini della seconda progressione aritmetica. Sappiamo che:

$$\begin{cases} ab=1440 \\ (a+x)(b+y)=1716 \\ (a+2x)(b+2y)=1848 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} ab=1440 \\ ab+ay+bx+xy=1716 \\ ab+2(ay+bx)+4xy=1848 \end{cases}$$

E siamo interessati a trovare $(a+7x)(b+7y)=ab+7(ay+bx)+49xy$.

Nel sistema possiamo sostituire il valore di ab nella seconda e terza equazione, e semplificare:

$$\begin{cases} ab=1440 \\ ay+bx+xy=276 \\ ay+bx+2xy=204 \end{cases}$$

Eseguendo ora la differenza tra la terza e la seconda equazione otteniamo

$$\begin{cases} ab=1440 \\ xy=-72 \\ ay+bx=348 \end{cases}$$

$(a+7x)(b+7y)=ab+7(ay+bx)+49xy=1440+7\cdot 348-49\cdot 72=348$.

PROBLEMA 10 [4132]

Rappresentiamo i dati in una tabella: dalle informazioni abbiamo: Giovanni non è ingegnere, Giacomo non è tabaccaio e nemmeno ingegnere o medico, visto che non si è sposato, Damiano non è ingegnere.

	Martino (1)	Damiano (2)	Giacomo (3)	Giovanni (4)
Medico			NO	
Avvocato				
Tabaccaio			NO	
Ingegnere		NO	NO	NO

Questo ci permette di concludere che Giacomo è Avvocato e di conseguenza Martino Ingegnere.

	Martino (1)	Damiano (2)	Giacomo (3)	Giovanni (4)
Medico	NO		NO	
Avvocato	NO	NO	SI	NO
Tabaccaio	NO		NO	
Ingegnere	SI	NO	NO	NO

Ora Damiano, non conoscendo alcun parente dell'ingegnere, non può essere medico, visto che il medico ne ha sposato la sorella

	Martino (1)	Damiano (2)	Giacomo (3)	Giovanni (4)
Medico	NO	NO	NO	SI
Avvocato	NO	NO	SI	NO
Tabaccaio	NO	SI	NO	NO
Ingegnere	SI	NO	NO	NO

La risposta richiesta è 4132.

PROBLEMA 11 [100]

Prima di tutto osserviamo che $2025 = 2210000_3$.

Potendo usare solo le cifre 0, 1 e 2 abbiamo che i palindromi di:

1 cifra sono 2;

2 cifre sono 2;

3 cifre sono $2 \cdot 3 = 6$;

4 cifre sono $2 \cdot 3 = 6$;

5 cifre sono $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$;

6 cifre sono $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$;

Su quelli di 7 cifre dobbiamo stare attenti. Tutti sarebbero $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ ma dobbiamo togliere quelli più grandi di $2025 = 2210000_3$ e cioè i 3 che iniziano con 221 e i 3 che iniziano con 222.

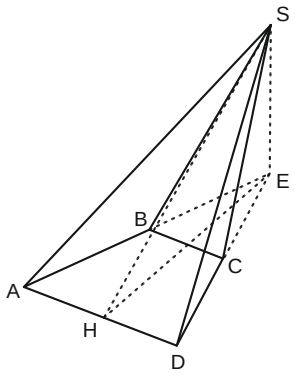
In totale abbiamo $2+2+6+6+18+18+54-6 = 100$ numeri palindromi.

PROBLEMA 12 [5005]

$$S = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{20} i(i+1)^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{20}(i^3+2i^2+i) = \frac{1}{10}\left[\left(\frac{20\cdot 21}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6} + \frac{20\cdot 21}{2}\right] = 5005.$$

PROBLEMA 13 [2449]

La piramide per soddisfare le richieste del problema deve avere l'altezza che cade al di fuori della base. Prolungando i lati obliqui del trapezio dalla parte della base minore si viene a trovare il punto E che deve il piede dell'altezza della piramide cercata. Ora il triangolo ADE deve essere equilatero in quanto $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$ e quindi $HE = AB\sqrt{3}$,



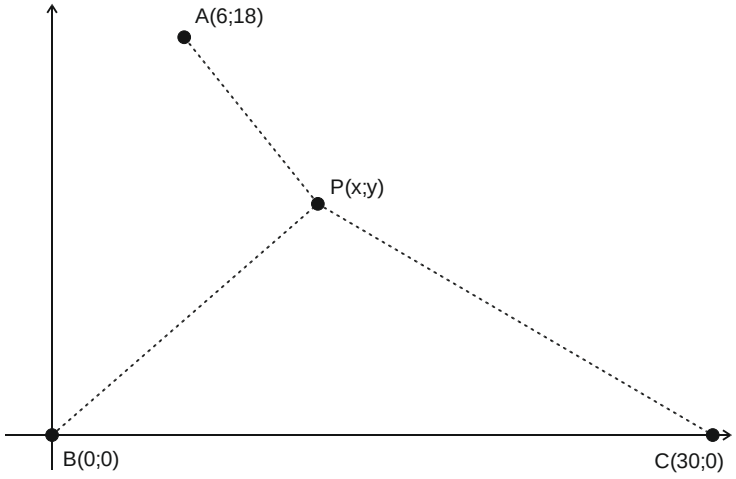
Per il teorema di Pitagora:

$ES = \sqrt{HS^2 - HE^2} = \sqrt{900-300} = 10\sqrt{6} \cong 24,49 \text{ cm}^2$

La soluzione richiesta è 2449.

PROBLEMA 14 [720]

Utilizziamo la geometria analitica. Rappresentiamo le tre città su un piano cartesiano e sia $P(x,y)$ il punto in cui verrà scavato il pozzo.



Vogliamo sia minima $S = PA^2 + PB^2 + PC^2 = (x-6)^2 + (y-18)^2 + x^2 + y^2 + (x-30)^2 + y^2$, cioè

$S = 3x^2 + 3y^2 - 72x - 36y + 1260$ che possiamo anche scrivere

$S = 3(x^2 - 24x) + 3(y^2 - 12y) + 1260$ e quindi

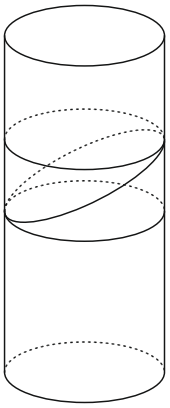
$S = 3(x^2 - 24x + 144) - 432 + 3(y^2 - 12y + 36) - 108 + 1260$

$S = 3(x-12)^2 + 3(y-6)^2 + 720$

Il cui minimo si ottiene quando i due quadrati valgono entrambi 0 e cioè per $x = 12$ e $y = 6$. Il minimo è 720.

PROBLEMA 15 [3141]

Se si completa il pezzo col suo simmetrico si ottiene un cilindro di altezza 20 e raggio 10.



$$V = \frac{1}{2}\pi 10^2 \cdot 20 = 1000\pi \cong 3141 \text{ cm}^3$$

PROBLEMA 16 [337]

Osserviamo che essendo 2025 multiplo di 3, anche a lo dovrà essere, quindi il problema è equivalente a risolvere $2 \cdot 3x + 3b = 2025$ con $a = 3x$ ($x \neq 0$)e quindi $2x + b = 675$.

Ora b dovrà essere necessariamente dispari e quindi $b = 2y + 1 \quad (y \geq 0)$ da cui si ha $2x + 2y + 1 = 675$ e quindi $x + y = 337$. Abbiamo tutte le soluzioni da $x = 1$ a $x = 337$, per un totale di 337 coppie possibili.

PROBLEMA 17 [0]

Osserviamo che da $a^3 = ax + y$ e $b^3 = bx + y$ eseguendo la sottrazione otteniamo $a^3 - b^3 = ax - bx$ che posiamo semplificare in $a^2 + ab + b^2 = x$ visto che $a \neq b$. Procedendo analogamente con la prima e la terza equazione otteniamo $a^2 + ac + c^2 = x$.

Sottraendo queste due perveniamo all'equazione $ab - ac + b^2 - c^2 = 0$ che possiamo fattorizzare in $a(b-c) + (b-c)(b+c) = 0$ e semplificare visto che $b \neq c$ ottenendo $a + b + c = 0$.

PROBLEMA 18 [19]

Osserviamo che $n^3 \leq n^3 + 4n^2 - 15n - 18$ è vera per $n > 4$,

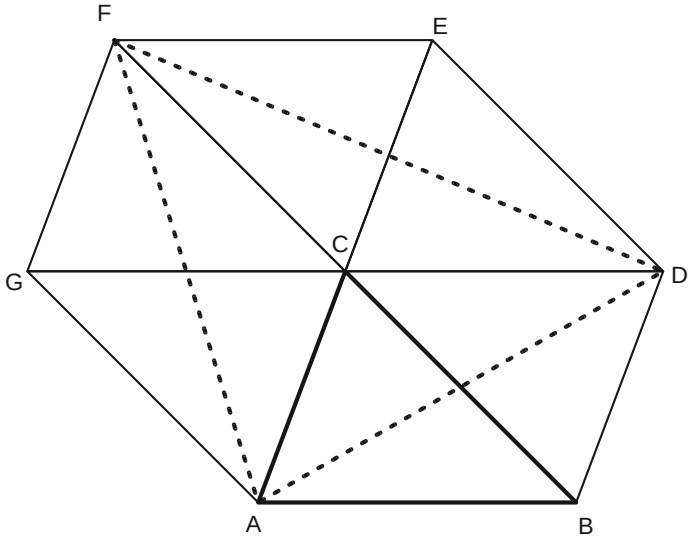
$(n+1)^3 \leq n^3 + 4n^2 - 15n - 18$ è vera per $n \geq 19$ e in particolare 19 verifica l'uguaglianza.

$(n+2)^3 \leq n^3 + 4n^2 - 15n - 18$ è verificata solo per valori negativi e quindi è impossibile.

La soluzione cercata è $n = 19$

PROBLEMA 19 [5656]

Osserviamo che in generale se effettuiamo la costruzione sotto riportata, costruendo via via i triangoli simmetrici di ABC rispetto ad un lato, otteniamo l'esagono $ABCDEF$ che ha area 6 volte l'area di ABC e 2 volte l'area di ADF.



$$A_{ABC} = \frac{1}{6} A_{ABCDEF} = \frac{1}{3} A_{ADF}.$$

Il triangolo ADF ha per lati il doppio delle mediane di ABC e quindi, per Erone

$$A_{ADF} = \sqrt{300(300-180)(300-200)(300-220)} = 12000\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{3} A_{ADF} = 4000\sqrt{2} \text{ cm}^2 \cong 5656{,}8 \text{ cm}^2$$

PROBLEMA 20 [6999]

Costruiamo la prima parte della tabella concentrandoci sul fatto che la tabella è simmetrica rispetto alla diagonale e che ci interessa scoprire cosa accade solo sulla diagonale.

Osserviamo che nelle celle $(2n;2n)$ vi è $8000-2(2n)-1$ che farà si che nella cella $(500;500)$ vi sia $8000-1000-1=6999$.

1	2	3	4	5	6
2	8000-5	0	8000-7	-2	
3	0	5	2	7	
4			8000-9	0	
5			0	9	
6					…