GARA DI MATEMATICA A SQUADRE
(6/10/2025)
SOLUZIONI

PROBLEMA 1 [150]

Il triangolo $8-15-17$ è rettangolo, visto che i suoi lati formano una terna pitagorica. I vertici di tutti i triangoli disegnati devono stare sulle bisettrici degli angoli del triangolo

Calcoliamo il raggio della circonferenza inscritta: $r=\dfrac{A}{p}=\dfrac{\frac{15\cdot 8}{2}}{\frac{8+15+17}{2}}=3\text{ dm}=300\text{ mm}$.

Avremo disegnato $\dfrac{300}{2}=150$ triangolini.

PROBLEMA 2 [17]

Il problema consiste nel risolvere il seguente sistema nell'insieme dei numeri naturali.

$$\begin{cases} L^2+C=3523 \\ L+C^2=1823 \end{cases}$$

Osserviamo che

$\begin{cases} L^2=3523-C\le 59^2 \\ C^2=1823-L\le 42^2 \end{cases}$ che ci da la soluzione $\begin{cases} L=59 \\ C=42 \end{cases}$ come unica soluzione plausibile.

La soluzione richiesta è $59-42=17$.

PROBLEMA 3 [5384]

Prima soluzione:

Scriviamo il problema sotto forma di moltiplicazione:

$$\begin{array}{cccccccc} & \dots & \square & \square & \square & \square & \square & 6 \;\cdot \\ & & & & & & & 4 \;= \\ \hline 6 & \dots & \square & \square & \square & \square & \square & \end{array}$$

Il valore della cifra delle unità del risultato deve essere la stessa cifra della cifra delle decine del primo fattore. Procediamo in questo modo fino a trovare la cifra 6 attesa:

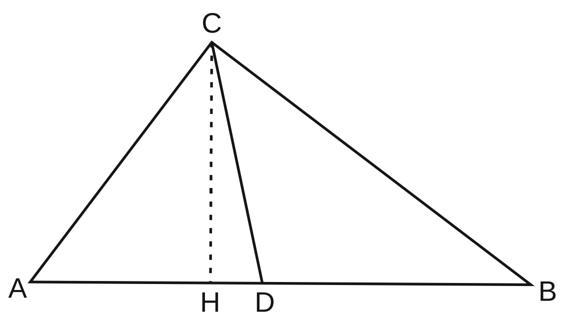
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \;\cdot \\ & & & & & 4 \;= \\ \hline 6 & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

La risposta richiesta è 5384.

Seconda soluzione:

Possiamo riscrivere il problema trasformando in equazione: $6\cdot 10^k+a=4(10a+6)$ che semplificata diventa $2\cdot 10^k-8=13a$. Provando si trova che $k=5$ risolve il problema e che $a=15384$.

PROBLEMA 4 [5366]



Riferendoci alla figura a fianco, sia $AC=60\text{ m}$, $BC=80\text{ m}$ e $AB=100\text{ m}$. Utilizzando la formula inversa per l'area otteniamo che l'altezza $DH=48\text{ m}$ e che $AH=36\text{ m}$ (utilizzando il primo Teorema di Euclide).

deve accadere che $60+AD=80+100-AD$ da cui otteniamo $AD=40\text{ m}$ e di conseguenza $HD=24\text{ m}$.

Sfruttando il Teorema di Pitagora abbiamo

$CD=\sqrt{48^2+24^2}=\sqrt{5\cdot 24^2}=24\sqrt{5}\cong 53{,}6664\text{ m}\cong 5366{,}64\text{ cm}$

PROBLEMA 5 [8568]

Prima soluzione:

Eseguiamo il calcolo per ogni parte del polinomio che può avere il termine cercato, cioè i primi 6:

$\binom{17}{5}+\binom{16}{4}+\binom{15}{3}+\binom{14}{2}+\binom{13}{1}+\binom{12}{0}=\binom{18}{5}=8568$ dove nella penultima uguaglianza abbiamo usato la regola della "mazza" sul triangolo di Tartaglia.

Seconda soluzione:

Sia per il momento $y=1+x$ e quindi $p(x;y)=y^{17}+y^{16}\cdot x+...+x^{17}$. Moltiplichiamo tutto per $(y-x)$ ed otteniamo che $p(x;y)(y-x)=y^{18}-x^{18}$ ma $y=1+x$, quindi $p(x;y)=(x+1)^{18}-x^{18}$. Il coefficiente di grado 5 è $\binom{18}{5}=8568$.

PROBLEMA 6 [316]

Se immaginiamo una sfera tangente a tre facce del cubo e l'altra tangente alle altre tre, la diagonale del cubo deve essere pari a due raggi delle sfere più le due diagonali dei due cubi di spigolo il raggio della sfera stessa.

In equazione, posto x il raggio delle sfere si ha

$2x\sqrt{3}+2x=\sqrt{3}$ da cui otteniamo $x=\frac{3-\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{m}\cong 0,316975\ \mathrm{m}\cong 316\ \mathrm{mm}$.

PROBLEMA 7 [91]

$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{10^i}=\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+...$ che possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...\\&\qquad+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...\\&\qquad\qquad+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...\\&\qquad\qquad\qquad+\frac{1}{10000}+...\end{aligned}$$

Se $S=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}$, allora

$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{10^i}=S+\frac{1}{10}S+\frac{1}{100}S+\frac{1}{1000}S+...=S+S\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+...\right)=S+S^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{81}=\frac{10}{81}$.

La risposta richiesta è $10+81=91$.

PROBLEMA 8 [50]

Osserviamo che l'equazione è nella forma $\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}$ e questo ci permette di effettuare i calcoli molto rapidamente:

$(A+B)(C-D)=(A-B)(C+D)$ che semplificata diventa $AD=BC$ cioè

$(2x^3-3x^2)(5x-13)=(3x^3-x^2)(x+1)$.

Tolta la soluzione $x=0$ resta da risolvere

$(2x-3)(5x-13)=(3x-1)(x+1)$ che ci porta all'equazione

$7x^2-43x+40=0$.

Controllato che il discriminante è maggiore di 0, la somma delle due (tre considerando anche $x=0$) soluzioni è $\frac{43}{7}$.

Il risultato richiesto è $43+7=50$.

PROBLEMA 9 [247]
Bisogna che le cifre delle migliaia siano distanti di una unità, mentre le tre cifre più alte rimaste siano per l'acquisto e quelle più basse per la vendita.
La soluzione è: $5123-4876=247$ €.
PROBLEMA 10 [252]
Scelte le cifre, c'è un solo modo per ordinarle: La soluzione è $\binom{10}{5}=252$.

PROBLEMA 11 [2560]
Siano a, b e c le misure dei lati del parallelepipedo. Abbiamo $ab=\frac{640}{2}=320 \text{ cm}^2$; $bc=\frac{640}{4}=160 \text{ cm}^2$ e $ac=\frac{640}{5}=128 \text{ cm}^2$. $V=\sqrt{ab\cdot bc\cdot ac}=\sqrt{320\cdot 160\cdot 128}=2560 \text{ cm}^3$.

PROBLEMA 12 [2414]
Proviamo a cercare un quadrato di binomio sotto la radice sesta:
$99+70\sqrt{2}=99+2\cdot 7\cdot 5\sqrt{2}=\left(7+5\sqrt{2}\right)^2$, quindi
$1000\cdot\sqrt[6]{99+70\sqrt{2}}=1000\cdot\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.
Proviamo a cercare un cubo sotto radice:
$7+5\sqrt{2}=\left(a+b\sqrt{2}\right)^3=a^3+6ab^2+\left(3a^2b+2b^3\right)\sqrt{2}$. Se $a=b=1$ l'uguaglianza è verificata.
Quindi $1000\cdot\sqrt[6]{99+70\sqrt{2}}=1000\cdot\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=1000\left(1+\sqrt{2}\right)\cong 2414,2$

PROBLEMA 13 [601]
Il triangolo risulta diviso in $1+3+5+...+25\cdot 2-1=25^2=625$ triangolini.
Partendo da un triangolo su un vertice è possibile costruire un percorso a "S" che attraversa l'intero triangolo rinunciando ad un triangolino per ogni riga (a parte l'ultima).
Il percorso massimo è dato da $625-24=601$ triangolini.

PROBLEMA 14 [1968]
Dobbiamo risolvere $60\le x_1+x_2+x_3\le 75$ con il vincolo $x_i\ge 18$, $x_i\in\mathbb{N}$.
Il problema è equivalente (togliendo 18 a tutti i concorrenti) al problema:
$6\le\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}\le 21$ senza ulteriori vincoli.
Intanto risolviamo $\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}\le 21$ che è equivalente a $\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}+k=21$ che ha $\binom{24}{21}=2024$ possibili soluzioni.
Da queste dobbiamo togliere tutte quelle che verificano $\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}\le 5$ che come sopra risolviamo con $\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}+k=5$ che ha $\binom{8}{5}=56$ casi.
La soluzione cercata è $2024-56=1968$.

PROBLEMA 15 [8589]
Osserviamo che per come è costruito il problema, 9 risolve le tre condizioni.
Tutti i numeri della forma $n=9+11\cdot 13\cdot 15k$ sono soluzione del problema.
Cerchiamo il valore di n che verifica la condizione di massimo:
$n=9+2145k$ che con $k=4$ diventa $n=8589$.

PROBLEMA 16 [23]

Siccome $p^3+2p^2+p=p(p+1)^2$, dovrà necessariamente accadere che $(p+1)^2$ ha 21 divisori positivi quindi dovrà essere $(p+1)^2=2^6\cdot q^2$ e quindi $p+1=8q$. Il minimo si ottiene per $q=3$ e quindi $p=23$.

PROBLEMA 17 [624]

Prestando attenzione alla cifra delle unità, abbiamo due casi se la cifra delle unità di n è uguale o diversa da 9.
Valutiamo prima la seconda possibilità:

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d+1 \end{matrix}$$

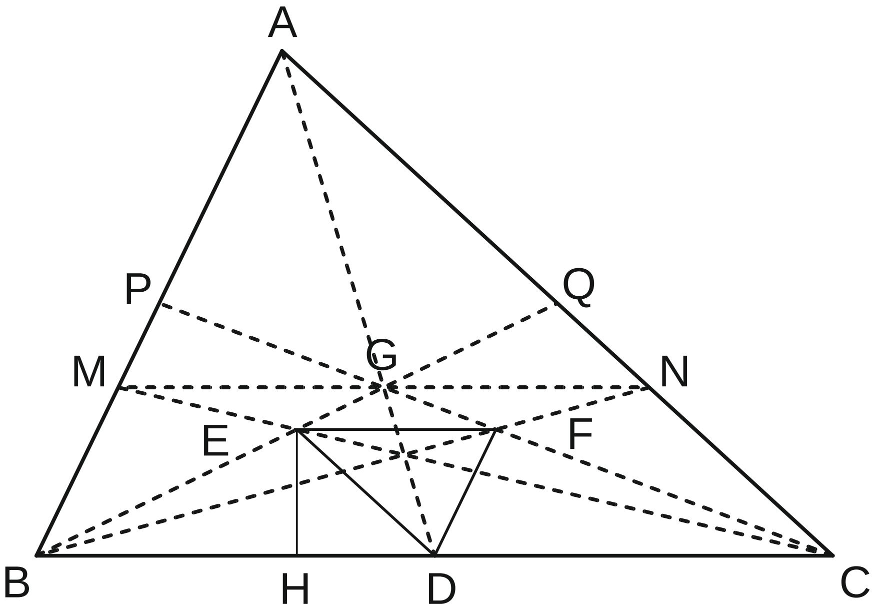
Per unità decine e centinaia abbiamo 5 casi, mentre ne abbiamo solo 4 per le migliaia, per un totale di $4\cdot5\cdot5\cdot5=500$ casi.

Nel caso $d=9$ ci troviamo ad analizzare

$$\begin{matrix} a & b & c & 9 \\ a & b & c+1 & 0 \end{matrix}$$

Che è analogo al caso precedete, solo con un grado di libertà in meno: $4\cdot5\cdot5=100$ casi.
In definitiva abbiamo in tutto
$4\cdot5\cdot5\cdot5+4\cdot5\cdot5+4\cdot5+4=624$ possibilità.

PROBLEMA 18 [224]



Prima di tutto dimostriamo che E risulta essere il punto medio di BQ.
Consideriamo il trapezio $MGCB$. I due triangoli MGE e BEC sono simili.

Ma $MG=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}\frac{1}{2}BC=\frac{1}{3}BC$ dove nella prima uguaglianza abbiamo usato la proprietà del Baricentro di dividere la mediana in due parti proporzionali a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

$BE=3EG$, ma $GQ=\frac{1}{2}BG$ e quindi $BE=EQ$.

Ne segue che $ED//QC$ per le proprietà dei punti medi e quindi $ED=\frac{1}{2}QC$.

Il triangolo EFD risulta avere tutti e tre i lati paralleli ai lati del triangolo ABC. I due triangoli sono simili con rapporto di similitudine $\frac{1}{4}$.

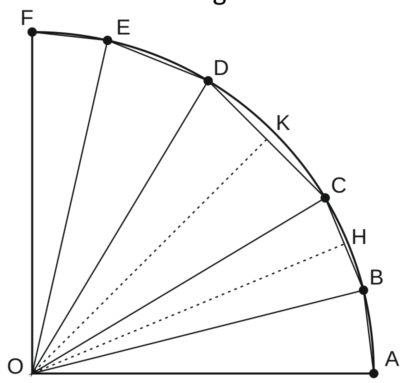
Siccome $A_{EFD}=\frac{EF\cdot EH}{2}=\frac{7\cdot4}{2}=14\text{ cm}^2$, allora $A_{ABC}=4^2\cdot A_{EFD}=16\cdot14=224\text{ cm}^2$.

PROBLEMA 19 [1930]

Cerchiamo tutte le soluzioni positive di $x^2+y^2=625$.

Provando i quadrati dei numeri interi otteniamo (in ordine antiorario): $A(25;0)$; $B(24;7)$; $C(20;15)$; $D(15;20)$ $E(7;24)$ ed ; $F(0;25)$

Limitandoci al primo quadrante, la situazione trovata è la seguente:



$$A_{AOB}=A_{EOF}=\frac{25\cdot 7}{2};$$

$A_{BOC}=A_{EOD}=\dfrac{BC\cdot OH}{2}=\dfrac{4\sqrt{5}\cdot 11\sqrt{5}}{2}$ dove $BC=\sqrt{(24-20)^2+(7-15)^2}=4\sqrt{5}$ e $OH=\sqrt{OB^2-BH^2}=11\sqrt{5}$;

$A_{DOC}=\dfrac{DC\cdot OK}{2}=\dfrac{\frac{35\sqrt{2}}{2}\cdot 5\sqrt{2}}{2}$ dove DC e OK sono stati calcolati come sopra.

$$A=4\cdot A_{OABCDEF}=4\left(2A_{AOB}+2A_{BOC}+A_{DOC}\right)=4\left(2\cdot\frac{175}{2}+2\cdot 110+\frac{175}{2}\right)=1930.$$

PROBLEMA 20 [27]

Analizziamo prima di tutto $P(x)$. Per le formule di Viete deve avere $x_1x_2x_3=-135$ e $x_1+x_2+x_3=11$. Siccome le radici sono intere non ci sono molte possibilità da controllare. Si trova che l'unica a verificare le due condizione richieste è $x_1=-3$, $x_2=5$ e $x_3=9$ che permettono di determinare $A=3$.

Per la condizione sui due polinomi dovrà essere:

$$\left(x^3-11x^2+3x+135\right)\left(x^2+kx+15\right)=x^5-(B+3)x^4+Bx^3-Cx^2+Dx+2025.$$

Uguagliamo i coefficienti dei due polinomi:

x^4: $-(B+3)=k-11$

x^3: $B=15-11k+3$

x^3: $C=-15\cdot 11+3k+135$

Dalle prime due, risolvendo il sistema otteniamo $k=1$, che messo nell'ultima equazione trovata ci permette di determinate $C=27$.