



DEATH NOTE

Gara di matematica a squadre

20 APRILE 2026


SUPE_UNIUD

REGOLE DEL DEATH NOTE

- ☒ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- ☒ Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi come risposta la sua parte intera, salvo diversamente indicato.
- ☒ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000. Se invece la quantità richiesta non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- ☒ Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si diano come risposta le ultime quattro cifre del risultato.
- ☒ **Attenzione:** i problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una [🍎] o due [🍎🍎] mele. Inoltre, i problemi della *Prima parte* sono (a nostro giudizio) più semplici dei problemi della *Seconda parte*.
- ☒ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tenere conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{1} = 1.0000 \quad \sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze:

- 🕒 10 minuti dall'inizio: termine scelta del JOLLY;
- 🕒 120 minuti dall'inizio: termine della gara.

LA SCUOLA SUPERIORE DI UDINE PRESENTA...

"ALGEBRA!"

"Ehm, Light, non è così che funziona."

"GEOMETRIA!"



GARA ORGANIZZATA DA: Alberto Cagnetta, Lorenzo Capponi, Lorenzo Carrara, Gaia Fuselli, Alessandro Minisini ed Eugenio Trovarelli.

CON L'AUTO DI: Michele Bertoli, Federico Capuzzi, Alessio Goi, Alessandro Perico, Francesca Pregliasco e Tommaso Ulian.

Prima parte - Nell'ombra - SOLUZIONI

1 IL MONDO DEGLI \sinh (igami)

Soluzione (Risposta: 28). Premettiamo una considerazione di carattere generale. Supponiamo di avere un intero N scritto in base B :

$$N = a_k B^{k-1} + a_{k-1} B^{k-2} + \dots + a_2 B + a_1 \quad (1)$$

quindi $N = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}_B$. Come è noto, in base 10 un numero è congruo alla somma delle sue cifre, se considerato modulo $9 = 10 - 1$. Osserviamo che questo risultato è vero in ogni base: ossia un numero N scritto in base B è congruo, modulo $B - 1$, alla somma delle sue cifre in base B .

La dimostrazione segue dalla (1): notiamo che $B - 1 \equiv_{B-1} 0$ e quindi $B \equiv_{B-1} 1$, pertanto

$$N = a_k B^{k-1} + a_{k-1} B^{k-2} + \dots + a_2 B + a_1 \equiv_{B-1} a_k + a_{k-1} + \dots + a_1.$$

Nel nostro caso, otteniamo quindi che $2026 \equiv_{b-1} b$, ossia che $b - 1$ deve dividere $2026 - b = 2025 - (b - 1)$. In particolare, $b - 1$ deve essere un divisore di $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, che ha 15 divisori:

$$1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, \dots, 2025$$

che portano rispettivamente ai seguenti valori di b possibili:

$$2, 4, 6, 10, 16, 26, 28, 46, 76, 82, \dots, 2026.$$

Vogliamo che b sia tale che 2026 abbia almeno 3 cifre in base b , quindi, in particolare, $b^2 \leq 2026 = 2025 + 1 = 45^2 + 1$. Questo implica che ci basta restringerci alle basi $10 < b \leq 28$. Le basi possibili sono allora 16, 26, 28 e solo 28 verifica la proprietà richiesta:

$$2026 = 2 \cdot 28^2 + 16 \cdot 28 + 10$$

che quindi è la risposta cercata. ⊗

2 IL DEATH NOTE

Soluzione (Risposta: 3000). Sia N il numero ottenuto dalla concatenazione ordinata, da sinistra verso destra, di tutti i numeri da n a $2n - 1$. Ricordiamo che un numero è divisibile per 3 se e solo lo è la somma delle sue cifre. Sia $S(m)$ la somma delle cifre di un intero m positivo. Allora abbiamo

$$\begin{aligned} N \equiv_3 S(N) &= S(n) + S(n+1) + \dots + S(2n-1) \equiv_3 n + (n+1) + \dots + \overbrace{(n+n-1)}^{2n-1} \\ &= n \cdot n + \sum_{k=0}^{n-1} k = n^2 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Quindi, affinché N sia divisibile per 3 si deve avere che $n(3n-1)/2$ sia multiplo di 3. Visto che $3n-1$ è coprimo con 3, l'unica possibilità è che n stesso sia divisibile per 3. Quindi la risposta è il numero di interi di 4 cifre divisibili per 3, che è pari a

$$\left\lfloor \frac{10000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 3000$$

che è la risposta. ⊗

3 UN QUESITO IMPOSSIBILE

Soluzione (Risposta: 2232). Elevando al quadrato la prima equazione, otteniamo

$$x^2 + y^4 - 2xy^2 = 100 \xrightarrow{x^2+y^4=650} xy^2 = \frac{650-100}{2} = 275,$$

da cui $y^2 = 225/x$. Sostituendo nuovamente nella prima equazione e moltiplicando per x , si ottiene

$$x^2 - 275 = 10x \implies x^2 - 10x - 275 = 0.$$

Notiamo che, dalla prima equazione $x = 10 + y^2 > 10$, quindi sicuramente dobbiamo prendere l'unica soluzione positiva. Usando la formula con il discriminante ridotto, si ottiene

$$x = 5 \pm \sqrt{25 + 275} = 5 \pm \sqrt{300} = 5 \pm 10\sqrt{3}$$

e pertanto la risposta è $100(5 + 10\sqrt{3}) = 500 + 1000\sqrt{3} \simeq 2232,1$. ⊗

4 INIZIA LA SFIDA

Soluzione (Risposta: 97). Notiamo che i numeri coprimi con 12 sono quelli coprimi con 2 e con 3. Quindi, per inclusione-esclusione, la somma cercata si può calcolare come la somma su tutti i numeri naturali, meno la somma fatta sui multipli di 2, meno la somma fatta sui multipli di 3, riaggiungendo poi la somma fatta sui multipli di 6 (che sono altrimenti stati tolti due volte). Ricordiamo in generale la formula per le serie geometriche di ragione q , che vale

$$\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} q^k = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} q^k = -1 + \frac{1}{1-q},$$

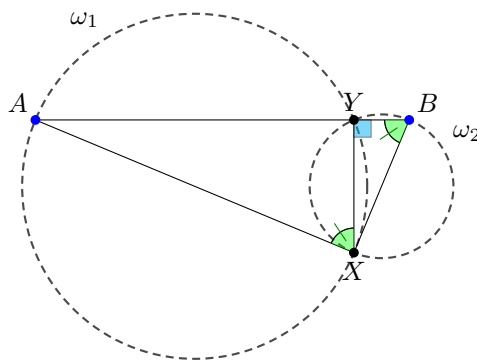
con $0 < q < 1$. Quindi dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{6k}} \\ &= \left(-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) - \left(-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\right) - \left(-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}\right) + \left(-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2^6}}\right) \\ &= 2 - \frac{4}{3} - \frac{8}{7} + \frac{64}{63} = \frac{34}{63}, \end{aligned}$$

da cui la risposta $34 + 63 = 97$. ⊗

5 CIRCONFERENZE MORTALI

Soluzione (Risposta: 195). La situazione è la seguente.



Visto che AX è tangente ω_2 in X , si ha che $\widehat{YBX} = \widehat{YXA}$ e quindi i due triangoli YBX e AYX sono simili, essendo entrambi retti. In particolare, ABX è retto e quindi conosciamo il valore della sua altezza YX e della proiezione AY del cateto AX sull'ipotenusa AB . Notiamo che $XY = 5 \cdot 6$ e $AY = 12 \cdot 6$. Per il teorema di Pitagora, ricaviamo

$$AX = \sqrt{AY^2 + YX^2} = \dots = 13 \cdot 6 = 78.$$

Dal teorema di Euclide si ottiene

$$AB = \frac{AX^2}{AY} = \dots = \frac{169}{2}$$

e dalla similitudine tra AXB e AYX si ricava

$$BX = \frac{AX}{AY} \cdot YX = \dots = \frac{65}{2}.$$

Il perimetro cercato è allora pari a $78 + 169/2 + 65/2 = 195$.


6 *DIROTTAMENTO*

Soluzione (Risposta: 591). Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano in modo che $A = (0, 0)$ e $B = (3, 3)$. Innanzitutto notiamo che per la casella in basso sinistra deve necessariamente essere libera la diagonale $(0, 0) \rightarrow (1, 1)$, altrimenti il punto di partenza è isolato; una considerazione analoga vale per la casella in alto a destra. Ora distinguiamo due casi principali.

- Se nella casella centrale è libera la diagonale $(1, 1) \rightarrow (2, 2)$, allora si può seguire il percorso $(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 3)$ indipendentemente dalla configurazione delle altre sei caselle: dunque 2^6 casi favorevoli.
- Se nella casella centrale è libera la diagonale $(1, 2) \rightarrow (2, 1)$, allora ci sono due percorsi possibili simmetrici: uno è

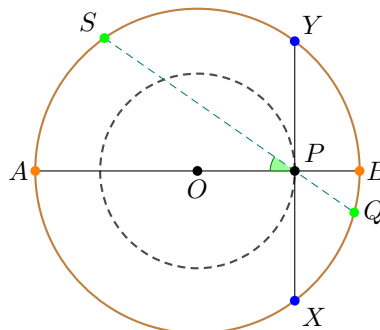
$$(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (0, 2) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 3),$$

l'altro è il suo simmetrico rispetto alla retta $y = x$. In entrambi i casi ci sono esattamente 3 caselle in cui possono esserci configurazioni a piacere di diagonali libere: dunque $2 \cdot 2^3$ casi favorevoli. In questo modo abbiamo però contato due volte l'unica configurazione in cui sono possibili entrambi i percorsi, quindi occorre sottrarre 1.

I casi favorevoli sono $2^6 + 2 \cdot 2^3 - 1 = 79$ mentre i casi possibili sono $2^9 = 512$. La probabilità cercata è $\frac{79}{512}$ e la risposta è $79 + 512 = 591$. 

7 *LA METROPOLITANA DI TOKYO*


Soluzione (Risposta: 24). Senza perdita di generalità (a meno di rotazioni), possiamo supporre che la posizione reciproca tra il centro dell'isola e il punto P sia quella descritta dalla seguente immagine.



Questo problema si risolve con una cosiddetta *considerazione di continuità*. Sia infatti, come in figura, SQ una generica corda passante per P inclinata di un certo angolo. Se stabiliamo la lunghezza minima e la lunghezza massima di una corda passante per P , cambiando *con continuità* l'angolo di inclinazione rispetto alla retta PQ , possiamo ottenere tutte le lunghezze intere intermedie. Notiamo che la corda passante sia per P che per Q è un diametro, quindi è sicuramente la maggiore (in figura la corda AB). Allora, la corda perpendicolare XY a AB in P è chiaramente la corda di lunghezza minore.

La lunghezza di AB è $30 \cdot 2 = 60$. Il triangolo AYB è rettangolo, quindi per il teorema di Euclide otteniamo che $YP = \sqrt{AP \cdot PB}$. Visto che $OP = 18$, otteniamo

$$YX = 2\sqrt{AP \cdot PB} = 2\sqrt{(AO + OP)(AO - OP)} = 2\sqrt{AO^2 - OP^2} = \dots = 48.$$

Quindi le corde con lunghezza intera tra $48 + 1 = 49$ e $60 - 1 = 59$ si possono tutte ottenere (tramite due corde simmetriche rispetto al diametro AB), per un totale di $1 + 1 + 2(59 - 49 + 1) = 24$ corde. 

8 *GLI sinh (igami) AMANO LE MELE*

Soluzione (Risposta: 640). Concentriamoci su una singola colonna di mele. Se la colonna ha k mele, allora visto che si possono mangiare solo o la mela più in basso o quella più in alto, è chiaro che il numero di modi totale di mangiare le mele in questa colonna è 2^{k-1} (l'ultima mela è forzata). Quindi in totale abbiamo 2^3 modi per la colonna con 4 mele, 2^2 per quella con 3 mele e 2^1 modi per quella con due mele.

Rimane da calcolare in che modo ordinate complessivamente le mele mangiate da ogni colonna. Se $A_1A_2A_3A_4$ indica la sequenza di mele mangiate dalla colonna con 4 mele, $B_1B_2B_3$ indica la sequenza di mele mangiate dalla colonna con 3 mele e C_1C_2 indica la sequenza di mele mangiate dalla colonna con 2 mele, il problema si riconduce a contare gli anagrammi della parola

$$A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3C_1C_2$$

con quattro A , con tre B e con due C , per un totale di $\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$ modi possibili. Quindi il numero totale di modi è

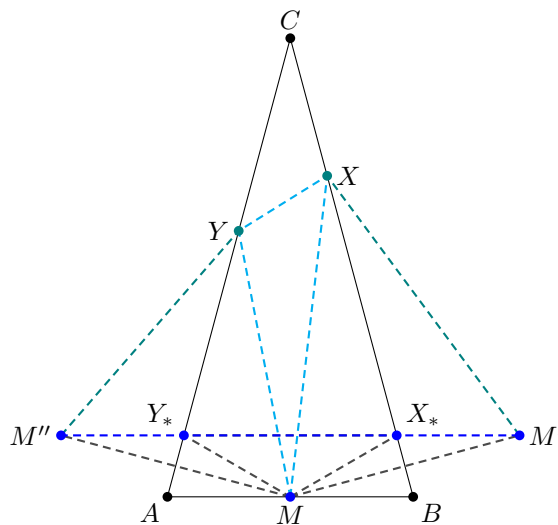
$$2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^1 \cdot \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 80640$$

da cui 640 è la risposta cercata. ⊗

Seconda parte - Allo scoperto - SOLUZIONI

9 SFIDA TENNISTICA

Soluzione (Risposta: 1866). Siano A' e M' i rispettivi simmetrici di A e M rispetto alla retta BC ; siano B'' e M'' i rispettivi simmetrici di B e M rispetto alla retta AC . Siano infine X il punto di rimbalzo sul lato BC e Y il punto di rimbalzo sul lato AC . La situazione è la seguente.



Ricordiamo che la nozione di “rimbalzo” implica che l’angolo di incidenza sia uguale all’angolo di uscita. Quindi, l’osservazione fondamentale è che la lunghezza del percorso $MX + XY + YM$ coincide con quella del percorso $M''Y + YX + XM'$ e gli unici X_*, Y_* per cui l’angolo di incidenza è uguale all’angolo di uscita sono quelli per cui M'', Y, X, M' sono allineati. Siano quindi Y_*, X_* i punti di intersezione di $M''M'$ con AC, BC rispettivamente. Il percorso cercato è dato da $MX_* + X_*Y_* + Y_*M$.

Per costruzione $M''M' \parallel AB$ e quindi $\widehat{X_*M'M} = \widehat{M'MB}$ perché angoli alterni interni. D’altro canto il triangolo MX_*M' è isoscele per costruzione, quindi $\widehat{X_*MM'} = \widehat{X_*M'M}$, ossia la retta MM' è bisettrice in M del triangolo MBX_* . D’altro canto $MM' \perp X_*B$, quindi MBX_* è isoscele. Questo permette di concludere che

$$\widehat{Y_*X_*M} = 180^\circ - \widehat{Y_*X_*C} - \widehat{MX_*B} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ.$$

Sia $\ell = AB$. Visto che MX_*Y_* è isoscele per simmetria, si ottiene anche $\widehat{X_*Y_*M} = 30^\circ$ e $\widehat{Y_*MX_*} = 120^\circ$. Per simmetria, $MX_* = MB = \ell/2$ e $MY_* = MA = \ell/2$, quindi ci basta calcolare Y_*X_* .

Visto che $\widehat{Y_*MX_*} = 120^\circ$, la lunghezza Y_*X_* si può calcolare agevolmente con il teorema del coseno:

$$Y_*X_* = \sqrt{Y_*M^2 + X_*M^2 - 2 \cdot Y_*M \cdot X_*M \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{\frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4} - 2 \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell$$

da cui

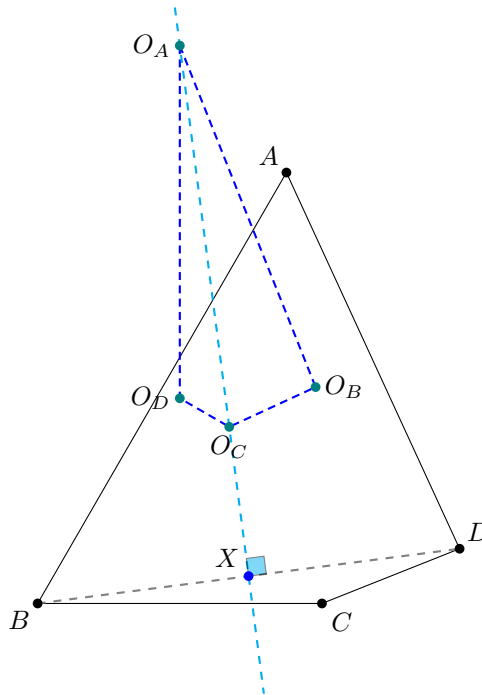
$$MX_* + X_*Y_* + Y_*M = \ell + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell = 1000 + 500\sqrt{3} \approx 1866,05 \dots$$

La risposta è 1866.



10 UNA PROVA DI INTELLIGENZA [🍎]

Soluzione (**Risposta:** 6950). Innanzitutto cerchiamo di stabilire quando il quadrilatero convesso $ABCD$ è simile a $O_AO_BO_CO_D$.



Consideriamo la diagonale O_AO_C . Per costruzione, visto che O_A e O_C sono i circocentri dei triangoli BCD e ABD , si ha che O_A e O_C stanno singolarmente sull'asse di BD , ossia $O_AO_C \perp BD$. Lo stesso ragionamento porta a $O_BO_D \perp AC$. Per lo stesso motivo O_D e O_A stanno singolarmente sull'asse di BC , ossia $O_AO_D \perp BC$. Tutte queste perpendicolarità hanno una conseguenza molto importante. Siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gli angoli interi nei vertici A, B, C, D in $ABCD$. Allora, visto che, ad esempio, l'angolo $\widehat{O_BO_AO_D}$ è l'angolo compreso tra le due rette O_AO_B e O_AO_D , rispettivamente perpendicolari a DC e BC , si ha che

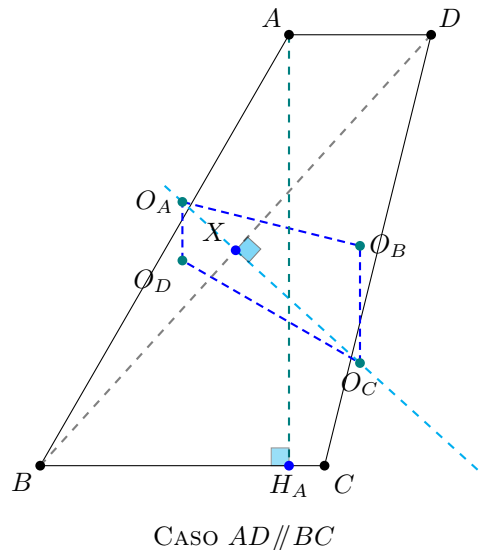
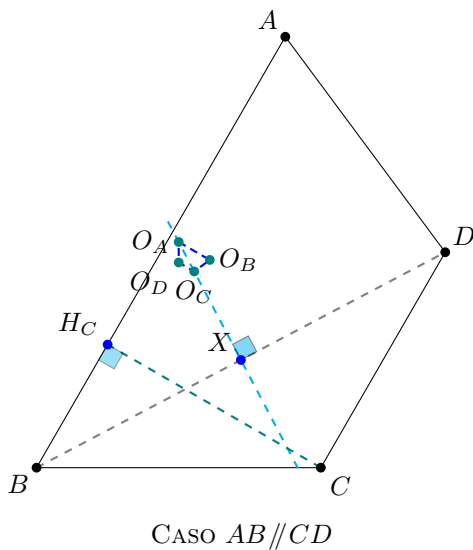
$$\widehat{O_BO_AO_D} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 180^\circ - \gamma.$$

Questo è vero per la seguente considerazione generale. Siano ℓ_1, ℓ_2 due rette, che si intersecano in X che formano tra loro un angolo ϑ ; siano s_1, s_2 due rette tali che $s_1 \perp \ell_1, s_2 \perp \ell_2$ tali che $s_1 \cap s_2 = Y$; siano infine $s_1 \cap \ell_1 = X_1, s_2 \cap \ell_2 = X_2$; allora il quadrilatero XX_1YX_2 è ciclico per costruzione (due angoli opposti di 90°), quindi l'angolo tra s_1 e s_2 è $180^\circ - \vartheta$. In modo analogo a $\widehat{O_BO_AO_D}$, si ottiene

$$\widehat{O_BO_AO_D} = 180^\circ - \delta, \widehat{O_BO_CO_D} = 180^\circ - \alpha, \widehat{O_CO_DO_A} = 180^\circ - \beta.$$

Ora dimostreremo che, se $ABCD$ è simile a $O_AO_BO_CO_D$, allora $ABCD$ è un trapezio. Per avere la similitudine, si deve avere che α è uguale a uno degli angoli $\widehat{O_BO_AO_D}, \widehat{O_AO_BO_C}, \widehat{O_BO_CO_D}, \widehat{O_CO_DO_A}$. Notiamo che, se $\alpha = \widehat{O_AO_BO_C} = 180^\circ - \delta$ o $\alpha = \widehat{O_CO_DO_A} = 180^\circ - \beta$, allora otteniamo che $\alpha + \delta = 180^\circ$ oppure $\alpha + \beta = 180^\circ$: in ogni caso, $ABCD$ avrebbe due angoli adiacenti supplementari e quindi $ABCD$ sarebbe un trapezio. Se invece $\alpha = \widehat{O_BO_AO_D} = 180^\circ - \gamma$, allora $\alpha + \gamma = 180^\circ$ e quindi $ABCD$ è ciclico, avendo due angoli opposti supplementari. Questa casistica è allora da escludere visto che, in tal caso, i quattro circocentri O_A, O_B, O_C, O_D coincidono dato che i triangoli ABC, ABD, ACD, BCD hanno la stessa circonferenza circoscritta. L'ultimo caso è $\alpha = \widehat{O_BO_CO_D} = 180^\circ - \alpha$, da cui $\alpha = 90^\circ$: allora sarebbe possibile ripetere il processo con l'angolo γ , ottenendo che o γ, β sono supplementari, o γ, δ sono supplementari oppure $\gamma = 180^\circ - \gamma$, ossia $\gamma = 90^\circ$ ma in tal caso $ABCD$ sarebbe di nuovo ciclico e quindi il quadrilatero $O_AO_BO_CO_D$ sarebbe ciclico. In conclusione, $ABCD$ è un trapezio.

Per concludere, rimane quindi da capire le possibili posizioni del punto D . Per ipotesi, l'area totale del quadrilatero $ABCD$ è $1050\sqrt{3}$. D'altro canto, il triangolo ABC è univocamente determinato, in particolare la sua area è data da $\frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \sin 60^\circ = 700\sqrt{3}$ e quindi l'area di ACD è $350\sqrt{3}$. Dato che $ABCD$ è un trapezio, o $AB \parallel CD$ oppure $AD \parallel BC$.



Analizziamo i due casi separatamente:

- $AB \parallel CD$: in questo caso, l'altezza uscente da A del triangolo ACD ha la stessa lunghezza dell'altezza uscente da C nel triangolo ABC . Sia H_C la proiezione di C su AB , come nella figura qui sopra a sinistra. Allora $CH_C = BC \sin 60^\circ = 20\sqrt{3}$ e quindi possiamo trovare la lunghezza di CD :

$$CD = \frac{2[ACD]}{CH_C} = \frac{2 \cdot 350\sqrt{3}}{20\sqrt{3}} = 35.$$

Per trovare il valore di AD^2 , invece, ci basta osservare che si può ottenere da Pitagora come

$$AD^2 = (AB - BH_C - CD)^2 + CH^2 = (70 - 40 \cos 60^\circ - 35)^2 + (20\sqrt{3})^2 = 1425.$$

In questo caso $AD^2 + CD^2 = 1425 + 1225 = 2650$.

- $AD \parallel BC$: in questo caso, l'altezza uscente da C del triangolo ACD ha la stessa lunghezza dell'altezza uscente da A nel triangolo ABC . Sia H_A la proiezione di A su BC , come nella figura qui sopra a destra. Allora $AH_A = AB \sin 60^\circ = 35\sqrt{3}$ e quindi possiamo trovare la lunghezza di AD :

$$AD = \frac{2[ACD]}{AH_A} = \frac{2 \cdot 350\sqrt{3}}{35\sqrt{3}} = 20.$$

Per trovare il valore di CD^2 , invece, ci basta osservare che si può ottenere da Pitagora come

$$CD^2 = (AD + BH_A - BC)^2 + AH^2 = (20 + 70 \cos 60^\circ - 40)^2 + (35\sqrt{3})^2 = 3900.$$

In questo caso $AD^2 + CD^2 = 3900 + 400 = 4300$.

Da ciò si ottiene la risposta $2650 + 4300 = 6950$.

Remark Per completezza, si può dimostrare che in realtà, dato $ABCD$ quadrilatero convesso, allora $ABCD$ è simile a $O_AO_BO_CO_D$ se e solo se $ABCD$ è un trapezio. Infatti, abbiamo già dimostrato che, se $ABCD$ è simile a $O_AO_BO_CO_D$, allora $ABCD$ è un trapezio. Il viceversa è simile, osservando che, se $ABCD$ è un trapezio, allora, ad esempio $AB \parallel CD$ (questo è uno sketch dimostrativo): per le perpendicolarità già specificate, allora ad esempio si ottiene che O_CO_D , essendo perpendicolare a AB , è anche perpendicolare a CD e analogamente O_AO_B , essendo perpendicolare a CD , è perpendicolare anche a AB , ossia $O_CO_D \parallel O_AO_B$ e quindi anche $O_AO_BO_CO_D$ è un trapezio. Da qui non è così complesso concludere la dimostrazione.

Soluzione (Risposta: 4986). Iniziamo stabilendo quali terne (a, b, c) sono valide. Razionalizzando la frazione $\frac{a\sqrt{67}+b}{b\sqrt{67}+c} = q$, si ottiene

$$\frac{67ab - bc + \sqrt{67}(b^2 - ac)}{67b^2 - c^2}$$

e quindi l'unica possibilità affinché tale quantità sia razionale è che $b^2 = ac$. In tal caso, otteniamo

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} = \frac{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)}{a + b + c} \stackrel{b^2=ac}{=} a + b + c - 2 \cdot \frac{ba + bc + b^2}{a + b + c} = a + c - b.$$

Ci siamo ricondotti quindi al risolvere il sistema

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ a + c - b = 21 \end{cases}$$

con a, b, c interi positivi. Data la simmetria del sistema in a, c supponiamo $a \geq c$. Notiamo che a, c sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado $x^2 - (a + c)x + ac = 0$ e quindi, utilizzando le equazioni del sistema, otteniamo

$$x^2 - (21 + b)x + b^2 = 0.$$

Affinché tale equazione abbia soluzioni intere positive, il discriminante deve essere un quadrato perfetto. Abbiamo che

$$\Delta = (21 + b)^2 - 4b^2 = 3(7 + b)(21 - b)$$

che è non-negativo per $1 \leq b \leq 21$. Tramite verifica diretta, tale quantità è un quadrato perfetto solo per $b = 5, 9, 14, 18, 20, 21$ (in quest'ultimo caso è nullo), che porta alle terne

$$(a, b, c) = (25, 5, 1), (27, 9, 3), (28, 14, 7), (27, 18, 12), (25, 20, 16), (21, 21, 21).$$

Notiamo che, in ogni terna, il prodotto ac è uguale a b^2 per costruzione e inoltre lo stesso prodotto ac conta due volte per la simmetria tra a e c , quindi per una singola terna dobbiamo calcolare la quantità $2(b^2 + ac) = 4b^2$ (tranne nel caso della terna $(21, 21, 21)$ in cui $a = c$ e quindi $ac + b^2 = 2 \cdot 21^2$). Pertanto la somma cercata è

$$4(5^2 + 9^2 + 14^2 + 18^2 + 20^2) + 2 \cdot 21^2 = 4986.$$

12 MESSAGGIO SOSPETTO

Soluzione (Risposta: 3). Poniamo $n = \lfloor x \rfloor$ e $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = q$, quindi $x = n + q$. In particolare, $0 \leq q < 1$. La condizione richiesta si traduce in

$$\frac{2}{\frac{1}{n+q} + \frac{1}{q}} = n$$

da cui, con alcuni passaggi algebrici, si arriva a

$$\frac{2q(n+q)}{n+2q} = n \implies n^2 = 2q^2.$$

Visto che $2q^2 < 2$, ma deve essere uguale a n^2 che è intero, l'unica possibilità è che $n^2 = 1$ e $2q^2 = 1$, da cui (ricordando $q > 0$) si ottengono le due possibilità

$$(n, q) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (n, q) = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Pertanto

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} + 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 3,$$

che è la risposta cercata. 

13 COME MUORE UNO sinh (igami)

Soluzione (Risposta: 60). Sia X_i il numero di sinh (*igami*) presenti sulla Terra dopo l' i -esimo lancio; vogliamo calcolare la probabilità che esista un istante in cui $X_i = 9218$. Osserviamo innanzitutto che $9218 = 2 + 2^{10} + 2^{13}$. Inoltre, dopo 12 lanci il numero massimo possibile di sinh (*igami*) sulla Terra è

$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^{12} = 2^{13} - 2 = 8190 < 9218.$$

Pertanto non si può raggiungere 9218 prima del 13-esimo lancio; ne segue che, se 9218 viene raggiunto, ciò avviene necessariamente al 13-esimo lancio. Poiché al 13-esimo lancio l'unico contributo positivo possibile è 2^{13} , il 13-esimo lancio deve essere blu, e dopo il 12-esimo lancio bisogna trovarsi a quota

$$9218 - 2^{13} = 1026.$$

Allo stesso modo, dopo 9 lanci il massimo valore possibile è

$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2^{10} - 2 = 1022 < 1026,$$

quindi per arrivare a 1026 il decimo lancio deve essere blu, e dopo il nono lancio bisogna trovarsi a quota

$$1026 - 2^{10} = 2.$$

Infine, per arrivare a 2, il primo lancio deve necessariamente essere blu. In conclusione, ogni sequenza favorevole ha necessariamente la forma

$$B \text{ (lanci 2-9)} \ B \text{ (lanci 11-12)} \ B,$$

dove:

- dopo i lanci 2, ..., 9 si deve restare a 2, senza mai scendere sotto 0. Per poter tornare al valore iniziale senza mai andare sotto 0, ogni B deve essere seguito da un V e ogni V deve essere preceduto da un B , poiché $2^1 + 2^2 + \dots + 2^k < 2^{k+1}$. Dunque, il numero di sequenze di 8 lanci possibili coincide col numero di modi di tassellare 8 caselle consecutive con tasselli di lunghezza 1 (lancio R) oppure di lunghezza 2 (coppia di lanci consecutivi BV). Se chiamiamo a_n il numero di modi di tassellare n caselle consecutive con tasselli di lunghezza 1 oppure 2, vale la ricorrenza

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

cioè a_n è la successione di Fibonacci. Con le condizioni iniziali $a_1 = 1, a_2 = 2$, si ottiene $a_8 = 34$.

- dopo i lanci 11, 12 si deve restare a 1026. In questo caso le uniche possibilità sono RR oppure BV . ⊗

Il numero totale di sequenze favorevoli è dunque 68. Poiché ogni sequenza di 13 lanci ha probabilità $\frac{1}{3^{13}}$, la probabilità cercata è

$$\frac{68}{3^{13}},$$

da cui la risposta.

14 PASSEGGIATA AD AOYAMA [🍎]

Soluzione (Risposta: 715). Per prima cosa, osserviamo che Light-niz può cambiare direzione solamente un numero dispari di volte: può quindi invertire il senso di marcia solo 1, 3, 5, 7 volte. Notiamo inoltre che, poiché dopo 16 mosse deve tornare al punto di partenza, Light-niz non può allontanarsi più di 80 metri dal punto di partenza. Rappresentando i percorsi su una griglia, dove l'asse delle ascisse rappresenta il tempo, otteniamo dei percorsi della forma seguente.

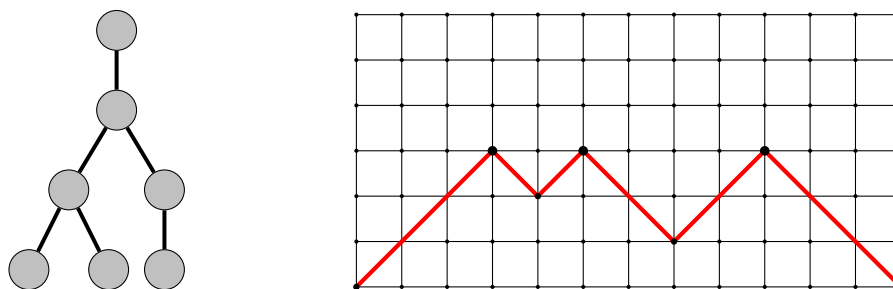


In particolare, questi percorsi sono percorsi di Catalan in quanto Light-niz non può uscire dalla strada. Inoltre, se c è il numero di cambi di direzione fatti da Light-niz in un dato percorso, si può notare che tale percorso ha esattamente $k = \lceil \frac{c}{2} \rceil$ “punte”, contrassegnate in figura dai vertici marcati. È facile notare che un generico percorso di Catalan di lunghezza $2n$ può avere $1, 2, \dots, n$ punte.

Per risolvere il problema, utilizziamo la rappresentazione ad albero delle parole di Dyck, corrispondenti ai percorsi di Catalan: a ogni percorso possiamo associare un albero radicato costruito mediante la seguente procedura:

- si parte con un nodo solo, la radice e primo nodo “attivo”;
- ogni volta che Light-niz si allontana dal punto di partenza, aggiungiamo un figlio al nodo attivo e il figlio diventa il nuovo nodo attivo;
- ogni volta che Light-niz si avvicina al punto di partenza, risaliamo l'albero e il padre del nodo attivo diventa il nuovo nodo attivo.

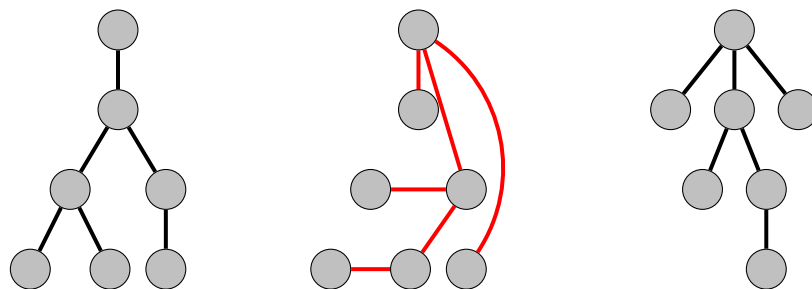
Il risultato è un albero radicato con n archi (o $n + 1$ vertici) e k foglie. In figura è mostrato un esempio con $n = 6$ e $k = 3$.



Possiamo dunque evidenziare l'esistenza di una biiezione tra i percorsi di lunghezza $2n$ con k punte e quelli con $n - k + 1$ punte: infatti, un albero radicato con n archi e k foglie può essere trasformato in uno con n archi e $n - k + 1$ foglie mediante la seguente applicazione: per ogni nodo diverso dalla radice, risaliamo l'albero e cerchiamo il suo primo antenato con un fratello destro (nota bene: ogni nodo è antenato di sé stesso).

- Se tale antenato esiste, colleghiamo il nodo al fratello destro dell'antenato.
- Se tale antenato non esiste, colleghiamo il nodo alla radice.

Mostriamo in figura un esempio con il percorso appena considerato.



Ripetendo lo stesso procedimento utilizzando il fratello sinistro anziché quello destro si ottiene la funzione inversa: abbiamo quindi una biiezione.

Quindi, poiché stiamo contando i percorsi corrispondenti ad alberi con 8 archi e al più 4 foglie, si ha che essi sono in biiezione con gli alberi con 8 archi e almeno 5 foglie. Ma dato che l'unione di questi due insiemi disgiunti corrisponde all'insieme di tutti i percorsi di Catalan di lunghezza 16, il numero di percorsi cercati è $\frac{C_8}{2} = \frac{1430}{2} = 715$. ⊗

15 GLI OCCHI DELLO \sinh (*igami*)

Soluzione (Risposta: 256). Innanzitutto notiamo che 1 è sospetto, visto che il numero di soluzioni di $a + b = 1$, con a, b interi positivi, è zero, che minore di $1/2$. Ora cerchiamo di stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $a + b = n$ con $\text{MCD}(a, b) = 1$ e $n \geq 2$. Notiamo che, necessariamente, sia a che b sono coprimi con n , visto che, altrimenti, se per esempio a avesse dei fattori in comune con n allora anche $b = n - a$ dovrebbe averli. Supponiamo ora che a sia coprimo

con n . Allora anche $b = n - a$ è coprimo con n e possiamo verificare che in realtà a è anche coprimo con b . Infatti, in tal caso

$$\text{MCD}(a, \overbrace{n-a}^{=b}) = \text{MCD}(a, (n-a) + a) = \text{MCD}(a, n) = 1.$$

Quindi il numero di soluzioni dell'equazione $a + b = 1$ con $\text{MCD}(a, b) = 1$ è pari al numero di interi positivi $a \leq n$ coprimi con n , che è dato da $\varphi(n)$, ossia dalla funzione di Eulero di n . Pertanto noi stiamo cercando gli interi n positivi per cui $\varphi(n) \leq \frac{n}{2}$.

Ricordiamo che, se $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ è la scomposizione in fattori primi di n , allora

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Noi cerchiamo gli interi n per cui

$$n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \leq \frac{n}{2} \implies \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Supponiamo, senza perdita di generalità, che $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Se $p_1 = 2$ (ossia se n è pari), otteniamo

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \leq \frac{1}{2}$$

che è sicuramente vero, visto che ciascuno dei termini $1 - \frac{1}{p_i}$, con $2 \leq i \leq k$, è strettamente minore di 1. Quindi tutti gli interi pari vanno bene.

Supponiamo allora che $p_1 \geq 3$. Dato che i p_i sono crescenti, allora anche le quantità $1 - \frac{1}{p_i}$ sono in ordine crescente (la funzione $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ è crescente). Notiamo che nel caso considerato, se $k \geq 4$, allora n dovrebbe valere al minimo $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155 > 1000$, quindi abbiamo $k \leq 3$. Consideriamo i vari casi.

$k = 1$) In tal caso abbiamo

$$1 - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{2} \implies p_1 \leq 2$$

e quindi, visto che $p_1 \geq 3$, non abbiamo soluzioni.

$k = 2$) In tal caso abbiamo

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Visto che la quantità $1 - \frac{1}{p_i}$ cresce all'aumentare di p_i , il prodotto $\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$ vale al minimo $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15} > \frac{1}{2}$, che è assurdo. Anche in questo caso non ci sono soluzioni.

$k = 3$) In tal caso abbiamo

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Per quanto detto al punto precedente, se $p_1 \geq 5$, allora

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{48}{77} > \frac{1}{2}$$

e quindi necessariamente $p_3 = 3$. Allora

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \leq \frac{1}{2} \implies \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \leq \frac{3}{4}.$$

Come prima, se $p_2 \geq 7$, allora $\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) > \frac{3}{4}$ quindi $p_2 = 5$. Allora

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \leq \frac{3}{4} \implies \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \leq \frac{15}{16} \implies p_3 \leq 16.$$

In questo caso vanno bene quindi i numeri della forma $n = 3^{a_1} \cdot 5^{a_2} \cdot p_3^{a_3}$, con $7 \leq p_3 \leq 16$ e $n \leq 500$.

Se $p_3 = 7$, notiamo che $3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 525 > 500$, quindi l'unico fattore primo che può avere un esponente diverso da 1 è 3: abbiamo le soluzioni $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$.

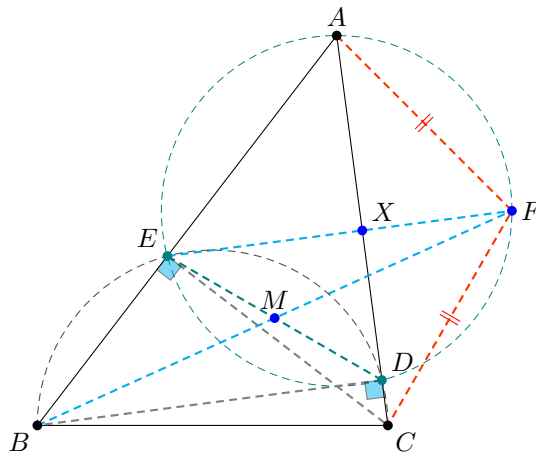
Se $p_3 = 11$, notiamo che $3 \cdot 5^2 \cdot 11 > 500$, quindi l'unico fattore primo che può avere un esponente diverso da 1 è 3: abbiamo le soluzioni $3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 495$.

Se $p_3 = 13$, l'unica possibilità è $3 \cdot 5 \cdot 13 = 195$.

In conclusione, gli n cercati sono 1, gli n pari, più 105, 165, 195, 315, 495, per un totale di $250 + 6 = 256$ numeri. ⊗

16 L'ESECUZIONE

Soluzione (**Risposta:** 707). La situazione è la seguente.



Strutturiamo la soluzione in tre passaggi principali.

- Osserviamo che il punto D è l'ortocentro di CFE . Infatti, visto che angoli alla circonferenza che insistono su un diametro sono retti, abbiamo $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$. Il quadrilatero $BDFE$ è un parallelogramma in quanto le sue diagonali BF e DE si intersecano nel punto medio, per costruzione. Allora dal parallelismo $BD \parallel EF$ segue $CA \perp EF$, e analogamente dal parallelismo $BE \parallel DF$ segue $FD \perp EC$. Allora D è l'ortocentro di CFE in quanto intersezione tra le altezze uscenti da C e F .
- Dimostriamo che CFE è simile ad ABC . Posto $\widehat{CBA} = \beta$, ricaviamo $\widehat{ECB} = 90^\circ - \beta$, poi $\widehat{EDB} = \widehat{ECB} = 90^\circ - \beta$ per la ciclicità di $BCDE$, infine $\widehat{EFC} = \beta$ in quanto $ED \perp CF$. Dunque $\widehat{CBA} = \widehat{EFC}$ e con passaggi del tutto analoghi si mostra $\widehat{ACB} = \widehat{FCE}$.
- Dimostriamo che i triangoli CFE e AEF sono congruenti. Notiamo che $\widehat{FCA} = \widehat{DEF}$ in quanto entrambi complementari di \widehat{EFC} ; allo stesso tempo $\widehat{DEF} = \widehat{DAF}$ per la ciclicità di $AEDF$, quindi $\widehat{CAF} = \widehat{FCA}$ e $AF = FC$. Inoltre, $\widehat{EFC} = \widehat{ADE}$ in quanto entrambi complementari di \widehat{DEF} ; allo stesso tempo $\widehat{ADE} = \widehat{AFE}$ per la ciclicità di $AEDF$, quindi $\widehat{EFC} = \widehat{AFE}$. I triangoli CFE e AEF risultano congruenti avendo EF in comune, $AF = FC$ e $\widehat{AFE} = \widehat{EFC}$. ⊗

Per concludere, basta ricavare il rapporto di similitudine tra ABC e CFE . Sia X l'intersezione tra AC e EF , come in figura: osserviamo che X è il punto medio di AC , visto che $AE = EC$ e $AF = FC$ ossia EF è asse di AC . Vale allora la proporzione

$$CX : CE = CE : AC$$

per similitudine; sostituendo $AC = 40$ e $CX = AC/2 = 20$ otteniamo

$$\begin{aligned} 20 : CE &= CE : 40 \\ CE^2 &= 800 \\ CE &= 20\sqrt{2}. \end{aligned}$$

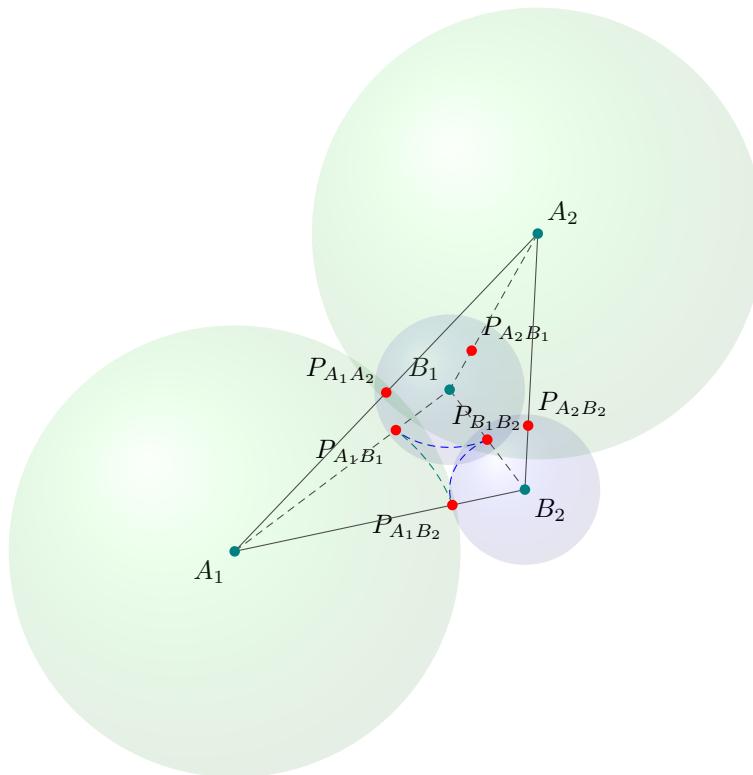
Dunque il rapporto di similitudine è $\frac{AC}{CE} = \sqrt{2}$ e il rapporto tra le aree di ABC e CFE è 2; in altre parole, l'area di $AECF$ è il doppio di quella di CFE , ossia coincide con quella di ABC :

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 20\sqrt{2} = 500\sqrt{2} \approx 707,10.$$

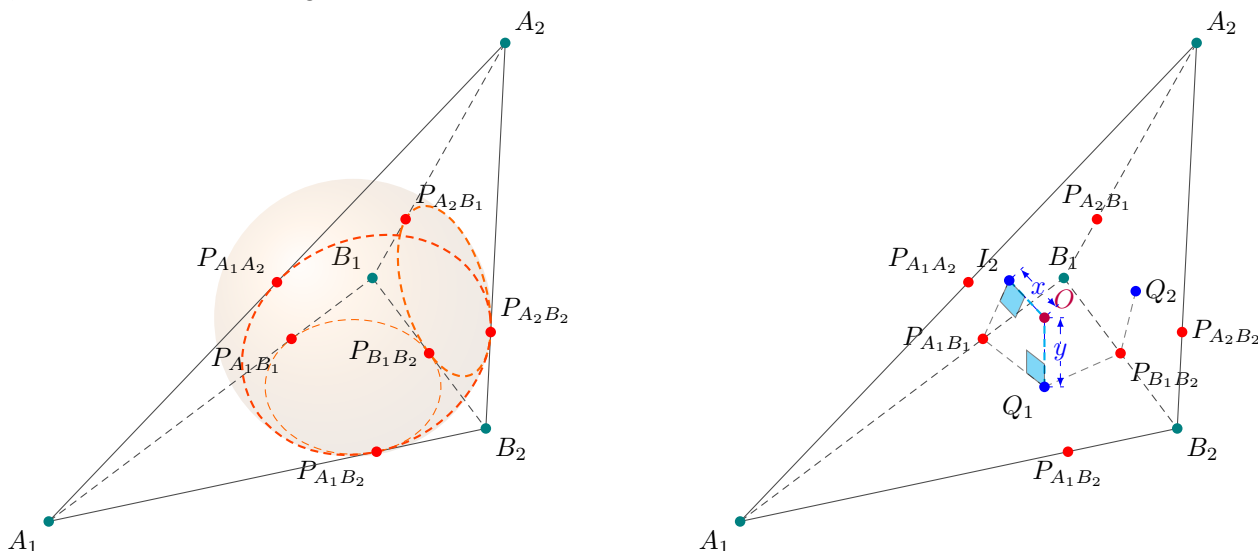
La risposta è 707.

17 IL NUOVO QUARTIER GENERALE [🍏]

Soluzione (**Risposta:** 506). La situazione 3D è la seguente.



Concentriamoci solo sul tetraedro risultante dai centri A_1, A_2, B_1, B_2 delle sfere e sulla sfera passante per i 6 punti di tangenza, evidenziati in rosso in figura.



Siano I_1, I_2 gli incentri delle facce $A_1A_2B_1$ e $A_1A_2B_2$ rispettivamente. Siano analogamente Q_1, Q_2 gli incentri delle facce $A_2B_1B_2$ e $A_1B_1B_2$ (quindi I_i è l'incentro della faccia con due vertici A e il vertice B di indice diverso da i ; Q_i è definito "viceversa"). Sia infine \mathcal{S} la sfera cercata.

L'osservazione chiave è la seguente. Consideriamo una faccia, ad esempio $A_1A_2B_2$, con i suoi relativi punti $P_{A_1A_2}, P_{A_1B_2}$ e $P_{A_2B_2}$. Per costruzione, si ha i segmentini $A_1P_{A_1A_2}$ e ciclici sono proprio i segmenti di tangenza dell'inscritta al triangolo $A_1A_2B_2$. In particolare, se consideriamo il piano passante per A_1, B_2, A_2 (ossia il piano che contiene tale faccia), la sua intersezione con \mathcal{S} deve coincidere* con la circonferenza inscritta al triangolo $A_1B_2A_2$. In modo analogo,

*L'intersezione tra un piano e una superficie sferica è sempre una circonferenza

si dimostra la medesima cosa per tutte le facce, ottenendo la figura qui sopra in a sinistra. In particolare, visto che le circonferenze inscritte tangono i segmenti dei vari triangoli, otteniamo che la sfera \mathcal{S} cercata è tangente a ciascuno dei lati del tetraedro $A_1A_2B_1B_2$.

Dato che le sfere sono uguali a coppie, il tetraedro $A_1A_2B_1B_2$ ha le facce a coppie congruenti: $A_1A_2B_1 \equiv A_1A_2B_2$ e $A_1B_1B_2 \equiv A_2B_1B_2$. Siano $a = 3m, b = 1m$ i raggi delle due sfere. Sia R il raggio di \mathcal{S} e sia O il suo centro. Notiamo che il centro di \mathcal{S} , visto che le facce sono congruenti a coppie, è univocamente determinato dalle distanze x, y di tale centro dalla faccia $A_1B_1A_2$ (che ha per lati $a + b, a + b, 2a$) e dalla faccia $A_1B_1B_2$ (che per lati $a + b, a + b, 2b$).

Come nella figura in alto a destra, abbiamo $I_2O = x, Q_1O = y$ e $P_{A_1B_1}O = R$. Siano r_a e r_b i raggi delle circonferenze inscritte rispettivamente alle facce $A_1B_1A_2$ (che ha per lati $a + b, a + b, 2a$) e $A_1B_1B_2$ (che per lati $a + b, a + b, 2b$). Con passaggi base, tenuto conto che sono triangoli isosceli, si ottiene

$$r_a = a\sqrt{\frac{b}{2a+b}}, \quad r_b = b\sqrt{\frac{a}{2b+a}}. \tag{2}$$

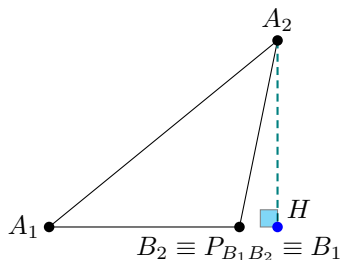
Dai triangoli rettangoli $P_{A_1B_1}Q_1O$ e $P_{A_1B_1}I_2O$ si ottengono le due equazioni

$$\begin{cases} R^2 = r_b^2 + y^2 & \text{Pitagora su } P_{A_1B_1}Q_1O \\ R^2 = r_a^2 + x^2 & \text{Pitagora su } P_{A_1B_1}I_2O \end{cases}.$$

Per trovare il valore di R , è sufficiente trovare una terza relazione che leghi R, x, y . Notiamo che, essendo O un punto interno a $A_1A_2B_1B_2$, O «divide» tale tetraedro internamente in 4 tetraedri, quindi possiamo imporre che la somma dei volumi di questi 4 tetraedri sia pari al volume totale di $A_1A_2B_1B_2$. Iniziamo calcolando quest'ultimo. Sia H la proiezione di A_2 su $A_1B_1B_2$. Si calcolano facilmente le aree delle facce laterali (che sono a due a due congruenti), quindi

$$\begin{aligned} [A_2B_1B_2] &= [A_1B_1B_2] = \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot A_1P_{B_1B_2} = b\sqrt{a^2 + 2ab} \\ [A_1A_2B_2] &= [A_1A_2B_1] = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot B_1P_{A_1A_2} = a\sqrt{b^2 + 2ab}. \end{aligned}$$

Per trovare il volume di $A_1A_2B_1B_2$ è sufficiente quindi trovare il valore di A_2H . Consideriamo quindi la visione laterale del tetraedro $A_1A_2B_1B_2$.



Sia $A_1H = z$. Allora i triangoli A_1A_2H e $P_{B_1B_2}A_2H$ (in questa prospettiva laterale, i punti $B_2, P_{B_1B_2}, B_1$ coincidono perchè allineati) sono entrambi rettangoli, con il cateto A_2H in comune. Visto che $P_{B_1B_2}H = A_1H - A_1P_{B_1B_2}$, otteniamo

$$A_1A_2^2 - A_1H^2 = A_2P_{B_1B_2}^2 - (A_1H - A_1P_{B_1B_2})^2.$$

Notiamo che $A_2P_{B_1B_2} = A_1P_{B_1B_2}$ corrispondono all'altezza nel triangolo isoscele $A_2B_1B_2$ e, con facili passaggi, si ottiene $A_1P_{B_1B_2} = \sqrt{a^2 + 2ab}$. Pertanto la precedente relazione diventa

$$(2a)^2 - z^2 = (\sqrt{a^2 + 2ab})^2 - (\sqrt{a^2 + 2ab} - z)^2 \implies z = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + 2ab}}.$$

Quindi

$$A_2H = \sqrt{A_1A_2^2 - A_1H^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{4a^4}{a^2 + 2ab}} = 2a\sqrt{\frac{2ab}{a^2 + 2ab}},$$

da cui

$$V = \text{Volume di } A_1A_2B_1B_2 = \frac{1}{3} \cdot [A_1B_1B_2] \cdot A_2H = \frac{2ab\sqrt{2ab}}{3}.$$

Allora la terza equazione cercata per x, y è data da

$$\frac{[A_1A_2B_1] \cdot x}{3} + \frac{[A_1B_1B_2] \cdot y}{3} + \frac{[A_1A_2B_2] \cdot x}{3} + \frac{[A_2B_1B_2] \cdot y}{3} = \frac{2ab\sqrt{2ab}}{3}$$

da cui

$$\overbrace{a\sqrt{b^2 + 2ab} \cdot x}^{[A_1A_2B_1]} + \overbrace{b\sqrt{a^2 + 2ab} \cdot y}^{[A_1B_1B_2]} = \frac{2ab\sqrt{2ab}}{2} = ab\sqrt{2ab}.$$

In conclusione, si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} R^2 = \left(b\sqrt{\frac{a}{2b+a}}\right)^2 + y^2 \\ R^2 = \left(a\sqrt{\frac{b}{2a+b}}\right)^2 + x^2 \\ a\sqrt{b^2 + 2ab} \cdot x + b\sqrt{a^2 + 2ab} \cdot y = ab\sqrt{2ab}. \end{cases} \quad (3)$$

Notiamo che non ci interessa ricavare x, y , ma solo R . Tramite la sostituzione $x = a\sqrt{\frac{b}{2a+b}} \cdot u, y = b\sqrt{\frac{a}{2b+a}} \cdot v$ le equazioni si semplificano notevolmente:

$$\begin{cases} R^2 = \frac{b^2a}{2b+a} (1 + v^2) \\ R^2 = \frac{a^2b}{2a+b} (1 + u^2) \\ a^2bu + b^2av = ab\sqrt{2ab} \implies au + bv = \sqrt{2ab} \end{cases}.$$

La terza equazione si può riscrivere anche come $\sqrt{\frac{2a}{b}}u + \sqrt{\frac{2b}{a}}v = 2$, quindi tramite l'ulteriore sostituzione $n = \sqrt{\frac{2a}{b}}u, m = \sqrt{\frac{2b}{a}}v$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} R^2 = \frac{b^2a}{2b+a} \left(1 + \frac{a}{2b}m^2\right) \\ R^2 = \frac{a^2b}{2a+b} \left(1 + \frac{b}{2a}n^2\right) \\ n + m = 2 \end{cases}$$

Usando le prime due equazioni, si ottiene

$$\frac{b^2a}{2b+a} \left(1 + \frac{a}{2b}m^2\right) = \frac{a^2b}{2a+b} \left(1 + \frac{b}{2a}n^2\right) \implies \frac{2b + am^2}{2b+a} = \frac{2a + bn^2}{2a+b} \implies \frac{2b + a(2-n)^2}{2b+a} = \frac{2a + bn^2}{2a+b}.$$

Quindi

$$4ab + 2b^2 + a(2a+b)(2-n)^2 = 4ab + 2a^2 + b(2b+a)n^2 \implies n^2(2b^2 - 2a^2) + 4na(2a+b) - 4a(2a+b) + 2a^2 - 2b^2 = 0$$

Dividendo tutto per $2b^2 - 2a^2 < 0$ si ottiene

$$n^2 - \frac{2a(2a+b)}{a^2-b^2}n + \frac{3a^2 + 2ab + b^2}{a^2-b^2} = 0.$$

Questa equazione si annulla per $n = 1$ e quindi, per le formule di Viete, l'altra radice è $\frac{3a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$. Tuttavia, $0 \leq n \leq 2$ e $\frac{3a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} > \frac{3a^2}{a^2} = 3$, quindi questa è una radice non accettabile. Senza affrontare direttamente quest'ultima equazione per a, b generici, nel caso concreto $a = 3, b = 1$ l'equazione diventa

$$n^2 - \frac{21}{4}n + \frac{17}{4} = 0$$

che ha per radici 1 e $\frac{17}{4} > 3$ e quindi questa seconda equazione non è accettabile perché porterebbe ad un valore negativo di m .

Da $n = 1$ segue, usando la seconda equazione di (3), che

$$R^2 = \frac{a^2b}{2a+b} \left(1 + \frac{b}{2a}\right) = \frac{ab}{2}$$

e quindi $R = \sqrt{\frac{ab}{2}}$. Pertanto $R = \sqrt{1 \cdot 3/2} = \sqrt{3/2}$ m e la risposta in mm è pari a $1000 \cdot \sqrt{3/2} = 500\sqrt{6}$, da cui la risposta 506.

Remark Ohibò! Notando le numerose risposte ricevute dal problema durante la gara, ci siamo accorti che il problema in realtà poteva essere risolto in maniera estremamente più semplice, osservando che i punti $P_{A_1B_1}, P_{A_1B_2}, P_{A_2B_1}, P_{A_2B_2}$ formano un quadrato e quindi il raggio della sfera si trova sull'asse di tale quadrato. In particolare, il centro della sfera cade proprio sul punto medio del segmento $P_{A_1A_2}P_{B_1B_2}$, che si calcola facilmente visto che coincide con l'altezza del triangolo $A_1A_2P_{B_1B_2}$.

Abbiamo lasciato la soluzione originaria in quanto la riteniamo istruttiva e, soprattutto, funziona anche nel caso in cui le sfere non siano uguali a coppie e quindi non si riesca a usare simmetrie evidenti per risolvere il problema. Complimenti a chi ha risolto il problema!

18 SEGRETI COMMERCIALI [🍎🍎]

Soluzione (**Risposta:** 259). Dopo aver moltiplicato ambo i membri per a^2b^2 , otteniamo l'equazione

$$a^2 + b^2 = n(a + b),$$

in particolare $a + b \mid a^2 + b^2$. Quindi si tratta di caratterizzare gli interi positivi n della forma $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ con a e b interi positivi distinti.

Sia $d = \text{mcd}(a, b)$ e quindi $a = dx, b = dy$, con $\text{mcd}(x, y) = 1$. L'equazione si riscrive come

$$d(x^2 + y^2) = n(x + y) \implies n = \frac{d(x^2 + y^2)}{x + y}.$$

Cerchiamo ora di determinare $d' = \text{mcd}(x + y, x^2 + y^2)$. Notiamo che

$$d' \mid (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 2xy,$$

tuttavia, dal fatto che $d' \mid x + y$ e $\text{mcd}(x, y) = 1$, otteniamo che $\text{mcd}(d', x) = 1 = \text{mcd}(d', y)$. Pertanto l'unica possibilità è che $d' \mid 2$, ossia $d' = 1, 2$. Allora otteniamo che

$$n = \frac{d(x^2 + y^2)}{x + y} = \frac{d \cdot d'}{x + y} \cdot \frac{x^2 + y^2}{d'},$$

dove, per costruzione, entrambi i termini sono interi. In particolare, ricaviamo che $x + y \mid d$.

Adesso dimostriamo che l'espressione $\frac{x^2+y^2}{d'}$, con x, y coprimi tra loro, è sempre multipla di una somma di quadrati: in particolare, visto che gli unici numeri primi che si scrivono come somma di due quadrati perfetti sono quelli congrui ad 1 modulo 4, dimostriamo che $\frac{x^2+y^2}{d'}$ ammette un fattore primo $p \equiv_4 1$.

- Se $d' = 1$, allora $x^2 + y^2$ è necessariamente multiplo di un primo $p \equiv_4 1$: infatti in tal caso x, y sono coprimi tra loro e coprimi con $x^2 + y^2$, quindi $p \mid x$ e $p \mid y$, da cui $x^2 \equiv_p -y^2$, ossia -1 è un residuo quadratico modulo p e questo è possibile solo se $p \equiv_4 1$.
- Se $d' = 2$, allora $2 \mid x^2 + y^2$ e quindi necessariamente x, y hanno la stessa parità. Ma allora

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x + y}{2}\right)^2$$

e notiamo che, essendo x, y coprimi, anche $(x - y)/2$ e $(x + y)/2$ sono coprimi e quindi ci si è ricondotti al caso $d' = 1$.

In conclusione, abbiamo ottenuto che

$$n = \frac{d \cdot d'}{x + y} \cdot \frac{x^2 + y^2}{d'}$$

ossia che n deve essere multiplo di $\frac{x^2+y^2}{d'}$, che è un numero che si scrive sempre come somma di due quadrati coprimi. In particolare, basta che n sia multiplo di un primo $p \equiv_4 1$. I primi $p \equiv_4 1$ minori di 35 sono 5, 13, 17, 29 e quindi i numeri minori di 35 che sono multipli di tali primi sono

$$5, 10, 13, 15, 17, 20, 25, 26, 29, 30, 34, 35$$

che hanno somma 259. Questa è la risposta. ⊗

19 CATTIVA MEMORIA

Soluzione (Risposta: 29). Innanzitutto verifichiamo se il processo inizia, ossia se è possibile definire $p_2(x)$. Sia $p_1(x) = p(x) = x^2 + x - (n^4 + 2n^3 - n)$. Il discriminante di questo polinomio è

$$\Delta_1 = 1 + 4(n^4 + 2n^3 - n) = (2n^2 + 2n - 1)^2$$

e quindi le soluzioni di $p_1(x)$ sono

$$\frac{-1 \pm (2n^2 + 2n - 1)}{2} = n^2 + n - 1, -n^2 - n.$$

Allora $p_2(x) = x^2 + (n^2 + n - 1)x - (n^2 + n)$. Le radici di $p_2(x)$ sono facilmente 1 e $-n^2 - n$ e quindi possiamo definire $p_3(x) : x^2 + x - n^2 - n$. Come prima, il discriminante di questo polinomio è

$$\Delta_3 = 1 + 4(n^2 + n) = (2n + 1)^2$$

e quindi le radici di $p_3(x)$ sono

$$\frac{-1 \pm (2n + 1)}{2} = n, -n - 1.$$

Allora $p_4(x) = x^2 + nx - (n + 1)$ e si vede facilmente che le sue radici sono 1 e $-1 - n$. Quindi possiamo definire $p_5(x) : x^2 + x - (n + 1)$.

Per ipotesi, il processo deve continuare fino a $p_9(x)$ quindi dobbiamo imporre che $p_5(x)$ abbia radici intere. Se k è una sua radice intera, visto che la somma delle radici è -1 per le formule di Viete, abbiamo che anche $-1 - k$ è radice e quindi, sempre per le formule di Viete, si deve avere

$$-(n + 1) = k \cdot (-1 - k) \implies n = k(k + 1) - 1. \quad (4)$$

Pertanto, affinché il processo continui, è necessario che n sia della forma $k(k + 1) - 1$, con k intero positivo, visto che n è positivo. Quindi $p_5(x) = x^2 + x - k(k + 1)$ che ha per radici k e $-k - 1$. Quindi $p_6(x) = x^2 + kx - k - 1$ che ha per radici 1 e $-k - 1$, da cui $p_7(x) = x^2 + x - (k + 1)$.

A questo punto, facendo le medesime considerazioni del caso di $p_5(x)$, come in (4), abbiamo che $k = m(m + 1) - 1$ per un certo intero m positivo. Allora $p_7(x) = x^2 + x - m(m + 1)$ che ha per radici m e $-m - 1$, quindi $p_8(x) = x^2 + mx - (m + 1)$ che ha per radici 1 e $-m - 1$ e possiamo finalmente arrivare a $p_9(x) = x^2 + x - (m + 1)$.

Per ipotesi, $p_9(x)$ non ha radici. Notiamo che

$$n = k(k + 1) - 1 \stackrel{k=m(m+1)-1}{=} m(m + 1)(m(m + 1) - 1) - 1 \quad (5)$$

e quindi è chiaro che per minimizzare il valore di n dobbiamo minimizzare quello di m . Per $m = 1$, si ha che $p_9(x) = x^2 + x - 2$ che ha radici intere, mentre per $m = 2$ $p_9(x) = x^2 + x - 3$ non ne ha. Quindi $m = 2$, da cui

$$n = m(m + 1)(m(m + 1) - 1) - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 - 1 = 29,$$

che è la risposta cercata.

Remark Potrebbe sembrare sorprendente che il processo funzioni automaticamente fino a $p_5(x)$. In realtà, rianalizzando quanto fatto in (4), otteniamo che, se $p_i(x) = x^2 + x - n_i$, allora questo polinomio ha radici intere solo se $n_i = n_{i+1}(n_{i+1} + 1)$ che porta automaticamente a definire $p_{i+1}(x)$ e $p_{i+2}(x)$. In effetti, la (5) non è nient'altro che la concatenazione di due scritte di n di questo tipo. Allora si può notare che inizialmente

$$n^4 + 2n^3 - n = n(n + 1)(n^2 + n - 1) = (n(n + 1) - 1) \cdot (n(n + 1))$$

e quindi il coefficiente iniziale ha proprio la forma che permette al processo di eseguirsi automaticamente da $p_1(x)$ fino a $p_5(x)$.



CAMBIANDO LE CARTE IN TAVOLA

Soluzione (Risposta: 684). Siano $\sigma(n)$ e $d(n)$ rispettivamente la somma di tutti i divisori interi positivi e il numero dei divisori interi positivi di n . Per ipotesi abbiamo che

$$\frac{\sigma(n)}{d(n)} = M(n) = \frac{910}{9} \implies 9\sigma(n) = 910d(n).$$

Visto che 910 è coprimo con 9, otteniamo che $9 \mid d(n)$.

Ora stabiliamo delle limitazioni su n , utilizzando che $M(n) = \frac{910}{9}$ e $9 \mid d(n)$.

Ricordiamo che, se $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, allora

$$d(n) = (a_1 + 1) \cdots (a_k + 1),$$

e inoltre

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \dots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{a_2}) \cdots (1 + p_k + \dots + p_k^{a_k})$$

Notiamo che il più piccolo numero con $d(n) = 36 = 9 \cdot 4$ divisori è dato da $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260 > 1000$ e quindi $d(n) = 9, 18, 27$. Analizziamo singolarmente i vari casi, ragionando sulla possibile fattorizzazione di n .

$d(n) = 9$: Visto che $9 = 3 \cdot 3 = 9 \cdot 1$, le uniche fattorizzazioni possibili per n sono p^2q^2 oppure p^8 , con p, q primi distinti.

Noi sappiamo che, in questo caso, la somma dei divisori di n è pari a

$$\sigma(n) = \frac{910}{9}d(n) = 910 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Per ipotesi, n ha 3 cifre e $3^8 > 1000$, quindi se $n = p^8$, l'unica possibilità è $n = 2^8 = 256$ che non funziona. Quindi $n = p^2q^2$ e pertanto

$$(1 + p + p^2)(1 + q + q^2) = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Senza perdita di generalità, supponiamo $p > q$. Al membro sinistro, entrambi i due fattori valgono almeno rispettivamente 13 e 7 (visto che $p > q \geq 2$), quindi le uniche possibilità sono che $1 + q + q^2$ sia pari ad uno tra $7, 2 \cdot 10, 13, 2 \cdot 7, 2 \cdot 13$. Di questi solo 13 funziona, che porta a $q = 3$, quindi $1 + p + p^2 = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ che però non ha soluzioni intere, quindi in questo caso non ci sono soluzioni.

$d(n) = 18$: Visto che $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 6 = 2 \cdot 9 = 18 \cdot 1$, le uniche fattorizzazioni possibili per n sono $p^{17}, pq^2r^2, p^2q^5, pq^8$, con p, q, r primi distinti. Noi sappiamo che, in questo caso, la somma dei divisori di n è pari a

$$\sigma(n) = \frac{910}{9}d(n) = 910 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Notiamo che $2^{17} > 1000$, quindi il caso p^{17} è da escludere. Se $n = pq^8$, allora vale al minimo $3 \cdot 2^8 = 768$, ma $5 \cdot 2^8 > 1000$, quindi il tal caso l'unica possibilità sarebbe $n = 768$, che per verifica diretta non funziona. Rimangono i casi $n = p^2q^5$ e $n = pq^2r^2$. A) $n = p^2q^5$. Allora

$$\sigma(n) = (1 + p + p^2)(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Notiamo che $1 + p + p^2$ vale almeno $1 + 2 + 4 = 7$ e $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$ vale al minimo 63, quindi le uniche possibilità sono che $1 + p + p^2$ valga $7, 2 \cdot 10, 13, 2 \cdot 7, 2^2 \cdot 5, 2 \cdot 13, 2^2 \cdot 17$ e di questi funziona solo il 13, che porta a $p = 3$. In tal caso $1 + q + \dots + q^5 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$, che non ha soluzioni.

B) Rimane quindi $n = pq^2r^2$, da cui

$$\sigma(n) = (1 + p)(1 + q + q^2)(1 + r + r^2) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Notiamo che $1 + p \geq 3$, mentre gli altri due fattori valgono almeno 7. Inoltre $1 + q + q^2$ e $1 + r + r^2$ sono sempre dispari, $4 \mid 1 + p$. Le uniche possibilità sono allora

$$\begin{cases} 1 + p = 4 \\ 1 + q + q^2 = 7 \\ 1 + r + r^2 = 5 \cdot 13 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + p = 4 \\ 1 + q + q^2 = 5 \cdot 7 \\ 1 + r + r^2 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + p = 4 \cdot 5 \\ 1 + q + q^2 = 7 \\ 1 + r + r^2 = 13 \end{cases}$$

e il terzo sistema ha effettivamente soluzione per $p = 19, q = 2, r = 3$. Quindi $n = 19 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 684$ è soluzione.

$d(n) = 27$: Visto che $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 9$, il minimo numero con 27 divisori è $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$, quindi questa è l'unica possibilità in questo caso. Per verifica diretta, $n = 900$ non è soluzione. ⊗

IL SUONO DELLE CAMPANE

Soluzione (Risposta: 0016). Per ogni campana x , con $1 \leq x \leq 999999$, diciamo che le campane x e $x + 1000000$ sono gemelle. L'osservazione fondamentale è che, alla fine del nono minuto, in ogni coppia di campane gemelle ce n'è esattamente una rivolta verso l'alto. Infatti, dopo il primo minuto, le due campane saranno avranno orientamento opposto: se x contiene un numero pari di cifre 1, allora $x + 1000000$ ne contiene un numero dispari, e viceversa. Invece, per ciascuno degli altri minuti, o entrambe le campane cambiano verso oppure entrambe non lo fanno: infatti, se x contiene un numero pari di cifre i , con $2 \leq i \leq 9$, allora anche $x + 1000000$ contiene un numero pari di cifre i , e viceversa.

Dunque, alla fine, tra le prime 2000000 campane, esattamente 1000000 sono rivolte verso l'alto (la campana numero 1000000 va considerata a parte: cambiando verso otto volte, alla fine risulterà rivolta verso l'alto).

Resta dunque soltanto da determinare quante campane, tra la numero 2000000 e la numero 2000026, siano rivolte verso l'alto al termine del procedimento. Un rapido controllo diretto mostra che ce ne sono 16. Pertanto, il numero totale di campane rivolte verso l'alto è

$$1000000 + 16 = 1000016,$$

da cui la risposta.

