SUPE-MATCH

SUPE MAth Team CHallenge

28 Aprile 2025

Istruzioni

1. Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
10. Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi come risposta la sua parte intera, salvo diversamente indicato.
11. Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000. Se invece la quantità richiesta non è univocamente determinata, si indichi 9999.
100. Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si diano come risposta le ultime quattro cifre del risultato.
101. I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
110. Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tenere conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{1} = 1.0000 \quad \sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{10} = 3.1623 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze:
- 10 **minuti dall'inizio**: termine scelta del Jolly;
- 120 **minuti dall'inizio**: termine della gara.

E per la fase due...

Vi ricordiamo che potrete partecipare alla seconda fase della competizione, inviando gli svolgimenti degli esercizi al form indicato nel bando della competizione. Le prime 4 squadre vincitrici saranno premiate con dei buoni per i libri Scienza Express! Per dubbi contattateci all'email garematesupe@gmail.com o tramite il profilo instagram supe_uniud.

Bando di gara

Gara organizzata da: Giacomo Bortolussi, Alberto Cagnetta, Lorenzo Capponi, Alessandro Minisini ed Eugenio Trovarelli.

Con l'aiuto di: Gaia Fuselli, Vincenzo Gallina, Alessio Goi, Valeria Martinelli, Francesca Pregliasco e Tommaso Ulian.

Ambientazioni a cura di: ChatGPT.

Con il sostegno di: Scienza Express.

Problemi più semplici - SOLUZIONI

1 *Udine*

Nel tempo in cui ser Torello ospitava con gran letizia il Saladino nella splendida Udine, volle porgli un enigma aritmetico per saggiare l'ingegno suo e della corte. Disse dunque Torello: "Messere, havvi un numero misterioso n la cui maggior parte, cioè 'l suo più grande divisore proprio $d < n$, è pari a *settantasette*. Quale sarà la somma di tutti codesti numeri n possibili?". Il Saladino sorrise, meditando se questi numeri fossero forse legati agli anni di prosperità, ai convitati nella sala, o fors'anco alle contrade della stessa Udine. Tutta la corte, incuriosita assai, cominciò a ragionare di moltiplicazioni, divisori e fattori primi, cercando risposta all'enigma. Qual era?

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{1309}$). Sappiamo che $77 \mid n$ e quindi tra i fattori primi di n ci sono 7 e 11. Visto che d è il più grande divisore di n diverso da n, abbiamo che n/d deve essere uguale a un primo $p \geq 2$, che è il più piccolo divisore di n. Quindi, i due divisori $7p$ e $11p$ di n devono essere entrambi minori (o uguali) di 77, ossia $p \leq 7$ e quindi $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. Quindi $n = 77p$ e la somma dei possibili valori di n è $77(2 + 3 + 5 + 7) = 1309$.

---

2 *Le giungle dello Yucatán*

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{49}$). Sia $p(x) = ax^2 + bx + c$ il polinomio di secondo grado cercato. Per le formule di Viète, sappiamo che la somma delle sue radici S è pari a $-b/a$, mentre il prodotto P è pari a c/a. Sappiamo che la somma delle radici di $p(5x) = 25ax^2 + 5bx + c$ è -4, ossia $-4 = -\frac{5b}{25a}$, da cui $b = 20a$, mentre il prodotto delle radici di $p(2x) = 4ax^2 + 2bx + c$ è 2, ossia $2 = \frac{c}{4a}$, da cui $c = 8a$. Allora $p(x) = a(x^2 + 20x + 8)$ e quindi

$$\frac{p(12)}{p(0)} = \frac{12^2 + 20 \cdot 12 + 8}{8} = 49$$

che è la risposta.

---

3 *Veritaserum*

Durante una lezione a Hogwarts, la professoressa McGranitt schiera 2025 studenti in fila, tra cui un unico *Custode della Verità*, che beve sempre la Veritaserum e dunque non mente mai. Tutti gli altri sono *Incantatori Ingannatori*, sotto l'effetto di una pozione che li obbliga sempre a mentire. Il primo studente della fila sostiene: "Il Custode si trova tra i primi 1000 studenti della fila". L'ultimo ribatte deciso: "Il Custode è certamente uno degli ultimi 1000 studenti in fila". Harry deve trovare il Custode della Verità prima che Voldemort ne approfitti per creare confusione e infiltrarsi tra le mura del castello! In quante posizioni potrebbe trovarsi il Custode della Verità?

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{27}$). Consideriamo due casi, in base all'identità dei due studenti iniziale e finale:

- se il primo studente oppure l'ultimo studente è il *Custode della Verità* la situazione è coerente, quindi abbiamo 2 possibilità;
- se il primo studente e l'ultimo sono entrambi *Incantatori Ingannatori*, allora il *Custode della Verità* non può stare né tra i primi 1000 studenti, né tra gli ultimi 1000 e quindi rimangono 25 posizioni, tutte effettivamente possibili.

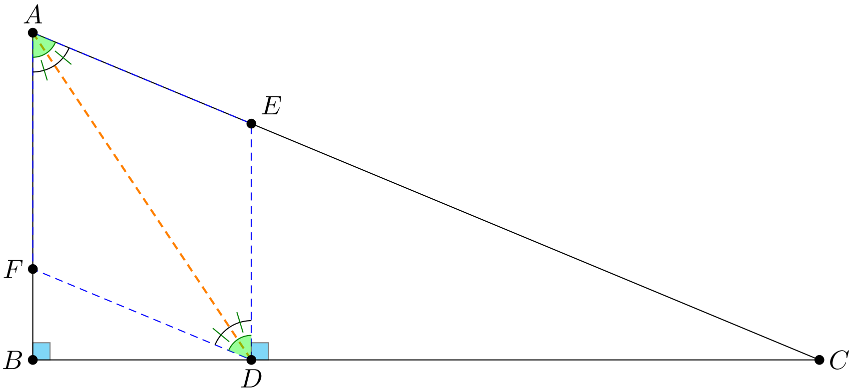
In totale abbiamo 27 possibilità.

---

4 *Addestramento*

Durante l'addestramento per perfezionare il Rasengan, Naruto si trova sul campo triangolare ABC, retto in B, dove $AB = 36$ m e $BC = 48$ m. Dal vertice A parte un segmento che segue la bisettrice interna di $\widehat{BAC}$ e interseca il lato BC nel punto D. Per concentrare al meglio il chakra, Naruto costruisce due barriere energetiche parallele ai lati AB e AC, che partono da D e intersecano rispettivamente AC in E e AB in F. Kakashi chiede quindi a Naruto di calcolare l'area del quadrilatero $AFDE$ per capire quanto chakra dovrà accumulare nella regione delimitata dalle barriere. Quanti m^2 misura?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\textbf{405}}$). La situazione è la seguente.



Notiamo che, essendo $DF \parallel AC$ e $ED \parallel AB$, i triangoli ABC, FBD e EDC sono tutti simili (in particolare $ED \perp DC$). Per il medesimo parallelismo $AFDE$ è un parallelogramma.
Visto che AD è bisettrice, abbiamo che $\widehat{FAD} = \widehat{DAE}$, mentre per il parallelismo $AF \parallel DE$, otteniamo anche $\widehat{FAD} = \widehat{ADE}$, ossia ADE è isoscele. Analogamente AFD è isoscele e in particolare $AFDE$ è un rombo.

Per trovare l'area di $AFDE$, ci basta sottrarre l'area di FBD e EDC a quella di ABC. Le loro aree si trovano per similitudine. In particolare $A_{FBD} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 \cdot A_{ABC}$ e $A_{EDC} = \left(\frac{DC}{BC}\right)^2 \cdot A_{ABC}$. Siano $a = BC = 48$, $b = AC$, $c = AB = 36$; quindi $b^2 = a^2 + c^2$ e $A_{ABC} = \frac{ac}{2}$. Per il teorema della bisettrice, si ha che $BD/DC = AB/AC = c/b$ e quindi, visto che $BD + DC = BC$, si ottiene

$$BD = \frac{ca}{c+b}, \quad BD = \frac{ba}{c+b}.$$

L'area cercata è pertanto

$$\begin{aligned} A_{ABC} - A_{BDF} - A_{DEC} &= \frac{ac}{2}\left(1 - \frac{BD^2}{BC^2} - \frac{DC^2}{BC^2}\right) \\ &= \frac{ac}{2}\left(1 - \frac{c^2}{(c+b)^2} - \frac{b^2}{(c+b)^2}\right) = \frac{abc^2}{(c+b)^2}. \end{aligned}$$

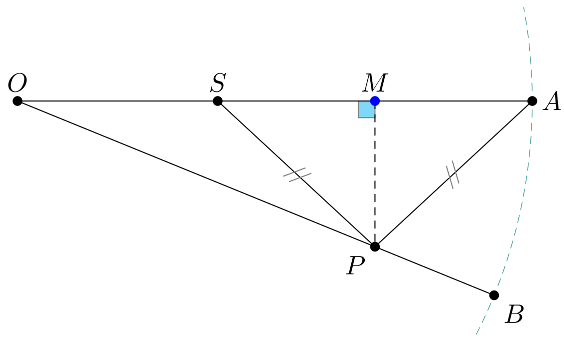
Sostituendo i valori $a = 48$, $c = 36$ e $b = \sqrt{a^2 + b^2} = 60$ si ottiene la risposta.

---

5 *La centrale di Springfield*

Nel laboratorio segreto della centrale nucleare, Lisa sta aiutando il Professor Frink a testare un nuovo reattore con camera circolare di raggio 72 m e centro O. Per calibrare i sensori, posizionano un rilevatore nel punto A, sul bordo della camera. Un secondo sensore viene collocato nel punto S sul raggio OA, a 28 m da O. Durante l'esperimento, una particella instabile compare nel punto P, interno alla camera, distante 30 m sia da A che da S. Lisa nota che la particella è allineata con il centro O e un punto B sulla circonferenza, in modo che P appartenga al segmento OB. Il sistema va in allarme e Frink esclama: "Dobbiamo trovare quanto misura PB. In fretta, prima che Homer tocchi qualcosa!". Quanti metri misura PB?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\textbf{18}}$). La situazione è la seguente.



Notiamo che $AS = 72 - 28 = 44$. Quindi, detto M il punto medio di AP, abbiamo che $PM \perp AS$ perché APS è isoscele e, per Pitagora, $PM = \sqrt{30^2 - 22^2} = \sqrt{416}$. Per trovare PB, ci basta calcolare OP che si ottiene con Pitagora dal triangolo rettangolo OPM:

$$OP = \sqrt{MP^2 + (OS + SM)^2} = \sqrt{416 + (28 + 22)^2} = 54$$

e quindi la risposta $PB = OB - OP = 72 - 54 = 18$.

---

6 *LE MINIERE DI MORIA*

Gandalf consulta un antico manoscritto contenente potenti incantesimi numerici. Vi legge che, dato un numero intero positivo n, si ottiene il suo riflesso $I(n)$ scrivendo le sue cifre al contrario da destra verso sinistra ed eliminando eventuali zeri iniziali: ad esempio, $I(1023) = 3201$, $I(7200) = 27$, $I(360) = 63$. Un messaggio segreto rivela che soltanto gli interi positivi n, con al più quattro cifre, per cui la somma $n + I(I(n))$ è dispari apriranno il passaggio nascosto verso le Miniere di Moria. Gandalf riflette: quanti numeri soddisfano questa condizione magica?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{555}}$). In generale, notiamo che, se la cifra delle unità di n non è zero, allora $I(n)$ ha lo stesso numero di cifre di n e $I(I(n)) = n$, per cui $n + I(I(n)) = 2n$ è pari. Pertanto l'unica possibilità è che la cifra delle unità di n sia zero. In particolare, n ha almeno due cifre, non potendo essere nullo.

Se n ha due cifre $\overline{a0}$, l'unica possibilità è che a sia dispari, quindi 5 possibilità.
Se n ha tre cifre, allora $n = \overline{ab0}$ e quindi $n + I(I(n)) = \overline{ab0} + I(\overline{ba})$. Se $b = 0$, allora la cifra delle unità di $n + I(I(n))$ è a, quindi a dispari ossia 5 possibilità. Se $b \neq 0$, allora la cifra delle unità è b e quindi abbiamo $5 \cdot 9 = 45$ possibilità. In totale 50 possibilità.
Sia ora $n = \overline{abc0}$. In questo caso si ottiene che $n + I(I(n)) = \overline{abc0} + I(\overline{cba})$ e quindi la cifra delle unità, che stabilisce la parità del risultato cercata, è data solo da $I(\overline{cba})$. Consideriamo i diversi casi:

- se $c \neq 0$, allora la cifra delle unità è c, che deve essere dispari, mentre a e b possono assumere qualunque valore: $5 \cdot 9 \cdot 10 = 450$ possibilità;
- se $c = 0$ e $b \neq 0$, allora la cifra delle unità è b, che deve essere dispari, quindi $9 \cdot 5 = 45$ possibilità;
- se $b = c = 0$, la cifra delle unità coincide con a, che deve essere dispari e quindi 5 possibilità.

In totale ci sono $450 + 45 + 5 = 500$ casi.
La risposta è allora $5 + 50 + 500 = 555$.

---

7 *I CORSARI DI SINGAPORE*

Durante la mappatura dell'antico codice numerico dei corsari di Singapore, la ciurma della Perla Nera scopre che i sistemi di conteggio delle rotte sono scritti in basi numeriche diverse. Il diario del cartografo reale rivela che per decifrare la posizione esatta del vortice temporale di St. Elmo, la ciurma deve annotare, per ogni valore di $b \geq 2$ intero tale che $15!$ scritto in base b termini con la cifra 0, il minimo intero positivo n tale che $n!$ scritto in base b termini con almeno sei cifre zero. Qual è il più grande valore annotato dalla ciurma?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{78}}$). Facciamo un'analogia con la base 10: in tale base, se un numero N finisce con k zeri, vuol dire che 10^k divide N e 10^{k+1} non divide N. Analogamente, si può dimostrare facilmente che un numero in una generica base b finisce con k zeri se $b^k \mid N$ e $b^{k+1} \nmid N$. Con questa considerazione, vediamo che $15!$ termina per zero in base b se e solo se $b \mid 15!$.

Ora, per ogni b, vogliamo determinare il valore minimo di n affinché $n!$ termini con almeno 6 zeri e tra gli n trovati dobbiamo individuare il massimo. Affinché $n!$ termini con almeno 6 zeri in base b, dobbiamo avere che $b^6 \mid n!$ e, visto che $n!$ è il prodotto di tutti i numeri da 1 a n, detta p^a la massima potenza del primo più grande nella fattorizzazione di b, ci basta controllare se $p^{6a} \mid n!$. Se prendiamo un primo $q < p$ "piccolo", è chiaro che che ci basta prendere un n minore affinché $q^{6a} \mid n!$, in quanto in $n!$ ci sono diversi fattori divisibili per p. Preso allora p il massimo possibile, ossia 13, otteniamo che se $13^6 \mid n!$ e n deve essere minimo, allora vale almeno $6 \cdot 13 = 78$, affinché $n!$ abbia almeno 6 fattori multipli di 13.

Per verificare che $n = 78$ sia il risultato cercato, notiamo che, se $b \mid 15!$, allora $b = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$, con $0 \leq a \leq 11$, $0 \leq b \leq 6$, $0 \leq c \leq 3$, $0 \leq d \leq 2$ e $0 \leq e, f \leq 1$.
Con lo stesso ragionamento di prima, si può verificare che, in base al valore della potenza massima del più grande primo p che divide b si ottengono si ottengono i seguenti valori di n:

- se $p = 11$ e $11 \mid b$, affinché $b^6 \mid n$, n vale al minimo $n = 11 \cdot 6 = 66$;
- se $p = 7$ e $7^2 \mid b$, affinché $b^6 \mid n$ ossia $7^{12} \mid n$, n vale al minimo $n = 7 \cdot 11 = 77$;
- se $p = 5$ e $5^3 \mid b$, affinché $b^6 \mid n$ ossia $5^{18} \mid n$, n vale al minimo $n = 75$;
- se $p = 3$ e $3^6 \mid b$, affinché $b^6 \mid n$ ossia $3^{36} \mid n$, n vale al minimo $n = 78$;
- se $p = 2$ e $2^{11} \mid b$, affinché $b^6 \mid n$ ossia $2^{66} \mid n$, n vale al minimo $n = 68$.

La risposta è allora 78.

---

8 *LA POZIONE DI PANORAMIX*

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{38}}$). Posto $y=1$, si ottiene $f(x)=x^2(1+f(1))-x^3=kx^2-x^3$, con $k=1+f(1)$ che è un generico numero reale. Poniamo $a=14$, $b=35$. Da $f(a)=f(b)$, otteniamo che $ka^2-a^3=kb^2-b^3$, da cui

$$k=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2+ab}{a+b}=a+b-\frac{ab}{a+b}.$$

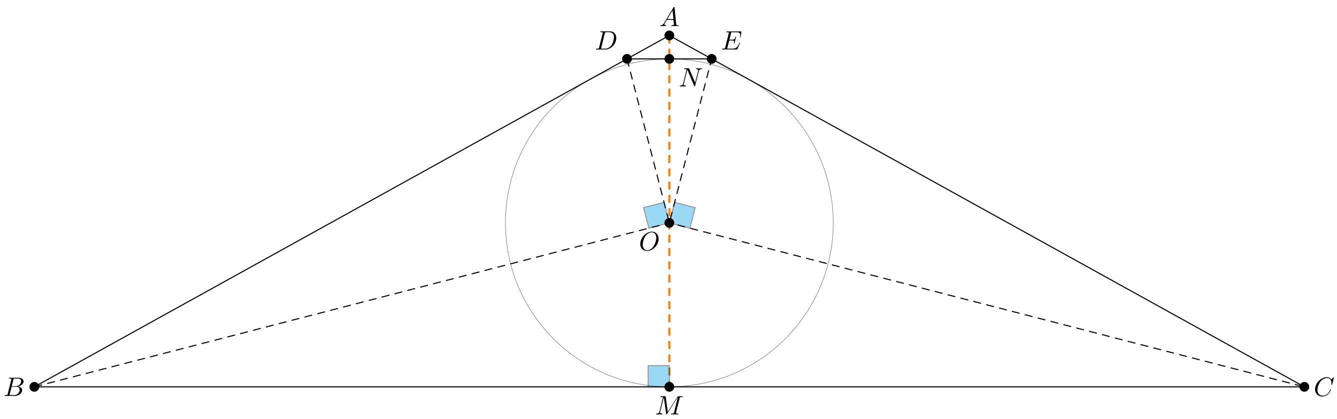
Sostituendo i valori, si ottiene $k=14+35-10=39$ e quindi $f(1)=k-1=38$.

Problemi più avanzati - SOLUZIONI

9 *Capsule corporation*

Sotto le rovine della Capsule Corporation, dopo l'assalto degli Androidi C17 e C18, Bulma ritrova i progetti di un'arma antica basata su geometrie namecciane. Gohan e Trunks, guidati da ciò che resta dell'intelligenza artificiale di Gero, analizzano la struttura: un triangolo isoscele ABC. I dati parlano chiaro: $AB=AC$ e, al centro, si trova un nucleo rappresentato dalla circonferenza inscritta ad ABC di centro O. Un condotto energetico danneggiato DE (con D ed E rispettivamente sui lati AB e AC) è parallelo alla base BC e tange il nucleo centrale. Sapendo $AD=4\ m$ e $DO=14\ m$, quanti metri misura il perimetro del triangolo ABC?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{225}}$). La situazione è la seguente.



Siano M il punto medio di BC e N il punto medio di DE. Per costruzione, il quadrilatero $BCED$ è un trapezio isoscele, circoscritto ad una circonferenza. Per ipotesi sappiamo che $AD=4$ e $DO=14$. Notiamo che, essendo $BCED$ un trapezio isoscele, i triangoli BOD e EOC sono entrambi retti in O: infatti, da $\widehat{CBD}+\widehat{BDE}=180°$ segue che $\widehat{MBO}$ e $\widehat{ODN}$ sono complementari (in quanto BO e DO sono bisettrici) e che a loro volta $\widehat{BOM}$ e $\widehat{DON}$ sono complementari, implicando che $\widehat{BOD}=90°$ (e considerazioni analoghe valgono per $\widehat{COE}$).

Siano $\ell=AB$, $b=BM$, $a=AD$, $y=DO$, $x=BD$. Essendo BO è bisettrice dell'angolo in B, i triangoli BOD e BMO sono simili. Pertanto $BD/BO=BO/BM$ da cui $BO^2=BD\cdot BM=(\ell-a)b$. Inoltre, per Pitagora, abbiamo anche che

$$BO^2=BD^2-DO^2=(\ell-a)^2-y^2.$$

Otteniamo quindi l'equazione $(\ell-a)b=(\ell-a)^2-y^2$.

Notiamo che $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{\ell^2-b^2}$ e il semiperimetro di ABC è $\ell+b$, pertanto OM, ossia il raggio della circonferenza inscritta, è pari a

$$r=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot\sqrt{\ell^2-b^2}}{b+l}=\frac{b}{b+\ell}\sqrt{\ell^2-b^2}.$$

Notiamo che $AN = \sqrt{\ell^2 - b^2} - 2r$ e quindi, dalla similitudine tra ADN e ABM otteniamo $AD/AN = AB/AM$, ossia

$$\frac{a}{\sqrt{\ell^2 - b^2} - 2r} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - b^2}}.$$

Sostituendo l'espressione di r, si ottiene con facili passaggi che $a = \ell \cdot \frac{\ell - b}{\ell + b}$. Abbiamo allora ottenuto il sistema di equazioni in (ℓ, b)

$$\begin{cases} a = \ell \cdot \frac{\ell - b}{\ell + b} \\ (\ell - a)b = (\ell - a)^2 - y^2 \end{cases}$$

dove a e y sono noti. Possiamo ricavare b dalla prima equazione, ottenendo $b = \ell \cdot \frac{\ell - a}{\ell + a}$, mentre ricavandolo dalla seconda equazione otteniamo $b = \frac{(\ell - a)^2 - y^2}{\ell - a}$. Si arriva pertanto all'equazione

$$\ell(\ell - a)^2 = (\ell + a)((\ell - a)^2 - y^2)$$

che solo in apparenza di terzo grado, visto di termini di tale grado in ℓ si semplificano. Con facili passaggi, si arriva all'equazione

$$a\ell^2 - (2a^2 + y^2)\ell + a(a^2 - y^2) = 0.$$

Con $a = 4$ e $y = 14$, si ottiene $4(\ell^2 - 57\ell - 180) = 0$, che risolta porta a $\ell = 60$ o $\ell = -3$. La soluzione negativa non è accettabile (in generale $\ell > a$) e quindi $\ell = 60$, da cui $b = \ell \cdot \frac{\ell - a}{\ell + a} = \frac{105}{2}$.

Notiamo che, visto che il problema ci chiedere di trovare il perimetro di ABC, questo equivale a calcolare

$$AB + AC + BC = 2(AB + BM) = 2(\ell + b) = 2\ell\left(1 + \frac{\ell - a}{\ell + a}\right) = \frac{4\ell^2}{\ell + a}$$

e, visto che $\ell = 60$, otteniamo la risposta $\frac{4\ell^2}{\ell + a} = 225$.

$\boxed{10}$ *L'ORA DEL TÈ*

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{186}$). **Approccio 1**: Sia $p(x) = a(x - b)(x - c)$ il polinomio di secondo grado considerato, con radici b, c, tale che a, b, c siano tutti interi. Sappiamo che $abc = p(0) = 2025 = 3^4 \cdot 5^2$. quindi si tratta di trovare le terne (a, b, c) di interi tali che $abc = 2025$, facendo attenzione al fatto che la terna (a, b, c) è equivalente a (a, c, b), visto che non conta l'ordine tra b, c.

Distinguiamo due casi:

- se $|b| = |c|$, allora o $b = c$ o $b = -c$. Nel primo caso $ab^2 = 2025$ e quindi necessariamente $a > 0$. Inoltre, per ogni terna (a, b, b) che è soluzione, anche la terna $(a, -b, -b)$ è soluzione. Quindi ci basta calcolare il numero di terne (a, b, b) tali che $ab^2 = 2025$ e $a, b > 0$, e poi moltiplicare il risultato ottenuto per 2. Visto che $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, posto $a = 3^{x_a} 5^{y_a}$ e $b = 3^{x_b} 5^{y_b}$, otteniamo $x_a + 2x_b = 4$ e $y_a + 2y_b = 2$. Ci sono 3 possibilità per la coppia (x_a, x_b) e 2 possibilità per la coppia (y_a, y_b), per un totale di 6 possibilità. Nel secondo caso, $c = -b$ e quindi $-ab^2 = 2025$ e quindi necessariamente $a < 0$. Come prima si ottengono 6 possibilità. Complessivamente, allora, otteniamo $6 \cdot 2 + 6 = 18$ casi.
- se $|b| \neq |c|$, allora notiamo che, per ogni terna (a, b, c) che è soluzione, anche le terne $(-a, -b, c), (-a, b, -c), (a, -b, -c)$ sono soluzione. Quindi ci basta calcolare il numero di terne (a, b, c) tali che $abc = 2025$ e $a, b, c > 0$, con $b \neq c$ e poi moltiplicare il risultato ottenuto per 4. In particolare, per calcolare il numero cercato, ci basta calcolare il numero di terne *ordinate* (a, b, c) per cui $abc = 2025$, togliere quelle per cui $b = c$ (che sappiamo essere 6) e poi dividere per 2 per considerare l'equivalenza tra (a, b, c) e (a, c, b).
  Posto, come prima, $a = 3^{x_a} \cdot 5^{y_a}, b = 3^{x_b} \cdot 5^{y_b}, c = 3^{x_c} \cdot 5^{y_c}$, otteniamo $x_a + x_b + x_c = 4$ e $y_a + y_b + y_c = 2$. Il numero di soluzioni della prima equazione è $\binom{4+3-1}{3-1} = 15$, mentre il numero di soluzioni della seconda equazione è $\binom{2+3-1}{3-1} = 6$, per un totale di $15 \cdot 6 = 90$ possibilità. Allora il numero di terne di interi (anche negativi) (a, b, c) tali che $abc = 2025$ e $b \neq c$ è pari a

$$4 \cdot \frac{90 - 6}{2} = 168.$$

In conclusione la risposta è $168 + 18 = 186$.

Approccio 2: come prima, dobbiamo trovare le (a, b, c) di interi tali che $abc = 2025$, facendo attenzione al fatto che la terna (a, b, c) è equivalente a (a, c, b), visto che non conta l'ordine tra b, c.
Distinguiamo i casi $b = c$ e $b \neq c$:

- se $b = c$, allora $ab^2 = 2025$ e quindi necessariamente $a > 0$. Inoltre, per ogni terna (a, b, b) che è soluzione, anche la terna $(a, -b, -b)$ è soluzione. Quindi ci basta calcolare il numero di terne (a, b, b) tali che $ab^2 = 2025$ e $a, b > 0$, con e poi moltiplicare il risultato ottenuto per 2. Visto che $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, posto $a = 3^{x_a}5^{y_a}$ e $b = 3^{x_b}5^{y_b}$, otteniamo $x_a + 2x_b = 4$ e $y_a + 2y_b = 2$. Ci sono 3 possibilità per la coppia (x_a, x_b) e 2 possibilità per la coppia (y_a, y_b), per un totale di 6 casi. Nel secondo caso, $c = -b$ e quindi $-ab^2 = 2025$ e quindi necessariamente $a < 0$. Come prima si ottengono 12 casi.
- se $b \neq c$, consideriamo *tutte* le terne ordinate (a, b, c) tali che $abc = 2025$. Notiamo che abbiamo quattro modi di scegliere come mettere i "segni" su a, b, c (ossia $(+, +, +), (-, -, +), (-, +, -), (+, -, -)$). Allora ci basta trovare il numero di terne ordinate (a, b, c) tali che $abc = 2025$ e $a, b, c > 0$ e moltiplicare per 4 il risultato ottenuto. Posto $a = 3^{x_a} \cdot 5^{y_a}, b = 3^{x_b} \cdot 5^{y_b}, c = 3^{x_c} \cdot 5^{y_c}$, otteniamo $x_a + x_b + x_c = 4$ e $y_a + y_b + y_c = 2$. Il numero di soluzioni della prima equazione è $\binom{4+3-1}{3-1} = 15$, mentre il numero di soluzioni della seconda equazione è $\binom{2+3-1}{3-1} = 6$, per un totale di $15 \cdot 6 = 90$ casi. In totale abbiamo 360 terne ordinate (a, b, c). Per ottenere le terne con (a, b, c) dove b, c sono considerati a meno dell'ordine, notiamo che ci basta sottrarre a questo numero totale le 12 terne in cui $b = c$ (in tutte le rimanenti $b \neq c$) e quindi dividere per 2 il risultato. Otteniamo allora $\frac{360-12}{2} = 174$ terne.

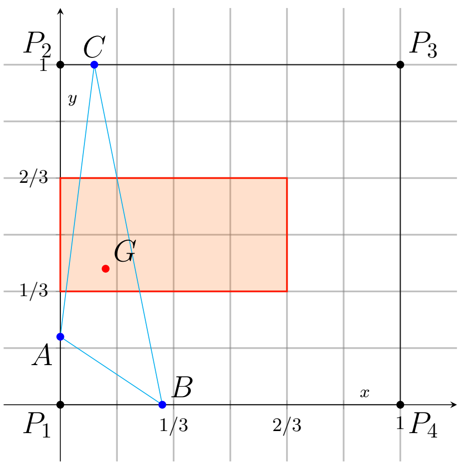
In conclusione otteniamo $174 + 12 = 186$ terne.

---

11 *La tela di Penelope*

[Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{14}$). Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano, in modo tale che il quadrato considerato abbia estremi $P_1(0,0), P_2(0,1), P_3(1,1), P_4(1,0)$. Consideriamo un triangolo con vertici $A(0,a), B(b,0), C(c,1)$, con $0 \leq a, b, c \leq 1$.



Allora il baricentro di tale triangolo ha come coordinate

$$G\left(\frac{b+c}{3}, \frac{a+1}{3}\right).$$

Visto che b, c possono diventare piccoli a piacere, la coordinata x di G può diventare piccola a piacere (ossia G si può avvicinare arbitrariamente al lato P_1P_2), mentre la x massima è $\frac{2}{3}$. La coordinata y invece è compresa tra $1/3$, per $a = 0$,

e 2/3, per $a = 1$. In conclusione, facendo variare $A \in P_1P_2$, $B \in P_1P_4$, $C \in P_2P_3$, otteniamo che G può essere qualunque punto del rettangolo di estremi $(0, 1/3), (2/3, 1/3), (2/3, 1/3), (2/3, 0)$ (in arancione in figura).
Ripetendo il ragionamento con A, B, C sulle altre tre coppie di lati consecutivi, abbiamo che G può essere un qualunque punto del quadrato al di fuori di quattro quadrati, di lato 1/3, situati nei quattro angoli del quadrato. Allora la probabilità cercata è pari a

$$1 - 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

da cui la risposta.

---

12 *IL SUPER FUNGO*

Nel Regno dei Funghi, Mario scopre 30 monete numerate da 0 a 29. Un'antica leggenda racconta che esistono particolari combinazioni di 4 monete in grado di evocare un Super Fungo Magico, purché tra quelle scelte ci sia una moneta speciale: quella il cui numero è pari alla somma delle quattro monete modulo 30. Mario vuole capire quante sono queste combinazioni fortunate per recuperare energia contro Bowser e salvare la Principessa Peach! Quanti sono i sottoinsiemi A di monete con 4 elementi tali che il resto della divisione tra la somma degli elementi di A e 30 appartenga ad A stesso?

*Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\mathbf{3672}}$).* Siano $\{a, b, c, d\}$ gli elementi in A (non sono ordinati). La condizione che uno tra a, b, c, d, ad esempio a, sia pari al resto della divisione di $a+b+c+d$ per 30 equivale a dire che $a+b+c+d \equiv_{30} a$, ossia $b+c+d \equiv_{30} 0$. Pertanto bisogna contare le terne di numeri distinti tra 0 e 29 la cui somma sia divisibile per 30, e poi il quarto numero si può scegliere liberamente tra i 27 numeri rimanenti.

Per calcolare il numero di terne non ordinate di numeri distinti $\{b, c, d\}$ con somma divisibile per 30, ci conviene calcolare il numero totale di terne con questa proprietà e poi rimuovere quelle che non vanno bene, con due o tre elementi uguali. Se $0 \leq b, c, d \leq 29$ sono numeri tali che $b + c + d \equiv_{30} 0$, allora basta osservare che, scelti liberamente b, c, il numero d è univocamente determinato ed è pari alla classe di resto di $-b - c$ mod 30. Visto che d può assumere (esattamente una volta) ciascuna delle possibili classi di resto mod 30, il numero di terne *ordinate* totali in questo caso è $30 \cdot 30 = 900$.
Ora calcoliamo le terne con due o tre numeri uguali:

- $b = c = d$, allora cerchiamo i valori di b per cui $3b$ è divisibile per 30, ossia, b è divisibile per 10. Chiaramente ci sono solo tre possibilità $b = 0, 10, 20$.
- $b \neq c = d$, e in questo caso i valori per b, c generano le tre terne ordinate $(b, c, c), (c, b, c), (c, c, b)$. Cerchiamo i valori di b, c tali che $b + 2c \equiv_{30} 0$, ossia $b + 2c = 30k$ per un opportuno k intero. Notiamo che $b + 2c \leq 3 \cdot 29 < 90$ e quindi $0 \leq k \leq 2$.
  Se $k = 0$, allora c'è solo la soluzione $b = c = 0$. Se $k = 1$, allora $b + 2c = 30$ e ci sono 15 soluzioni. Se $k = 2$, allora $b + 2c = 60$ e $60 - 2c = b \leq 29$, ossia $c \geq (60 - 29)/2 = 15.5$ da cui $c \geq 16$. Notiamo che, se $16 \leq c \leq 29$, automaticamente $0 \leq b \leq 29$ e quindi ci sono $29 - 16 + 1 = 14$ soluzioni.
  In totale abbiamo allora $15 + 14 + 1 = 30$ soluzioni, a cui dobbiamo togliere le 3 contate precedentemente in cui $b = c = d$, ossia 27 soluzioni. In questo caso ci sono allora $27 \cdot 3 = 81$ terne ordinate.

Il numero di terne *non ordinate* di tre numeri distinti $0 \leq b, c, d \leq 29$ con somma divisibile per 30 è quindi pari a

$$(900 - 81 - 3)/6 = 136$$

dove abbiamo diviso per 6 per non contare l'ordine di b, c, d. Il risultato cercato è $136 \cdot 27 = 3672$.

---

13 *LA FORZA*

Nel tempio Jedi, il maestro Yoda spiega a Luke una tecnica segreta per amplificare la Forza. Ognuno dei cavalieri Jedi possiede un valore numerico legato alla sua abilità. In particolare, nel Grande Esercito della Repubblica ci sono $n > 0$ Jedi, i cui valori di abilità sono rispettivamente $1, 2, 3, \ldots, n$. La Forza totale si calcola considerando ogni coppia non ordinata di cavalieri Jedi (non necessariamente distinti), calcolando il prodotto dei loro valori di abilità e sommando tutti questi prodotti. Ad esempio, per $n = 3$ la Forza è $f(3) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3$. L'imperatore Palpatine ha nascosto un punto debole: se questa Forza totale diventa divisibile per 2025, l'Impero potrebbe cadere. Qual è il più piccolo numero n di Jedi necessari perché ciò accada e la Ribellione possa trionfare?

*Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\mathbf{243}}$).* Notiamo che $f(n)$ contiene, nella sua somma, la somma dei quadrati da 1 ad n, più la somma di tutti i prodotti di coppie di interi distinti $i, j \leq n$. Tuttavia, abbiamo proprio che

$$(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 2(1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \ldots + (n - 1)n)$$

e quindi $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \ldots + (n - 1)n = \frac{(1+2+\ldots+n)^2 - 1^2 - 2^2 - \ldots - n^2}{2}$. Ricordando le note formule

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} f(n) &= \left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+(1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+(n-1)n) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+1}{3}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}. \end{aligned}$$

Vogliamo determinare il più piccolo n per cui $f(n)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$ è divisibile per $2025=3^4\cdot 5^2$, ossia il più piccolo n per cui $n(n+1)(n+2)(3n+1)$ è divisibile per $24\cdot 2025=2^3\cdot 3^5\cdot 5^2$.

Notiamo, innanzitutto, che se n è dispari, allora $n+1$ è pari e anche $3n+1$ lo è. Inoltre, almeno uno dei due è divisibile per 4: infatti, se $n+1$ non lo è, allora $n+1=4k+2$, da cui $3n+1=3(4k+2-1)+1=12k+4$ che è divisibile per 4. Se n è pari, allora n e $n+2$ sono due pari consecutivi e quindi il loro prodotto è multiplo di 8. Questo stabilisce che, indipendentemente da n, il prodotto $n(n+1)(n+2)(3n+1)$ è sempre multiplo di 8, quindi non ci dobbiamo preoccupare di sistemare la divisibilità per 2.

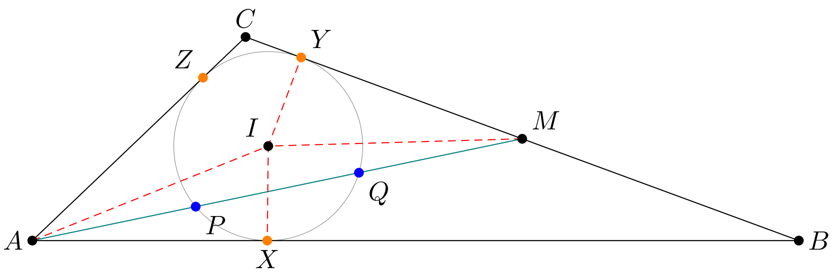
Osserviamo ora che dei tre fattori n, $n+1$, $n+2$ esattamente uno è divisibile per 3, essendo consecutivi, inoltre $3n+1$ non è mai divisibile per 3. Quindi i fattori 3^5 devono provenire dallo stesso termine. Volendo scegliere n minimo possibile, possiamo verificare se porre uno tra n, $n+1$ e $n+2$ uguale a 3^5 funziona. Per $n=3^5$, si ottiene facilmente che $n+2=245$, che dà un fattore 5, e $3n+1=729+1=730$ che dà un altro fattore 5, ossia $n(n+1)(n+2)(3n+1)$ è anche multiplo di 25. La risposta è allora $n=3^5=243$.

---

14 ***Il Purgatorio*** [$\star$]

Nel Purgatorio, tra le anime che espiano la superbia, Dante osserva un penitente chino su una pietra, intento a disegnare un triangolo ABC di perimetro 140 la cui circonferenza inscritta ω taglia la mediana uscente da A in tre segmenti identici. Notando il poeta smarrito, il superbo parla: “Intendi, o viator, che ’l maggior lato del triangol ch’ha nome ABC cela quel numero che scioglierà il mio pianto”. Dante risponde: “Misura ben, ché ’l sol di tal mistero potria scemar la pena e ’l lungo affanno d’un’anima che anela al ciel sincero”. Quanto misura il lato maggiore di ABC?

*Soluzione (**Risposta:** $\boxed{65}$).* La situazione è la seguente.



Siano $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Siano M il punto medio di BC e X,Y,Z i punti di tangenza tra la circonferenza inscritta in ABC coi lati (I è l’incentro di ABC). Siano infine P,Q le intersezioni tra AM e l’inscritta in ABC.
Per ipotesi, sappiamo che $AP=PQ=QM$ e per il teorema della tangente sappiamo che $AX^2=AP\cdot AQ$ e $MY^2=MP\cdot MQ$ e, quindi, grazie a $AP=PQ=QM$, otteniamo $AX=MY$. Notiamo che $CZ=CY$ in quanto segmenti di tangenza condotti da C rispetto all’inscritta di ABC, così come $AZ=AX$ e quindi

$$AC=AZ+CZ=AX+CY=MY+CY=CM=CB/2$$

e quindi $CB=2AC$, ossia $a=2b$.

Per capire come procedere, è rilevante osservare che abbiamo semplicemente usato che $AP=MQ$ per dimostrare ciò, e non che $AP=PQ=MQ$. Pertanto dobbiamo cercare di imporre l’uguaglianza $PQ=AP$ o, altrimenti detto, posto $AP=x$, dobbiamo imporre che $AM=3x$. Nuovamente per il teorema della tangente, abbiamo che $AX^2=AP\cdot AQ=2x^2$, ma $AX=\frac{b+c-a}{2}$ e quindi

$$2x^2=\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2\overset{a=2b}{=}\frac{(c-b)^2}{4}.$$

D'altro canto, per il teorema del coseno, posto $\gamma = \widehat{ACB}$ si ha che $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{5b^2-c^2}{4b^2}$ e quindi, applicando di nuovo il teorema del coseno a ACM si ottiene

$$\begin{aligned} 9x^2 = AM^2 &= AC^2 + MC^2 - 2AC \cdot MC\cos\gamma \\ &= b^2 + (a/2)^2 - 2\cdot b\cdot (a/2)\cdot \frac{5b^2-c^2}{4b^2} \overset{a=2b}{=} \frac{c^2-b^2}{2}. \end{aligned}$$

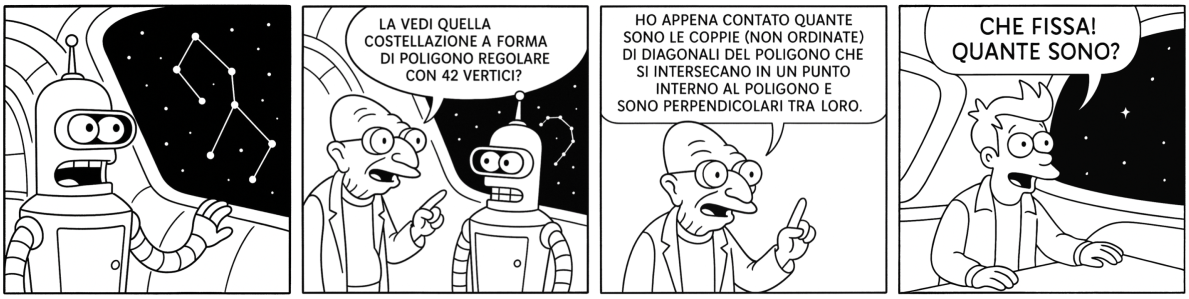
Otteniamo allora l'equazione

$$\frac{c^2-b^2}{2\cdot 9} = x^2 = \frac{(b-c)^2}{2\cdot 4}.$$

Posto $c/b = t$, dividendo ambo i membri per b^2, si ottiene $\frac{t^2-1}{9} = \frac{(t-1)^2}{4}$, da cui $5t^2 - 18t + 13 = 0$ ossia $t \in \{1, \frac{13}{5}\}$. Se $t = 1$, allora $b = c$ e quindi $2b = b + c \not> a = 2b$, assurdo. Pertanto $c = \frac{13}{5}b$ e quindi i lati sono $(a, b, c) = (2b, b, \frac{13}{5}b)$. Il perimetro è pertanto $\frac{28}{5}b$, che sappiamo essere pari a 140, da cui $b = \frac{5}{28}\cdot 140$. Il lato più lungo è $\frac{13}{5}b$, che risulta allora essere pari a $\frac{13}{5}b = \frac{13}{5}\cdot\frac{5}{28}\cdot 140 = 65$.

---

15 *COSTELLAZIONI POLIGONALI*

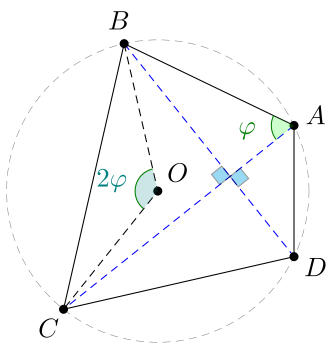


Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\textbf{4200}}$). Iniziamo osservando il seguente fatto generale.

Lemma

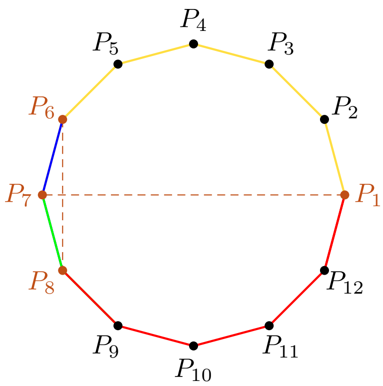
Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza con le diagonali perpendicolari. Allora $|\overset{\frown}{AB}| + |\overset{\frown}{CD}| = |\overset{\frown}{AD}| + |\overset{\frown}{BC}|$ = metà circonferenza (con $|\overset{\frown}{AB}|$ si intende la lunghezza dell'arco AB).

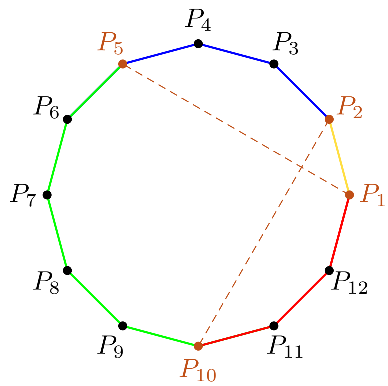
Dimostrazione La situazione è la seguente.



Notiamo che, per ogni arco ℓ della circonferenza, detto φ l'angolo alla circonferenza che insiste su tale arco (come in figura 2), abbiamo che $\ell = 2\varphi\cdot r$, con r raggio della circonferenza. In particolare, ℓ è proporzionale a φ e quindi ci basta dimostrare che $\widehat{ADB} + \widehat{DAC} = \widehat{ABD} + \widehat{BDC}$. Tuttavia, per l'ipotesi di perpendicolarità delle diagonali, abbiamo che $\widehat{ADB} + \widehat{DAC} = 90°$ e $\widehat{ABD} + \widehat{BAC} = 90°$ da cui la tesi. Il fatto che siano entrambi la metà della circonferenza segue dal fatto che siano uguali e insieme formano l'intera circonferenza. ■.

Utilizziamo questa osservazione per risolvere il problema nel caso generale di un poligono di $2n$ lati (nel caso di un poligono regolare di $2n+1$ lati non ci sono diagonali perpendicolari). Per inquadrare la situazione, consideriamo il caso di un dodecagono, per cui $n = 6$. Noi vogliamo risolvere il caso $n = 21$.





Numeriamo i vertici in senso antiorario, in modo tale che il primo vertice sia quello più a destra. Consideriamo quattro vertici $P_{a,b,c,d}$, con $1 \leq a < b < c < d \leq 12$, tali che P_aP_c sia perpendicolare a P_bP_d. Ad esempio, nelle figure sono rappresentati i casi $(a,b,c,d) = (1,6,7,8)$ e $(1,2,5,10)$. Per il lemma, $\overset{\frown}{P_aP_b} + \overset{\frown}{P_cP_d} = \overset{\frown}{P_aP_d} + \overset{\frown}{P_bP_c}$ dove però ciascuno degli archi $\overset{\frown}{P_iP_j}$ è un multiplo intero di $\overset{\frown}{P_1P_2} = \ell$, visto che il poligono è regolare.
Più precisamente

$$P_aP_b = (b-a)\ell, \quad P_bP_c = (c-b)\ell, \quad P_cP_d = (d-c)\ell, \quad P_aP_b = (12+a-d)\ell,$$

e quindi si ottiene l'uguaglianza $b-a+d-c = 12+a-d+c-b$. Nel caso generico usando $2n$ al posto di 12, si ottiene $b-a+d-c = 2n+a-d+c-b$, da cui

$$b-a+d-c = n.$$

In effetti, negli esempi illustrati, con $n = 6$ abbiamo proprio nel primo caso che $b+d = 14$ e $a+c = 8$, mentre nel secondo $b+d = 12$ e $a+c = 6$. Allora risolvere il problema iniziale equivale a contare il numero di quaterne ordinate (a,b,c,d) con $1 \leq a < b < c < d \leq 2n$ tali che $b-a+d-c = n$.

Poniamo $x = b-a$ e $y = d-c$, per cui $x, y \geq 1$ e $x+y = n$. Il numero di soluzioni (x,y) di questa equazione è pari a $n-1$, date da $(x,y) = (r, n-r)$, con $1 \leq r \leq n-1$.

Fissiamo un r. La quaterna (a,b,c,d) allora è pari a $(a, a+r, c, c+n-r)$ e dobbiamo imporre che $a+r < c$ e $c+n-r \leq 2n$; da ciò si ottiene $a+r < c \leq n+r$, ossia per un dato a ci sono $(n+r)-(a+r) = n-a$ possibilità per c. Notiamo che il massimo valore assegnabile ad a, per un dato r, è pari a $a \leq c-r-1 \leq (n+r)-r-1 = n-1$ e quindi si ottengono

$$\sum_{a=1}^{n-1}(n-a) = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

soluzioni per un r fissato. Allora in totale si ottengono $(n-1)\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \boxed{\frac{n(n-1)^2}{2}}$ possibilità. Per $2n = 42$, ossia $n = 21$, si ottiene allora $\frac{21\cdot 20^2}{2} = 4200$.

---

16 *Molto Molto Lontano*

Nel regno di Molto Molto Lontano, Lord Farquaad ha creato due pozioni magiche, ciascuna descritta da un polinomio incantato: $p(x) = x^2 - Ax + B$ e $q(x) = x^2 + Ax - C$. La magia funziona solo se A e B sono interi positivi, con B formato da due cifre. Astutamente, Ciuchino nota che invertendo le cifre di B si ottiene il numero C, e sorprendentemente scopre che entrambi i polinomi incantati condividono una stessa radice r magica, fondamentale per spezzare l'incantesimo che intrappola Fiona nella sua forma d'orco. Qual è la somma dei possibili valori di $p(-1)$?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{116}}$). Sia $B = 10d + u$ la scrittura in base 10 di B, con $0 \leq u \leq 9$, $1 \leq d \leq 10$. Pertanto $C = 10u + d$. Se r è una radice comune di $p(x)$ e $q(x)$, deve annullare anche i due polinomi $p(x) \pm q(x)$, da cui si ottiene

$$2Ar - 11(d+u) = 0, \quad 2r^2 + 9(d-u) = 0.$$

In particolare, dalla prima equazione otteniamo che $r = \frac{11(a+b)}{2A} > 0$, mentre dalla seconda $2r^2 = 9(u-d)$, quindi $u > d$. Sostituendo r, si ottiene l'uguaglianza $121(d+u)^2 = 2\cdot 9A^2(u-d)$.

Notiamo che $121(d+u)^2$ e $9A^2$ sono tutti quadrati perfetti, quindi anche $2(u-d)$ lo deve essere, ossia $u - d = 2z^2$. Essendo u, d cifre, l'unica possibilità è $z \in \{1,2\}$, da cui $u - d \in \{2, 8\}$. Inoltre, visto che 121 divide $2\cdot 9A^2(u-d)$, che può valere $36A^2$ o $144A^2$, l'unica possibilità è che $121 \mid A^2$, ossia $11 \mid A$.

Posto $A = 11k$ e posto $u-d = 2z^2$ nell'equazione, estraendo la radice ad ambo i membri si ottiene l'equazione $d+u = 6kz$. Pertanto si ottiene il sistema

$$\begin{cases} d+u = 6kz \\ u-d = 2z^2 \end{cases} \qquad \text{con } z \in \{1,2\}.$$

Risolvendo rispetto a d, u, si ottiene $u = 3kz + z^2$ e $d = 3kz - z^2$. Se $z = 2$, allora $d = 6k - 4$ e $u = 6k + 4$. Notiamo che $u < 10$ e quindi l'unica possibilità è che $k = 0$, ma in questo caso $d = -4$, assurdo. Pertanto $z = 1$.

Allora $u = 3k + 1$ e $d = 3k - 1$ e le uniche possibilità per k sono $1, 2$ (ricordiamo che $A = 11k$), da cui si ottengono le due terne $(d, u, A) = (2, 4, 11), (5, 7, 22)$. In conclusione si ottengono i due polinomi

$$p(x) = x^2 - 11x + 24 = (x-3)(x-8) \implies q(x) = x^2 + 11 - 42 = (x-3)(x+14)$$
$$p(x) = x^2 - 22x + 57 = (x-3)(x-19) \implies q(x) = x^2 + 22 - 75 = (x-3)(x+25)$$

Quindi la somma dei possibili valori di $p(1)$ è

$$1 + 11 + 24 + 1 + 22 + 57 = 116$$

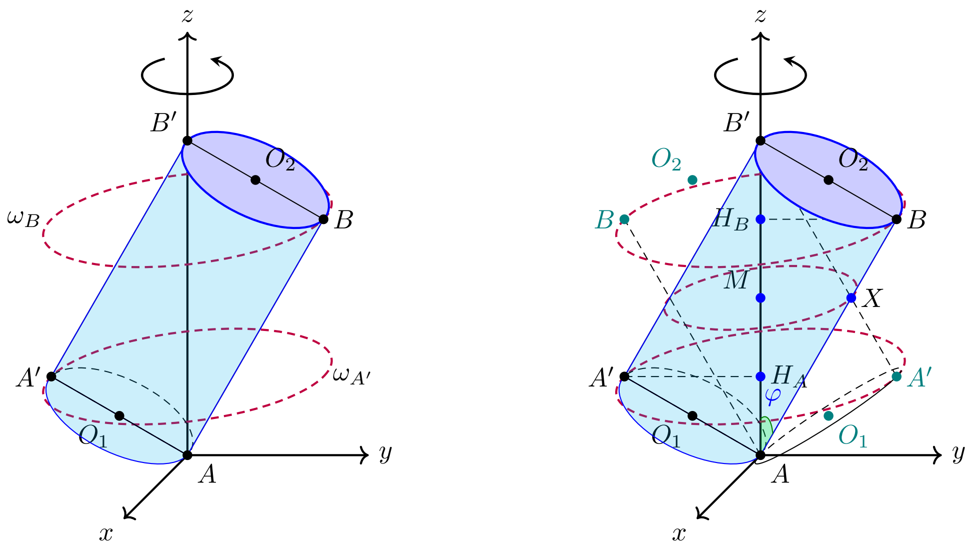
da cui la risposta.

---

17 LA TORRE DI GHIACCIO [⋆]

Nel regno di Arendelle, Elsa decise di progettare una torre di ghiaccio perfettamente cilindrica, con le basi circolari di diametro 18 m e altezza pari a $18\sqrt{3}$ m. Sulla circonferenza che forma la base inferiore della torre incise un fiocco di neve in un punto A, mentre sulla circonferenza che forma la base superiore incastonò due gemme nei punti B e B', diametralmente opposti, in modo che il segmento AB risultasse perpendicolare alle basi della torre. Utilizzando la sua magia, Elsa fece ruotare l'intera torre attorno alla retta AB', creando un elegante vortice di ghiaccio. Sapendo che il volume del solido ottenuto dalla rotazione è pari a $K\pi$, con K intero positivo, quanto vale K?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\textbf{5508}}$). La situazione è la seguente.



Consideriamo la situazione iniziale del cilindro, come nella figura a sinistra. Sia A' il simmetrico rispetto al centro O_1 del cerchio di base e sia O_2 il centro del cerchio superiore. Poniamo $r = O_1A = O_2B' = 9$ $h = AB = A'B' = 2r\sqrt{3}$. Ruotando attorno ad AB', i punti B, A' compiono delle circonferenze $\omega_{B',A}$ di un certo raggio e notiamo che il solido generato dalla rotazione si divide essenzialmente in due parti principali: la parte sopra il cerchio ω_B, insieme alla parte (identica per simmetria) sotto al cerchio $\omega_{A'}$, più la parte tra questi due cerchi.

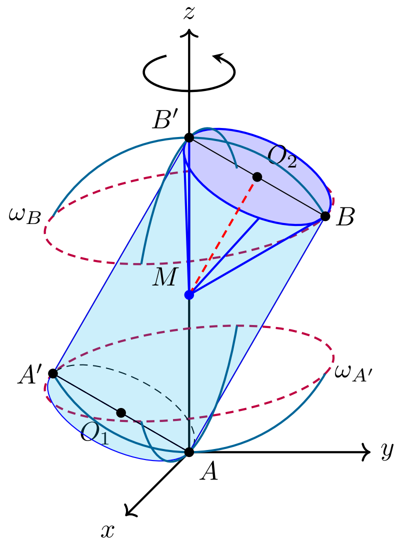
Analizziamo prima la parte in mezzo. Come si può osservare nella figura in alto a destra, le superficie del cilindro, ruotando si interseca con se stessa generando due coni identici, uno di vertice B' e base $\omega_{A'}$ e uno di base ω_B e vertice A. Questo è vero per la seguente motivazione: dette $H_{A'}, H_B$ le proiezioni su $B'A$ di A', B rispettivamente, il volume compreso tra $\omega_{B,A'}$ generato dalla rotazione del cilindro è pari al volume generato dalla rotazione attorno ad AB' dei triangoli $A'H_{A'}B'$ e BH_BA, senza le punte tagliate dai due cerchi $\omega_{A',B}$. In sostanza, detto M il punto medio di AB' e X il punto su AB che si trova alla stessa distanza di M dal piano di base xy (formalmente X è ottenuto dall'intersezione di AB con la rotazione di $B'A'$, come nella figura in alto a destra), il volume cercato è dato dall'unione di **due tronchi**

di cono, di altezza pari a $H_{A'}H_B/2$ e cerchio di base $\omega_{A'}$ e cerchio minore di raggio MX.

Sia ϑ l'angolo $\widehat{B'AB}$. Visto che il triangolo ABB' è rettangolo, allora $c = AB' = \sqrt{B'B^2 + AB^2} = \sqrt{4r^2 + h^2}$. Allora $A'H_A = BH_B = \frac{B'B \cdot BA}{AB'} = \frac{2rh}{\sqrt{4r^2+h^2}}$. Inoltre $\cos\varphi = \frac{h}{c}$, $\sin\varphi = \frac{2r}{c}$ e quindi

$$MX = AM \cdot \tan\varphi = \frac{c}{2} \cdot \frac{2r}{h} = \frac{rc}{h}$$

e $B'H = B'B\cos(90° - \varphi) = 2r\sin\varphi = \frac{4r^2}{c}$, da cui $MH_A = AM - AH_A = AM - B'H_B = c/2 - \frac{4r^2}{c} = \frac{h^2-4r^2}{2c}$. Avendo H_AM, H_AA', MX, ossia i raggi di base e l'altezza dei tronchi di cono, possiamo trovare il loro volume.
Ora concentriamoci sulla parte al di sopra di ω_B.



Notiamo che $O_2M \perp B'B$, visto che $O_2M \parallel BA$ per Talete dato che $B'O_2/B'B = B'M/BA = 1/2$ e $AB \perp B'B$. Ma allora $B'BM$ è isoscele e quindi la parte superiore a ω_B è ottenuta dalla rotazione della base di un cono, di vertice M e cerchio di base di centro O_2, attorno ad un suo apotema. In particolare, la superficie del solido di rotazione ottenuto è formato dai punti della circonferenza di base, che rimangono sempre alla stessa distanza da M, ossia MB', e quindi si forma una **calotta sferica** di base la circonferenza ω_B (che ha raggio H_BB) e altezza $B'H_B$. Abbiamo già calcolato che $BH_B = \frac{2rh}{c}$ e $B'H_B = \frac{4r^2}{c}$.

Il volume della calotta sferica di altezza H in una sfera di raggio R è data da $\boxed{\pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)}$ mentre il volume di un tronco di cono di raggio inferiore R_1, raggio superiore R_2 e altezza H è dato da $\boxed{\frac{\pi H\cdot(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)}{3}}$. Nel nostro caso $h = 2r\sqrt{3}$ e $c = 4r$ e quindi il volume cercato è pari a

$$\begin{aligned}
V &= 2\left(\overbrace{\pi AH_A^2\left(AM - \frac{AH_A}{3}\right)}^{=\text{calotta sferia}} + \overbrace{\frac{\pi MH_A\cdot(MX^2 + A'H_A^2 + MX\cdot A'H_A)}{3}}^{=\text{tronco di cono}}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{4r^2}{c}\right)^2\left(\frac{c}{2} - \frac{4r^2}{3c}\right) + \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{h^2-4r^2}{2c}\cdot\left(\frac{r^2c^2}{h^2} + \frac{4r^2h^2}{c^2} + \frac{rc}{h}\cdot\frac{2rh}{c}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{4r^2}{4r}\right)^2\left(\frac{4r}{2} - \frac{4r^2}{3\cdot 4r}\right) + \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{(2r\sqrt{3})^2-4r^2}{2\cdot 4r}\cdot\left(\frac{r^2(4r)^2}{(2r\sqrt{3})^2} + \frac{4r^2(2r\sqrt{3})^2}{(4r)^2} + \frac{r\cdot 4r}{2r\sqrt{3}}\cdot\frac{2r\cdot 2r\sqrt{3}}{4r}\right) \\
&= 2\pi r^3\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3} + 3 + 2\right)\right) = 2\pi r^3\left(\frac{5}{3} + \frac{19}{9}\right) = \frac{68}{9}\pi r^3
\end{aligned}$$

Nel nostro caso $r = 9$, da cui la risposta $68r^3/9 = 5508$.

---

18 *Che Pokémon è quello?* [⋆]

Ash e Pikachu raggiungono un antico tempio nascosto nella Valle dei Pokémon Leggendari. Al centro della stanza si trova un altare luminoso custodito da tre statue raffiguranti Pokémon misteriosi e su ciascuna di esse è incisa una delle tre radici reali $a > b > c$ di $p(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 23$. Per risvegliare il Pokémon leggendario dormiente e liberare il suo potere, Ash deve far sì che Pikachu utilizzi una quantità di energia elettrica corrispondente esattamente a $a^2b + b^2c + c^2a$. Quanta energia elettrica dovrà utilizzare Pikachu?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{42}}$). L'espressione richiesta non è simmetrica, quindi l'utilizzo delle formule di Viéte direttamente non sembra percorribile. Possiamo tuttavia simmetrizzare l'espressione considerata $X = a^2b+b^2c+c^2a$ andando a definire l'espressione "correlata" $Y = ab^2 + bc^2 + ca^2$ e notare che sia $X+Y$ che XY sono espressioni simmetriche in a, b, c e quindi si possono calcolare con le formule di Viète. In particolare, notiamo che

$$\begin{aligned} X - Y &= a^2(b-c) + bc(b-c) + c^2a - ab^2 + abc - abc \\ &= a^2(b-c) + bc(b-c) - ac(b-c) + ab(b-c) \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a) = (a-b)(b-c)(a-c) \end{aligned}$$

che è positivo visto che $a > b > c$, ossia $X > Y$.

Poniamo

$$S = a+b+c = 2,\ Q = ab+bc+ca = -11,\ P = abc = -23.$$

Si ha che

$$X + Y = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc = SQ - 3P$$

mentre

$$\begin{aligned} XY &= (a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2) = ((ab)^3+(bc)^3+(ca)^3) + (a^4bc+b^4ca+c^4ab) + 3a^2b^2c^2 \\ &= ((ab)^3+(bc)^3+(ca)^3) + abc(a^3+b^3+c^3) + 3a^2b^2c^2 \\ &\overset{\star}{=} (Q^3 - 3QPS + 3P^2) + P(S^3 - 3SQ + 3P) + 3P^2 \\ &= PS^3 + Q^3 - 6SQP + 9P^2. \end{aligned}$$

dove la $\star$ è vera per la nota* identità, valida per ogni x, y, z reali

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = (x+y+z)\left((x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)\right)$$

applicata per $(x, y, z) = (a, b, c)$ e per $(x, y, z) = (ab, bc, ca)$. Per Viète, abbiamo che $S = 2$, $Q = -11$, $P = -23$, da cui $X + Y = 47$ e $XY = 210$. Risolvendo il sistema in X, Y si ottiene $X = 42$ e $Y = 5$, da cui la risposta.

> **Remark** Nel testo veniva specificato che le radici di $p(x)$ erano tutte reali, affinché proprio fosse possibile ordinarle. In effetti, per stabilire la *realtà* delle radici di $p(x)$ si può definire anche nel caso dei polinomi di terzo grado un concetto di *discriminante*, analogo a quello dei polinomi di secondo grado. In particolare, per i polinomi di secondo grado $x^2 + bx + c$, il discriminante è dato da $\Delta = b^2 - 4c$ e, dette $x_{1,2}$ le due radici, per le formule di Viète questa quantità è pari a $(x_1 - x_2)^2$.
> Analogamente, il "discriminante" dei polinomi di terzo grado, con tre radici $x_{1,2,3}$ è dato da $(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$ e il fatto che questa quantità sia positiva, nulla o negativa stabilisce se per un polinomio di terzo grado le tre radici sono tutte reali, oppure due coincidenti oppure due complesse. Nel problema considerato, tale discriminante è dato da $(X - Y)^2$, che risulta pari a 37^2.

---

19 *I PORTALI ISOSCELI* [$\star\star$]

Durante lo scontro con Thanos, Doctor Strange apre 109^2 portali puntiformi disposti ordinatamente a formare i vertici di un reticolo di 108×108 quadratini unitari. Tony Stark, volando con la sua armatura, nota che alcune terne di portali distinti formano triangoli rettangoli isosceli, figure che massimizzano l'efficacia tattica degli attacchi combinati degli Avengers guidati da Cap. Dunque, la sua IA Friday calcola rapidamente quanti sono tutti i possibili triangoli rettangoli isosceli distinti coi vertici sui punti del reticolo e poi divide per 107 il numero trovato. Quale resto ottiene?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{31}}$). Poniamo $108 = n$, sia $\mathcal{S}$ l'insieme degli $(n+1)^2$ punti e supponiamo che $\mathcal{S}$ coincida con l'insieme di punti

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \le x, y \le n\}$$

del piano cartesiano.

*E' stata utilizzata nel problema 10 della gara di Febbraio 2021 e nella gara individuale di Cesenatico 2016, problema 4. Per approfondimenti rimandiamo al libro "Algebra", capitolo 1, della collana U MATH.

Per prima cosa caratterizziamo le coppie di punti distinti di $\mathcal{S}$ che costituiscono gli estremi dell'ipotenusa di qualcuno dei triangoli rettangoli isosceli cercati. L'osservazione fondamentale è che, dati due punti $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ di $\mathcal{S}$, il segmento AB è l'ipotenusa di almeno un triangolo isoscele (con vertici in $\mathcal{S}$) se e soltanto se la quantità $|x_a - x_b| + |y_a - y_b|$ è pari. Questa proprietà si può dimostrare facilmente con i vettori, per esempio. D'ora in poi chiameremo *buoni* i segmenti i cui estremi verificano la proprietà qui descritta.

Osserviamo che se AB è un segmento buono allora può essere l'ipotenusa di uno oppure due triangoli rettangoli isosceli distinti con vertici in $\mathcal{S}$. Infatti, fissati tali A e B in $\mathcal{S}$ ci sono esattamente due punti del piano C e C' che formano un triangolo rettangolo isoscele con A e B, ma (al più) uno di questi due può non appartenere a $\mathcal{S}$.

In base alle osservazioni precedenti, possiamo classificare i triangoli rettangoli isosceli con vertici in $\mathcal{S}$ in due categorie:

1) i triangoli ABC tali che il simmetrico C' di C rispetto ad ABC appartiene a $\mathcal{S}$;

2) i triangoli ABC tali che il simmetrico C' di C rispetto ad ABC non appartiene a $\mathcal{S}$.

Siano $T_1(n)$ e $T_2(n)$ le rispettive quantità di triangoli, in funzione di n.

Per calcolare $T_1(n)$, notiamo che i triangoli di tipo 1 possono essere accoppiati in modo che l'unione dei triangoli di ogni coppia formi un quadrato, e che a ogni quadrato con vertici in $\mathcal{S}$ si possono far corrispondere quattro triangoli. Pertanto, $T_1(n)$ equivale al quadruplo della quantità di quadrati con vertici in $\mathcal{S}$.

Ora classifichiamo i quadrati con vertici in $\mathcal{S}$ in due categorie: quelli *dritti*, che hanno i lati paralleli agli assi cartesiani, e quelli *non dritti*. Osserviamo che ogni quadrato non dritto può essere "inscritto" in un unico quadrato dritto (sempre con i vertici in $\mathcal{S}$); in altre parole, per ogni quadrato $\mathcal{Q}$ non dritto esiste un unico quadrato dritto $\mathcal{Q}'$ tale che ogni vertice di $\mathcal{Q}$ appartenga a un lato distinto di $\mathcal{Q}'$. Più precisamente, in un quadrato dritto di lato ℓ risultano inscritti esattamente $\ell - 1$ quadrati non dritti. Dunque, la quantità complessiva di quadrati si può calcolare come

$$\sum_{\ell=1}^{n} \ell \cdot |\{\text{Quadrati dritti di lato } \ell\}|.$$

Per ogni $\ell = 1, 2, \dots, n$, i quadrati di lato ℓ sono esattamente $(n+1-\ell)^2$, allora

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} \ell \cdot |\{\text{Quadrati dritti di lato } \ell\}| &= \sum_{\ell=1}^{n} \left[\ell(n+1-\ell)^2\right] \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \left[\ell(\ell^2 - 2(n+1)\ell + (n+1)^2)\right] \\
&= \left[\sum_{\ell=1}^{n} \ell^3\right] - 2(n+1)\left[\sum_{\ell=1}^{n} \ell^2\right] + (n+1)^2\left[\sum_{\ell=1}^{n} \ell\right] \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2(n+1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{T_1(n)}{4}.
\end{aligned}$$

Resta da calcolare $T_2(n)$. Notiamo che, in base alle osservazioni precdenti, detta $S(n)$ la quantità di segmenti buoni, vale

$$S(n) = \frac{T_1(n)}{2} + T_2(n),$$

pertanto per concludere basta determinare $S(n)$.
Coloriamo "a scacchiera" gli $(n+1)^2$ punti di $\mathcal{S}$, ossia con due colori in modo che non ci siano due punti adiacenti (a distanza unitaria) con lo stesso colore. Assumendo n pari, ci sono $\frac{(n+1)^2+1}{2}$ punti di un colore e $\frac{(n+1)^2-1}{2}$ punti dell'altro colore. Osserviamo che i segmenti buoni sono tutti e soli i segmenti che hanno due estremi dello stesso colore, quindi

$$\begin{aligned}
S(n) &= \binom{\frac{(n+1)^2+1}{2}}{2} + \binom{\frac{(n+1)^2-1}{2}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2+1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2-1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2-3}{2}.
\end{aligned}$$

In definitiva, svolgendo i calcoli troviamo

$$\begin{aligned} T_1(n) + T_2(n) &= T_1(n) + \left(S(n) - \frac{T_1(n)}{2}\right) \\ &= S(n) + \frac{T_1(n)}{2} \\ &= \frac{5n^4 + 20n^3 + 22n^2 + 4n}{12}. \end{aligned}$$

Infine, poniamo $n = 108$ e modulo 107 l'espressione diventa (il diviso 12 corrisponde all'inverso moltiplicativo di 12 modulo 107):

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot 108^4 + 20 \cdot 108^3 + 22 \cdot 108^2 + 4 \cdot 108}{12} &\equiv (5 \cdot 1^4 + 20 \cdot 1^3 + 22 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1) \cdot 12^{-1} \\ &\equiv (5 + 20 + 22 + 4) \cdot 9 \\ &\equiv 31 \pmod{107}. \end{aligned}$$

---

20 *Il furto della Luna*

Gru progetta un nuovo piano per rubare la Luna, sfruttando speciali *numeri lunatici*. Questi numeri, studiati dai Minions nel loro laboratorio, sono interi positivi la cui somma delle cifre in base binaria è uguale a 3, mentre la somma delle cifre di n^2, sempre in base binaria, è uguale a 6. Sapendo che il dispositivo progettato dai Minions può gestire soltanto numeri lunatici minori di 2^{25}, Gru deve determinare quanti sono esattamente tali numeri per assicurarsi il successo della missione e conquistare finalmente il titolo di più grande super-cattivo di sempre. Quanti sono?

*Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\textbf{1661}}$).* Ricordiamo che la scrittura in base $b \geq 2$ di un numero è unica. Sia n un numero *lunatico* e sia $S(n)$ la somma delle sue cifre in base 2. Dal fatto che $S(n) = 3$, sappiamo che n in base 2 ha esattamente tre cifre 1, ossia $n = 2^a + 2^b + 2^c$ con $0 \leq a < b < c$. Notiamo allora che

$$n^2 = (2^a + 2^b + 2^c)^2 = 2^{2a} + 2^{2b} + 2^{2c} + 2^{a+b+1} + 2^{a+c+1} + 2^{b+c+1}$$

e, se $S(n^2) = 6$, abbiamo che queste potenze di due devono essere tutte distinte. In particolare, $a + b + 1 \neq 2b$, ossia $b > a + 1$ e $b + c + 1 \neq 2c$, ossia $c > b + 1$ (abbiamo utilizzato $a < b < c$).
Inoltre notiamo che $2a$ è l'esponente (strettamente) più piccolo tra tutti quelli presenti e $2^{a+b+1} < 2^{a+c+1} < 2^{b+c+1}$, quindi l'unica cosa da controllare è che $2^{a+c+1} \neq 2^{2b}$. Per trovare tutti i valori di n possibili, contiamo allora tutte le scelte possibili per a, b, c con $a \geq 0$, $b \geq a + 2$, $c \geq b + 2$ e togliamo quelle per cui $a + c + 1 = 2b$.

Visto che $n < 2^{25}$, allora n ha al più 25 cifre in base 2 (ossia $c \leq 24$) e la condizione $c \geq b + 2$, $b \geq a + 2$ equivale a dire che le tre cifre "1" non sono consecutive: quindi dobbiamo scegliere 3 posti da 25 che non siano adiacenti a due a due. Posto $y = a + 1$ e $z = b + 1$, allora notiamo che $0 \leq a < y < z \leq 24 - 2 = 22$ e quindi ci basta scegliere 3 oggetti da 23, che si fa in $\binom{23}{3} = 1771$ modi.
Per contare le terne per cui $a + c + 1 = 2b$, poniamo $b - a = d + 2$, $c - b = e + 2$ con $d, e \geq 0$, da cui $a + e + a + d + 4 + 1 = 2(d + a + 2)$, ossia $e + 1 = d$. Notiamo che $c = a + d + e = a + 1 + 2e \leq 24$ e quindi e vale al più $\frac{23-a}{2} \leq 11$ visto che e è intero. D'altro canto, a può valere al massimo 20 (e in questo caso $b = 22$, $c = 24$) e quindi $\frac{23-a}{2} \geq \frac{3}{2}$, ossia $e \geq 2$. Quindi per ogni e fissato, d è univocamente determinato, mentre a deve rispettare il vincolo $a + 1 + 2e \leq 24$, ossia $0 \leq a \leq 23 - 2e$ che porta a $24 - 2e$ possibilità per e. I casi che non vanno bene sono allora

$$\sum_{e=2}^{11} (24 - 2e) = 20 + 18 + \ldots + 2 = 110.$$

La risposta è pertanto $1771 - 110 = 1661$.

---

21 *Mistero alla Villa Mezzanotte* [⋆⋆]

Durante un'indagine nella spettrale *Villa Mezzanotte*, la Mystery Inc. si imbatte in un messaggio cifrato inciso su un'antica armatura. Velma nota subito qualcosa di curioso nel numero *2025*: "Se lo dividiamo a metà in due numeri di due cifre, "20" e "25", e calcoliamo il rapporto $\frac{2025}{20+25}$ otteniamo un numero intero!". Fred propone allora di cercare tutti i numeri interi positivi N di 4 cifre tali che, se divisi a metà in due blocchi di due cifre x e y (con y che può iniziare anche con lo zero), hanno la proprietà che $\frac{N}{x+y}$ un numero intero. Shaggy, mangiando un panino, esclama: "Zoinks! E se fossero tantissimi?!" Scooby-Doo annuisce: "Raggy... risorviamo 'sto mistero matematico!". Quanti sono tali numeri?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{463}}$). Siano x, y come nel testo. Allora $N = 100x + y$. Da $x + y|N$, si ottiene $x + y|99x$. Posto $d = (x, y)$ e quindi $x = da, y = db$, si ottiene $a + b|99a$ da cui $a + b|99$. Se $y = 0$, allora la divisibilità c'è sempre, per ogni $10 \leq x \leq 99$ per un totale di 90 numeri. Altrimenti abbiamo che $a, b \geq 1$, visto che $x \neq 0, y \neq 0$.
Notiamo in generale che una coppia a, b tale che $a + b = k$, con k che divide 99, genera un numero di soluzioni pari al numero di possibili scelte relative per il fattore d. Dobbiamo avere che $ad = x \geq 10$, e quindi $d \geq \lceil 10/a \rceil$, inoltre $d(a, b) = x, y \leq 99$ e quindi $d \leq \lceil 100/\max(a, b) \rceil - 1$.
Pertanto, in realtà, bisogna calcolare la somma

$$\sum_{k\in\{3,9,11,33,99\}} \sum_{\substack{a+b=k \\ (a,b)=1}} \left\lceil \frac{100}{\max(a,b)} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{10}{a} \right\rceil + 1 = \sum_{k\in\{3,9,11,33,99\}} \sum_{\substack{a+b=k \\ (a,b)=1}} \left\lceil \frac{100}{\max(a,b)} \right\rceil - \left\lceil \frac{10}{a} \right\rceil$$

assicurandosi che $\left\lceil \frac{100}{\max(a,b)} \right\rceil - \left\lceil \frac{10}{a} \right\rceil \geq 0$ (che vuol dire che d è ben definito). Di fatto, identificata una coppia (a, b), basta calcolare $\left\lceil \frac{100}{\max(a,b)} \right\rceil - \left\lceil \frac{10}{a} \right\rceil$ per sapere quante volte va contata. Vediamo nel dettaglio i vari casi:

- $a + b = 1$, non ci sono soluzioni;
- $a + b = 3$ e quindi $(x, y) = (2d, d), (d, 2d)$. Nel primo caso, il d minimo è 5 ($x \geq 10$) e quello massimo è $d \leq \lceil 100/\max(a, b) \rceil - 1 = \lceil 100/2 \rceil - 1 = 49$, per un totale di $49 - 5 + 1 = 45$ casi; nel secondo $d \geq 10$ e $d \leq \lceil 100/\max(a, b) \rceil - 1 = 49$, per un totale di 40 casi; quindi ci sono **85** casi;
- $a+b = 9$, allora le coppie possibili sono solo $(1, 8), (2, 7), (4, 5), (5, 4), (7, 2), (8, 1)$ che generano un numero di soluzioni pari a $3, 10, 17, 18, 13, 11$, in totale **72** casi;
- $a+b = 11$, allora tutte le coppie vanno bene (l'mcd è sicuramente 1 perché 11 è primo) e, scrivendo $(1, 10), (2, 9), \ldots, (10, 1)$, generano un numero di soluzioni pari a $0, 7, 9, 12, 15, 15, 13, 11, 10, 9$, in totale **101** casi;
- $a + b = 33$; conviene dividere i casi $a < b$ e $a > b$;
  se $a < b$, allora le coppie possibili sono solo
  $$(1, 32), (2, 30), (4, 29), (5, 29), (7, 26), (8, 25), (10, 23), (13, 20), (14, 19), (16, 17),$$
  che generano $0, 0, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 5, 5$, ossia $1+6+8+10 = 25$ casi; se $b < a$, allora $a \geq 17$ e quindi $\lceil 10/a \rceil = 0$ costantemente. In questo caso le terne sono le stesse (invertite) e generano un numero di casi pari a $3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5$, ossia $18 + 8 + 10 = 36$ casi;
  in totale sono **61** casi;
- $a + b = 99$; in questo caso $\max(a, b) \geq 50$ e quindi $d \leq \lceil 100/50 \rceil - 1 = 1$, ossia ogni coppia va contata al più una volta. Pertanto ci basta contare le coppie $a + b = 99$, con $a \geq 10$ e $(a, b) = 1$. Visto che $\varphi(99) = 60$ e ci sono 6 coppie con $a < 10$ tali che $(a, b) = 1$ e $a + b = 99$, il numero di coppie è **54**.

La risposta è pertanto $90 + 85 + 72 + 101 + 61 + 54 = 463$.

Soluzioni numeriche dei problemi.

Prob. 1	**Prob. 2**	**Prob. 3**	**Prob. 4**	**Prob. 5**	**Prob. 6**	**Prob. 7**
1309	49	27	405	18	555	78
Prob. 8	**Prob. 9**	**Prob. 10**	**Prob. 11**	**Prob. 12**	**Prob. 13**	**Prob. 14**
38	225	186	14	3672	243	65
Prob. 15	**Prob. 16**	**Prob. 17**	**Prob. 18**	**Prob. 19**	**Prob. 20**	**Prob. 21**
4200	116	5508	42	31	1661	463