Allenamento per Cesenatico

Lunedì 17 marzo 2025

Politecnico di Torino

Istruzioni Generali

- La simulazione si svolge sul sito www.phiquadro.it.
- Per ogni problema, indicare come risposta un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono indicati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tenere conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6456 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Early Research Honors School

bit.ly/3R17bYz

linktr.ee/teamkerpolito

hknpolito.org

Problemi proposti da Tommaso Pignatelli, Giulio Cosentino, Antonio Polignano, Jiakai Hu, Daniele Cozzani, Matteo Salicandro.

Gara organizzata da Tommaso Pignatelli, Giulio Cosentino, Antonio Polignano, Lorenzo Capponi,

con la collaborazione di Daniele Cozzani, Matteo Riccadonna, Jiakai Hu, Carlo Baronio, Margherita Pilone, Elisabetta Della Porta.

Ricordiamo a tutti che **dal 24 al 27 aprile 2025** si terrà la settima edizione della **One Hundred Problems**, organizzata da Matteo Salicandro:

- Info ⟶ gasmatematica.altervista.org/onehundredproblems/info.php
- Canale Telegram ⟶ t.me/onehundredproblemsgara

1. Albuquerque

Lungo una strada della città di Albuquerque, in New Mexico, ci sono degli edifici, numerati da 1 a 20. Fra questi ci sono la casa di Walt, numerata con A, e l'autolavaggio in cui lavora, numerato con B. Inoltre, si sa che i due edifici non hanno numeri consecutivi. Quante sono le possibili coppie ordinate di numeri (A, B) attribuiti a casa ed autolavaggio?

2. Nell'ufficio di TuCauchy

Heisenberg sta per far saltare in aria l'ufficio di TuCauchy Salamanca. Prima che possa scagliare a terra il fulminato di mercurio, TuCauchy gli pone il seguente quesito. Un numero n è detto *sfortunato* se 13 divide n e, detto j l'intero più vicino a $\sqrt{n}$, 13 divide j. Quanto vale un tredicesimo della somma di tutti i numeri sfortunati minori di 2025? TuCauchy è proprio matto da legare.

3. Magnets, bitch!

Walt e Jensen Phinkman devono trovare un modo per distruggere l'hard disk contenente le registrazioni che li mostrano cucinare nel superlaboratorio di Gauss Fring. Per farlo, pensano di usare un magnete a forma di triangolo isoscele ABC di vertice C. L'ortocentro H del triangolo dista $7\,\text{cm}$ da C e $9\,\text{cm}$ dal lato AB. Quanto vale, in centimetri, il perimetro del magnete?

4. Molecola di metilammina

La metilammina conferisce ai cristalli il loro tipico colore blu. Secondo Jensen Phinkman, la molecola ha una forma tetraedrica, composta da 22 livelli di atomi. Se alcuni punti, in un certo numero, possono essere geometricamente disposti a tetraedro, tale numero è detto *tetraedrico*. L'n-esimo numero tetraedrico è la somma dei primi n numeri triangolari (ad esempio, 1, 4, 10, 20 e 35 sono i primi cinque numeri tetraedrici). Determinare il 22-esimo numero tetraedrico, ovvero il numero di atomi in una molecola di metilammina, secondo Jensen Phinkman.

5. Polietilene

Heisenberg ha chiesto a Jensen Phinkman di trovare un recipiente di polietilene. Lo sceglie a forma di parallelepipedo rettangolo. Sapendo che la somma delle aree di cinque delle sue sei facce è 600, quanto può valere al massimo il suo volume? Purtroppo una vasca da bagno non è fatta di polietilene.

6. Laboratorio

pl-Hank riesce a trovare la pianta del laboratorio di Gauss Fring. Questa ha la forma di un quadrato Q_1 di lato 1000, con un quadrato Q_2 di lato x, interno a Q_1, con lo stesso centro e con i lati paralleli ai lati di Q_1. pl-Hank unisce ciascun vertice di Q_1 al più vicino vertice di Q_2 e colora di rosso i segmenti così ottenuti. Colora poi di blu il perimetro di Q_2. A quel punto osserva che lunghezza totale dei tratti rossi è uguale a quella dei tratti blu. Quanto vale x?

7. Biliardo

Gauss Fring, nel suo tempo libero, gioca a biliardo su uno strano tavolo. Ogni pallina in movimento ha probabilità 1/2 di colpire e mettere in movimento un'altra pallina e probabilità 1/2 di andare in buca e fare punto. Tuttavia, se una pallina colpisce un'altra pallina per tre volte non ha più energia per rotolare e si ferma. In media, quanti punti fa il giocatore ogni volta che mette in moto la prima pallina? (Si supponga che palline già in movimento non possano scontrarsi fra loro.)

8. Lezione di chimica

Durante una lezione di chimica particolarmente noiosa, Walt scrive alla lavagna i numeri da 1 a 42. In seguito considera tutti i multipli di 2 e li cancella, scrivendo al loro posto il loro doppio. Poi tutti i multipli di 3, li cancella e scrive al loro posto il loro triplo. Continua così fino al 42, ogni volta considerando i numeri multipli di k e al loro posto scrivendo numeri ottenuti dal prodotto di k per ciò che ha cancellato. Quando si ferma, quanti sono i divisori del numero con più divisori tra quelli scritti alla lavagna?

9. Test di purezza

Heisenberg sta sottoponendo i suoi cristalli di math a un test di purezza. Il test consiste nel prendere un cristallo a forma di triangolo equilatero di lato 30 e scuoterlo all'interno di un vetrino quadrato di lato 100. Qual è l'area del luogo dei punti che possono costituire il centro del cristallo al variare della posizione di quest'ultimo nel vetrino?

10. Galeois

Galeois vuole scoprire la ricetta segreta di Walt. Walt, per confonderlo, gli dice di risolvere prima il seguente problema. Definiamo come permutazione di lunghezza n una qualsiasi sequenza $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ contenente ciascuno dei numeri da 1 a n una sola volta. Data una permutazione $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ diciamo che questa è *interessante* se per ogni i da 1 a n i primi i numeri della permutazione formano un insieme di interi consecutivi. Ad esempio (1, 2, 3, 4) e (3, 4, 2, 1) sono permutazioni interessanti di lunghezza 4, mentre (4, 1, 3, 2) e (3, 4, 1, 2) non lo sono. Contare le permutazioni interessanti di lunghezza 20. Galeois è molto confuso e inizia a contare.

11. Interrogatorio

pl-Hank sta conducendo un grande interrogatorio. Ci sono 2025 persone in cerchio. Ciascuna di esse può essere un innocente oppure uno scagnozzo di Gauss Fring. Gli scagnozzi mentono sempre, gli innocenti dicono sempre la verità. Ogni notte un certo numero di persone (eventualmente diverso di volta in volta, ma sempre diverso da 0) scompare e tutti sanno chi scomparirà. Il primo giorno tutti dicono: "La persona alla mia destra scomparirà questa notte". Il secondo giorno tutti i rimanenti dicono: "La persona alla mia destra non scomparirà questa notte", e così via, alternando ogni giorno. Sapendo che all'alba dell'undicesimo giorno resta solo una persona (e prima di quel momento c'erano sempre state almeno due persone), quanti erano al massimo gli innocenti all'inizio?

12. Avvistamento [⋆]

Due aerei, che viaggiano costantemente alla stessa quota, avvistano una nuvola a forma di un triangolo rettangolo isoscele, anch'essa ferma alla stessa quota. In un certo istante entrambi gli aerei si trovano, insieme al vertice dell'angolo retto della nuvola, nello stesso semipiano che ha come origine la retta a cui appartiene l'ipotenusa, ed entrambi gli aerei vedono tutti e tre i vertici della nuvola, al più sovrapposti. Gli equipaggi misurano gli angoli sotto cui osservano la nuvola dalle rispettive posizioni e, avendo determinato che i seni di questi angoli sono $1/\sqrt{226}$ e $1/\sqrt{65}$ e sapendo che i due aerei distano tra loro 189 m, calcolano il minimo valore possibile per la lunghezza dell'ipotenusa della nuvola. Che risultato ottengono? Purtroppo il calcolo non è sufficiente a evitare la loro collisione – qualche controllore di volo era troppo scosso per la morte della figlia (tutta colpa di Heisenberg). *Esprimere il risultato in metri nella forma $a + \sqrt{b}$ con a e b interi e dare come risposta $a + b$.*

13. Contaminazione

C'è una contaminazione nel laboratorio. Una pulce si trova su un punto di una retta e può saltare dalla posizione x alla posizione $x + 1$ o $x - 1$. La pulce fa un salto ogni secondo. Heisenberg sa che sono passati tra 96 e 100 secondi da quando l'ha vista nel punto x. Sia $f(t)$ la distanza media della pulce dal punto di origine dopo t secondi. Per schiacciarla, Heisenberg vuole calcolare il valore di $f(100) - f(96)$. *Dare come risposta l'esponente della più grande potenza di 2 che divide il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.* Per fortuna le pulci non volano.

14. Bottino [⋆⋆]

Walt mostra a Skylbert l'esorbitante quantitativo di soldi che ha guadagnato negli ultimi mesi. In particolare sono esattamente tanti quanti la risposta al seguente problema. Per ogni intero $2 \le n \le 313$, definiamo A_n come il numero di interi positivi m con la seguente proprietà: la distanza tra $3n$ e il multiplo non negativo più vicino di m è uguale alla distanza tra n^3 e il multiplo non negativo più vicino di m. Quanto vale la somma dei numeri interi $2 \le n \le 313$ per cui A_n è dispari? Forse non erano poi così tanti soldi.

15. Un vecchio camper

Jensen Phinkman e Heisenberg decidono di usare un camper per i loro piccoli esperimenti di chimica. Certamente il camper era molto vecchio, ma quanti chilometri aveva percorso? Sia $p(x) = (x - 624)\big(1 + 2x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2025}\big)$. I chilometri percorsi erano proprio tanti quanti la somma delle potenze 2025-esime delle radici di $p(x)$.

16. Un lavoro per Saul Goldbach

Saul Goldbach è un celeberrimo avvocato della malavita, in grado di tirare fuori dal carcere qualunque criminale. Goldbach è così potente che riesce persino a determinare tutte le coppie ordinate di numeri primi distinti p, q tali che l'espressione

$$2024 \binom{pq}{q} + 2025 \binom{pq}{p}$$

sia un multiplo del prodotto pq. Dare come risposta la somma dei valori di p e q per ogni coppia.

17. Ufficio legale

Sulla scrivania di Saul Goldbach sono presenti molti documenti incriminanti riguardo ai casi che sta seguendo. Uno di questi è a forma di triangolo equilatero ABC di lato 80. Saul ripiega per errore il vertice B lungo una piega che passa per D (il punto medio di AB) e osserva che DB risulta ora perpendicolare al precedente lato BC. Quanto vale l'area della sovrapposizione dovuta alla piega?

18. Codice [⋆⋆]

pl-Hank vuole scoprire il codice del laboratorio di Gauss Fring. Sa solamente che:

- il codice ha 5 cifre;
- due cifre consecutive non sono mai uguali;
- la somma delle cifre è multiplo di 4.

Quanti sono i codici possibili? *Dare come risposta le ultime 4 cifre del numero trovato.*

19. Ultimo giorno all'autolavaggio

Mentre è al lavoro all'autolavaggio, Walt sta pensando a un modo migliore per guadagnare soldi: considera i numeri ottenuti usando solo fattori 2, 3 e 5 compresi tra 2 e 2025^2 e definisce

$$F(n) = \varphi(n) + \varphi(\varphi(n)) + \varphi(\varphi(\varphi(n))) + \cdots + 2 + 1$$

dove $\varphi(n)$ è la funzione di Eulero che indica il numero di numeri minori di n coprimi con n (ad esempio $\varphi(6) = 2$, poiché è coprimo solo con 1 e 5, $\varphi(9) = 6$ poiché è coprimo con 1, 2, 4, 5, 7, 8). Walt si chiede quanto valga la somma dei numeri n considerati tali che $F(n) = n$ ma, forse preso dal troppo sforzo, crolla a terra. Che risultato avrebbe ottenuto?

20. Los Pollos Hermanos [⋆]

Gauss Fring, proprietario della catena fast food "Los Pollos Hermanos", non si lascia sfuggire mai nulla. Un giorno, mentre supervisiona l'attività, nota una pepita di pollo a forma di icosaedro e calcola immediatamente l'angolo θ tra due sue facce adiacenti. Quanto vale $1000\,|\cos\theta|$?

21. Ricina

Heisenberg consegna a Jensen Phinkman un campione di ricina, un potente veleno che vogliono utilizzare per togliere di mezzo Gauss Fring. Tuttavia, per accertarsi che si tratti di un prodotto di qualità, occorre trovare la somma di tutti i possibili valori di $x + y$, con x e y numeri reali che soddisfano il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x = y(3-y)^2 \\ y = x(3-x)^2 \end{cases}$$

Risposte

N.	Problema	Risposta
1	Albuquerque	0342
2	Nell'ufficio di TuCauchy	0942
3	Magnets, bitch!	0064
4	Molecola di metilammina	2024
5	Polietilene	1414
6	Laboratorio	0414
7	Biliardo	0007
8	Lezione di chimica	5610
9	Test di purezza	6741
10	Galeois	4288
11	Interrogatorio	1936
12	Avvistamento [⋆]	2004
13	Contaminazione	0095
14	Bottino [⋆⋆]	1287
15	Un vecchio camper	2648
16	Un lavoro per Saul Goldbach	0096
17	Ufficio legale	0160
18	Codice [⋆⋆]	6394
19	Ultimo giorno all'autolavaggio	1498
20	Los Pollos Hermanos [⋆]	0745
21	Ricina	0020

Soluzioni

1. Albuquerque

Risposta: 0342

- Quando A è nella casa 1 o nella casa 20, B può trovarsi in altre 18 posizioni.
- Quando A è in una casa tra la 2 e la 19, B può trovarsi in altre 17 posizioni.

Il totale delle coppie ordinate (A, B) è quindi:

$$18 + 18 + 17 \cdot 18 = 36 + 306 = 342$$

Pertanto, il numero di coppie ordinate (A, B) è 342.

Alternativamente, è possibile indicare con X gli edifici diversi da A e B. Supponendo $A < B$ senza perdità di generalità, il problema equivale a disporre un oggetto di tipo AX (per garantire che A non sia adiacente a B), uno di tipo B e altri 17 di tipo X. Il numero di modi in cui si possono disporre equivale a scegliere 2 elementi tra 19, il primo dei due elementi corrisponderà ad AX, il secondo a B, dunque

$$\binom{19}{2} = 171$$

Poiché può capitare che B sia minore di A, il risultato corretto equivale al doppio di 171, ovvero 342

2. Nell'ufficio di TuCauchy

Risposta: 0942

Dividiamo in tre casi:

1) $j = \sqrt{n}$ (non dobbiamo arrotondare perché la radice di n è intera):

   chiaramente n è della forma $(13k)^2$, che è < 2025 per $k = 1$, 2, 3, ovvero $n = 13^2$, 26^2, 39^2

2) $j > \sqrt{n}$ (dobbiamo arrotondare per difetto, la parte frazionaria di j è $< 0,5$):

   dal fatto che l'intero più vicino a $\sqrt{n}$ deve essere multiplo di 13, segue che n è più vicino a $(13k)^2$ che non a $(13k + 1)^2$. Poiché $(13k + 1)^2 = (13k)^2 + 26k + 1$, questo è vero per $n \leq (13k)^2 + 13k$, dal fatto che n debba essere multiplo di 13 e minore di 2025 deduciamo che gli unici numeri che soddisfano tutte le condizioni sono: $n = 13^2 + 13$, $26^2 + 13$, $26^2 + 26$, $39^2 + 13$, $39^2 + 26$, $39^2 + 39$

3) $j < \sqrt{n}$ (dobbiamo arrotondare per eccesso, la parte frazionaria di j è $\geq$ 0,5):

   segue che n è più vicino a $(13k)^2$ che non a $(13k - 1)^2$. Poiché $(13k - 1)^2 = (13k)^2 - 26k + 1$, questo è vero per $n \geq (13k)^2 - 13k + 1$, dal fatto che n debba essere multiplo di 13 e minore di 2024 deduciamo che gli unici numeri che soddisfano tutte le condizioni sono: $n = 26^2 - 13$, $39^2 - 13$, $39^2 - 26$.

Sommando tutti i numeri e raccogliendo un fattore 13 otteniamo un totale di:

$$13 \cdot [13 + 26 \cdot 2 + 39 \cdot 3 + (13 + 1) + (26 \cdot 2 + 1) + (26 \cdot 2 + 2) + (39 \cdot 3 + 1) + \\ + (39 \cdot 3 + 2) + (39 \cdot 3 + 3) + (26 \cdot 2 - 1) + (39 \cdot 3 - 1) + (39 \cdot 3 - 2)]$$

Un tredicesimo di questa somma vale 942.

3. Magnets, bitch!

Risposta: 0064

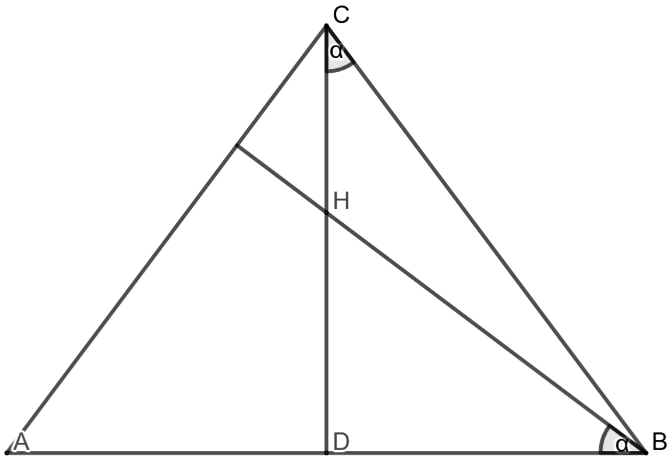

Figura 1

Detto D il piede dell'altezza per C, si nota che i triangoli CDB e HDB sono simili, da cui:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{HD}} \implies \overline{DB}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{HD} = 16\,\text{cm} \cdot 9\,\text{cm} \implies \overline{DB} = 12\,\text{cm}$$

Con il teorema di Pitagora si ricava dunque $\overline{CB} = \sqrt{12^2 + 16^2}\,\text{cm}$, da cui il perimetro:

$$2\,\overline{AD} + 2\,\overline{CB} = 64\,\text{cm}$$

4. Molecola di metilammina

Risposta: 2024

Ci sono diversi modi per determinare il 22-esimo numero tetraedrico: per esempio, consideriamo il triangolo di Tartaglia e osserviamo le linee parallele ai lati obliqui. La prima sarà composta da tutti numeri 1, la seconda dai numeri naturali in ordine crescente, la terza dai numeri triangolari (somma dei naturali), la quarta dai numeri tetraedrici (somma dei triangolari). Questi ultimi saranno dunque (per le proprietà del triangolo di Tartaglia) $\binom{3}{0}, \binom{4}{1}, \binom{5}{2}, ..., \binom{n+2}{n-1}$. Per cui il 22-esimo sarà $\binom{24}{21} = 2024$.

5. Polietilene

Risposta: 1414

Chiamiamo a, b, c i tre lati del parallelepipedo. Se consideriamo che delle 6 facce, manchi una faccia ab, allora abbiamo: $ab + 2bc + 2ac = 600$ e vogliamo massimizzare abc, cioè il volume del parallelepipedo. Usiamo la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica, considerando i 3 termini $ab, 2bc, 2ac$:

$$\frac{600}{3} = \frac{ab + 2bc + 2ac}{3} \geq (ab \cdot 2bc \cdot 2ac)^{\frac{1}{3}} = (4(abc)^2)^{\frac{1}{3}}$$

Cioè $4(abc)^2 \leq 200^3$, cioè $abc \leq 1000\sqrt{2}$. Verifichiamo che $a = b = 10\sqrt{2}$, $c = 5\sqrt{2}$ ci dà effettivamente un volume di $1000\sqrt{2}$.

6. Laboratorio

Risposta: 0414

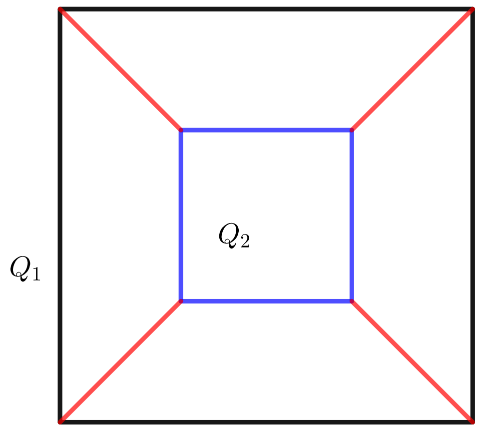

Figura 2

Siccome ci sono quattro segmenti blu congruenti e quattro segmenti rossi congruenti, ciascun segmento rosso deve essere congruente a ciascun segmento blu e avere lunghezza x.

La proiezione di un segmento rosso su un lato di Q_1 ha lunghezza $x/\sqrt{2}$, pertanto riscrivendo la lunghezza del lato di Q_1 in termini di x si ottiene la seguente equazione:

$$2\frac{x}{\sqrt{2}} + x = 1000 \implies x = 1000\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 414{,}2$$

7. Biliardo

Risposta: 0007

Sia E_x il valore medio di punti fatti da una pallina che ha ancora n scontri a disposizione prima di fermarsi, il problema si traduce nelle seguenti equazioni:

$$E_3 = \frac{1}{2} + \frac{E_3 + E_2}{2}$$
$$E_2 = \frac{1}{2} + \frac{E_3 + E_1}{2}$$
$$E_1 = \frac{1}{2} + \frac{E_3}{2}$$

da cui si trova $E_3 = 7$.

8. Lezione di chimica

Risposta: 5610

Notiamo che ogni numero verrà moltiplicato non solo per tutti i suoi divisori ma anche per ogni combinazione dei primi presenti nella sua scomposizione e minore di 42. Infatti se consideriamo, ad esempio, un numero della forma $p \cdot q$, questo verrà moltiplicato per p diventando multiplo di p^2, dunque se $p^2 \leq 42$ verrà moltiplicato anche per p^2 diventando multiplo di p^3 e così via. Inoltre lo stesso vale per q e dunque per ogni combinazione di $p^k \cdot q^h \leq 42$.

Ci interessa perciò trovare un numero che abbia tanti fattori primi distinti che possano dare luogo a tante combinazioni della forma $p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$

Tra 1 e 42 soltanto 30 e 42 stesso hanno tre fattori primi distinti. Si osserva però che 30, avendo il fattore 5 che è più piccolo del fattore 7 in 42, genera molte più combinazioni ed è dunque partendo dal 30 che otterremo il numero con più divisori.

Calcoliamo quanti sono:

i fattori 2 si trovano in 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 30, 32, 36, 40 e sono in totale $1+2+1+3+1+2+4+1+2+3+1+5+2+3=31$;

i fattori 3 si trovano in 3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 27, 30, 36 e sono in totale $1+1+2+1+1+2+1+3+1+2=15$;

i fattori 5 si trovano in 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40 e sono in totale $1+1+1+1+2+1+1=8$.

Il numero ottenuto partendo da 30 è quindi $30\cdot 2^{31}\cdot 3^{15}\cdot 5^{8}=2^{32}\cdot 3^{16}\cdot 5^{9}$, che ha dunque $33\cdot 17\cdot 10=5610$ divisori.

9. Test di purezza

Risposta: `6741`

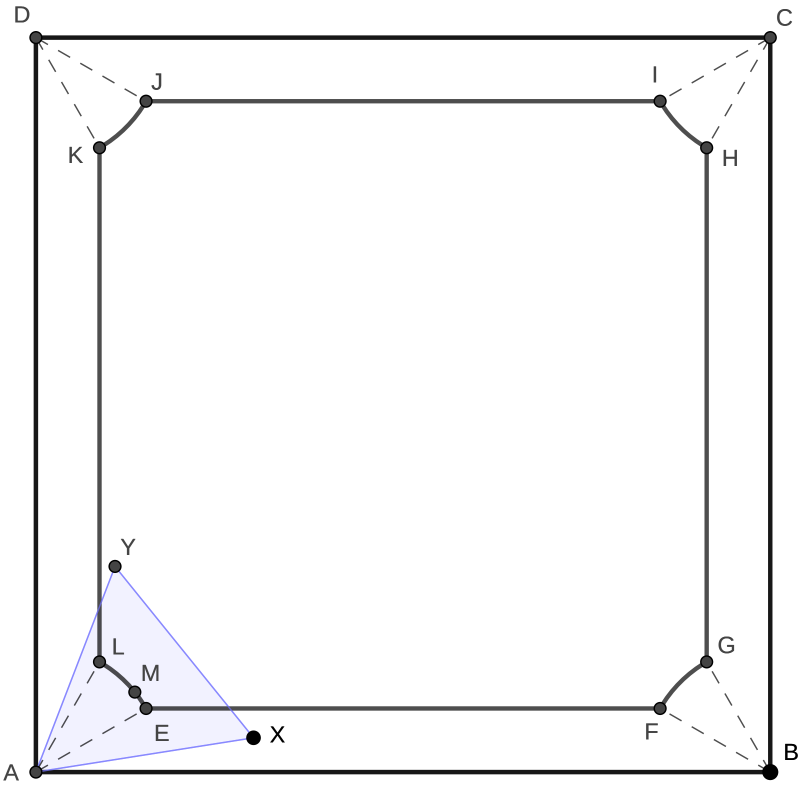

Figura 3

Relativamente alla figura, il luogo cercato corrisponde alla regione interna a $EFGHIJKL$ (delimitata da segmenti e archi di circonferenza).

Se il triangolo è lontano dai vertici del quadrato, allora il suo centro M raggiunge la distanza minima da un lato del quadrato quando un suo lato giace su quello del quadrato. Questa distanza corrisponde all'apotema del triangolo, ovvero $30/(2\sqrt{3})$ (è la distanza tra, ad esempio, le rette AB e EF).

Vicino ai vertici del quadrato, invece, M è il più vicino possibile ai lati del quadrato se il triangolo ha un vertice coincidente con il vertice del quadrato (e non se ha un vertice su un lato e uno sul lato adiacente). In questa condizione M descrive un arco di circonferenza su cui insiste un arco di 30°. Infatti, nella rotazione che porta M da E a L, il lato AY si porta sulla retta AD, ovvero compie una rotazione di 30°.

L'area richiesta si può calcolare per sottrazione dal quadrato della "cornice" costituita dai quattro trapezi isosceli (tra cui $ABFE$) e dai quattro settori circolari (tra cui AEL). Calcolando

$$\overline{EF}=100-\frac{30}{2}\cdot 2=70$$
$$\overline{AE}=\frac{30}{\sqrt{3}}$$

e poiché a 30° corrisponde un dodicesimo dell'area del cerchio, si ottiene l'area cercata:

$$\overline{AB}^2 - 4\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{30}{2\sqrt{3}} \cdot (\overline{AB} + \overline{EF}) + \frac{1}{12}\,\pi\,\overline{AE}^2\right) =$$
$$= 10\,000 - 1700\sqrt{3} - 100\pi \approx 6741{,}27$$

10. Galeois

Risposta: 4288

Per costruire una qualsiasi permutazione *interessante* viene scelto un numero arbitrario x tra 1 e 20, che costituirà il primo elemento della sequenza, successivamente viene aggiunto un numero alla volta. Affinché venga rispettata la condizione per cui la permutazione sia *interessante* la sequenza deve contenere ad ogni passo numeri consecutivi da a fino a b per qualche a e b compresi tra 1 e 20, è semplice osservare che è sempre necessario aggiungere o $a-1$ o $b+1$ alla sequenza affinché la condizione continui ad essere rispettata. Se il primo numero della permutazione è x, per arrivare alla permutazione finale è necessario "estendere" l'intervallo di numeri consecutivi $20-x$ volte in alto (più formalmente aggiungendo $b+1$ alla sequenza) e $x-1$ in basso (aggiungendo $a-1$), il numero di modi possibili in cui possiamo fare ciò è

$$\binom{(20-x)+(x-1)}{x-1}$$

Considerando dunque tutti i possibili numeri iniziali x della sequenza si ottiene la seguente somma

$$\sum_{x=1}^{20} \binom{19}{x-1} = 2^{19}$$

11. Interrogatorio

Risposta: 1936

Per comodità gli innocenti verranno chiamati "cavalieri" e gli scagnozzi "furfanti". Osserviamo intanto che la richiesta è uguale a determinare il numero minimo n di furfanti all'inizio del primo giorno (e poi la risposta sarà $2025-n$). Partiamo da qualche considerazione. All'alba dell'undicesimo giorno resta solo una persona, capiamo se essa può essere un furfante o un cavaliere. Il decimo giorno tutti i rimanenti hanno detto: "La persona alla mia destra non scomparirà" (poiché 10 è pari). Ciò significa che la persona rimasta la mattina dopo ha mentito, dal momento che colui che era alla sua destra è certamente scomparso. Sappiamo così che l'ultimo rimasto è un furfante.

Procedendo al contrario (cioè guardando chi è rimasto al giorno x e domandandoci chi invece poteva esserci al giorno $x-1$), notiamo che nella notte che precede un giorno dispari abbiamo necessità di aggiungere un cavaliere alla sinistra di ogni persona che sappiamo che non scomparirà e un furfante alla sinistra di chi scomparirà, qualora questa configurazione non fosse già garantita; inoltre possiamo aggiungere un numero arbitrario di furfanti alla sinistra di ogni furfante. Nella notte che precede un giorno pari accade il contrario: abbiamo necessità di aggiungere un furfante alla sinistra di ogni persona che sappiamo che non scomparirà e un cavaliere alla sinistra di chi scomparirà; inoltre possiamo aggiungere un numero arbitrario di cavalieri alla sinistra di ogni cavaliere.

Notiamo che cercando di minimizzare il numero di furfanti che aggiungiamo, non è mai conveniente aggiungere più persone di quelle strettamente necessarie. Infatti chiaramente nella notte che precede un giorno dispari non conviene aggiungere nessun furfante, ma anche nella notte che precede un giorno pari non conviene aggiungere alcun cavaliere, poiché avere più persone significa dover aggiungere più furfanti la notte ancora precedente. Questo ragionamento non vale però per la prima notte: chiaramente quella notte possiamo (e dobbiamo) aggiungere un numero di cavalieri che ci permetta di portare il totale delle persone a 2024 il giorno 1.

Da quanto detto, ci accorgiamo che, nelle notti tra la seconda e la decima, dovremo solamente assicurarci che:

- se x è pari il numero di cavalieri al giorno x sia uguale al numero di persone totali al giorno $x+1$.
- se x è dispari il numero di furfanti al giorno x sia uguale al numero di persone totali al giorno $x+1$.

Scrivendo come notazione (G, C, F) rispettivamente il giorno, il numero di cavalieri presenti quel giorno e il numero di furfanti presenti quel giorno e seguendo le regole precedentemente descritte otteniamo:

$$(11,0,1),(10,1,1),(9,1,2),(8,3,2),(7,3,5),(6,8,5),(5,8,13),(4,21,13),(3,21,34),(2,55,34)$$

Il primo giorno dovremo avere $55+34 = 89$ furfanti e poi possiamo aggiungere tutti i cavalieri che servono, in particolare ci assicuriamo che le persone totali siano 2025 e dunque i cavalieri saranno $2025 - 89 = 1936$. Il numero massimo di cavalieri al giorno 1 è 1936.

12. Avvistamento [$\star$]

Risposta: 2004

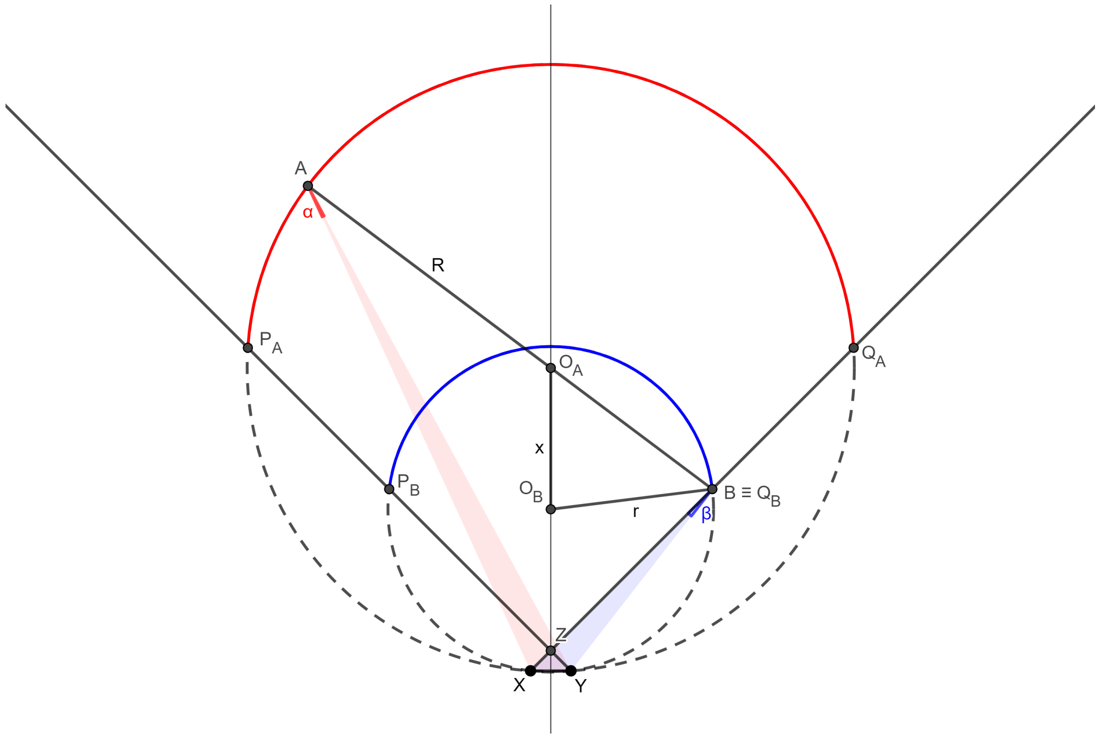

Figura 4

Sia la nuvola il triangolo XYZ rettangolo in Z e siano A e B i due aerei. Gli angoli $\alpha \coloneqq \angle XAY$ e $\beta \coloneqq \angle XBY$ misurati dagli equipaggi rispettano

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{226}}$$
$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{65}}$$

Per determinare la minima dimensione della nuvola data la distanza $\overline{AB}$ è utile considerare fissa la dimensione della nuvola e determinare il massimo valore di $\overline{AB}$ possibile.

Poiché A e B si trovano nello stesso semipiano rispetto alla retta XY, considerando fissa la posizione della nuvola si ottiene che A e B variano su archi di circonferenze Γ_A e Γ_B, di raggi R e r e centri O_A e O_B, rispettivamente. La limitazione circa il fatto che entrambi gli aerei vedono tutti e tre i vertici della nuvola (al più sovrapposti) implica che questi archi sono delimitati non da X e Y, ma dalle coppie di punti P_A, Q_A e P_B, Q_B ottenute dalle intersezioni delle circonferenze con le semirette YZ e XZ rispettivamente. Relativamente alla figura, dunque, A varia sull'arco rosso di Γ_A e B sull'arco blu di Γ_B.

Per B all'interno di Γ_A e A su Γ_A, il segmento AB di lunghezza massima si ha quando B, O_A e A sono allineati. In questo caso, $\overline{AB} = R + \overline{O_AB}$ è massimizzato quando B è il più lontano possibile da O_A, ovvero per $B \equiv Q_B$.

Innanzitutto, fissato $\overline{XY} = 1$ per semplicità,

$$R = \frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{226}}{2}$$
$$r = \frac{1}{2\sin\beta} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

Nel secondo caso, detta $x := \overline{O_A O_B}$,

$$x = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \cot\beta) = \frac{1}{2}(15 - 8) = \frac{7}{2}$$

$$\angle O_A O_B B = 180^\circ - (\angle B O_B Y + \angle Y O_B Z) = 180^\circ - \left(2\angle BXY + \frac{1}{2}2\beta\right) = 90^\circ - \beta$$

$$\overline{AB} = R + \overline{O_A B} = R + \sqrt{x^2 + r^2 - 2rx\cos\angle O_A O_B B} = R + \sqrt{x^2 + r^2 - 2rx\sin\beta} =$$

$$= R + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4\sin^2\beta}} - x = \frac{\sqrt{226}}{2} + 5$$

In realtà, è necessario verificare che, in base ai dati del problema, questa configurazione ottimale è accettabile, ovvero che A si trova effettivamente sull'arco rosso. È possibile svolgere le seguenti stime:

$$r \approx \frac{\sqrt{64}}{2} = 4 \approx x$$

$$\beta \ll 90^\circ \implies \angle O_A O_B B = 90^\circ - \beta \approx 90^\circ$$

e concludere che $\angle O_B O_A B \approx 45^\circ$ e che quindi le rette $P_A Y$ e AB sono approssimativamente parallele.

In conclusione, il minimo valore possibile di $\overline{XY}$ con $\overline{AB} = 189\,\mathrm{m}$ è

$$\overline{XY} = \frac{189\,\mathrm{m}}{\frac{\sqrt{226}}{2} + 5} = \left(3\sqrt{226} - 30\right)\mathrm{m} = \left(-30 + \sqrt{2034}\right)\mathrm{m}$$

13. Contaminazione

Risposta: 0095

Per comodità, sia il punto di partenza della pulce x = 0. È facile notare che gli unici salti che aumentano la distanza media della pulce dal punto iniziale sono quelli che partono da 0 e arrivano in 1 o -1. Infatti, per ogni salto che va da $x \neq 0$ ad $x + 1$ o $x - 1$ i contributi sulla distanza si compensano e la distanza media non cambia.

Inoltre, si nota che il numero di percorsi totali possibili dopo t secondi sono 2^t e, ogni volta che la pulce salta partendo dal punto $x = 0$, la distanza media aumenta di $\frac{1}{2^t}$ dove t è il numero di secondi passati fino a quel momento.

In particolare, per la quantità richiesta dal problema è necessario contare i percorsi possibili della pulce che partono da 0 in un tempo compreso tra 96 e 99 secondi e dividere i risultati rispettivamente per 2^t (i percorsi per $t < 96$ contribuiscono ad aumentare sia $f(96)$ che $f(100)$). Inoltre, la pulce può arrivare in 0 solo dopo un numero pari di secondi. Quindi i percorsi cercati sono quelli che arrivano in 0 dopo 96 e 98 secondi.

La quantità richiesta è data da

$$\frac{\binom{96}{48}}{2^{96}} + \frac{\binom{98}{49}}{2^{98}} = \frac{4 \cdot \binom{96}{48} + \binom{98}{49}}{2^{98}}$$

$\binom{96}{48}$ ha 2 fattori 2 e $\binom{98}{49}$ ha 3 fattori 2, da cui, semplificando la frazione, la risposta al problema è 95.

14. Bottino [$\star\star$]

Risposta: 1287

Per un intero m consideriamo la distanza d tra $3n$ e il multiplo più vicino di m. Allora m deve dividere $3n \pm d$, il che implica $3n \equiv \pm d \pmod{m}$. Quindi, per qualche m, la distanza tra $3n$ e il multiplo più vicino di m è uguale alla distanza tra n^3 e il multiplo più vicino di m se e solo se

$$n^3 \equiv \pm 3n \pmod{m}$$

D'altra parte, se $n^3 \equiv \pm 3n \pmod{m}$, allora esiste un $0 \leq d \leq m/2$ tale che $3n \equiv \pm d \pmod{m}$ e $n^3 \equiv \pm d \pmod{m}$, quindi la distanza tra $3n$ e il multiplo più vicino di m è uguale alla distanza tra n^3 e il multiplo più vicino di m.

Concludiamo quindi che, per determinare A_n, dobbiamo contare il numero di interi positivi m tali che $n^3 \equiv \pm 3n \pmod{m}$, ovvero m divide $n^3 - 3n$ o $n^3 + 3n$. Ciò implica che:

$$A_n = \tau(n^3 - 3n) + \tau(n^3 + 3n) - \tau(\gcd(n^3 - 3n, n^3 + 3n))$$

dove $\tau(k)$ denota il numero di divisori positivi di un intero positivo k.

Si ricorda che $\tau(k)$ è dispari se e solo se k è un quadrato perfetto.

Osservando questi tre termini, possiamo riscrivere:

$$A_n = \tau(n(n^2-3)) + \tau(n(n^2+3)) - \tau(\gcd(n^3+3n, 6n))$$

Dobbiamo capire quando $n(n^2-3)$, $n(n^2+3)$ e $\gcd(n^3+3n, 6n)$ possono essere quadrati perfetti.

Mostriamo che $n(n^2-3)$ non lo è mai per $n \geq 2$. Infatti $\gcd(n, n^2-3)$ può essere solo 1 o 3, e vale 3 solo se $n = 3k$. Se vale $\gcd(n, n^2-3) = 1$, allora affinché $n(n^2-3)$ sia un quadrato deve valere che sia n che n^2-3 devono esserlo ma n^2-3 non lo è mai per $n \geq 2$. Se $n = 3k$, vogliamo che $3k(9k^2-3)$ sia un quadrato, cioè $k(3k^2-1)$ sia un quadrato, ma $\gcd(k, 3k^2-1) = 1$, cioè vogliamo che sia k che $3k^2-1$ siano quadrati, ma $3k^2-1 \equiv 2 \pmod 3$ e 2 non è un residuo quadratico modulo 3. Perciò $n(n^2-3)$ avrà sempre un numero pari di divisori.

Se invece abbiamo $n(n^2+3)$, con considerazioni analoghe troviamo che sia k che $3k^2+1$ devono essere quadrati ($n = 3k$). Chiamo $h^2 = k$ e voglio $3h^4 = x^2-1$, ricordando $n = 3h^2$ e $n \leq 313$, segue $h \leq 10$. Osserviamo che $h = 1, 2$ generano soluzioni ($n = 3, 12$), mentre tutti gli altri no. Segue che $\tau(n(n^2+3))$ è dispari solo per $n = 3, 12$ e pari in tutti gli altri casi.

Se $n = 3$, $\gcd(n^3+3n, 6n)) = 18$, che non è un quadrato, dunque A_3 è effettivamente dispari.

Se $n = 12$, $\gcd(n^3+3n, 6n)) = 36$ che è un quadrato per cui 12 non funziona (A_{12} è somma di pari+dispari-dispari=pari).

Per tutti gli altri n, abbiamo che $\tau(n(n^2-3)) + \tau(n(n^2+3))$ è pari, per cui guardiamo soltanto quando $\tau(\gcd(n^3+3n, 6n))$ è dispari, ovvero quando $\gcd(n^3+3n, 6n)$ è un quadrato perfetto.

Raccogliendo n otteniamo $\gcd(n^3+3n, 6n)) = n \cdot \gcd(n^2+3, 6)$, che potrà essere solo n, $2n$, $3n$ o $6n$. Guardando modulo 6 otteniamo:

$$\gcd(n^2+3, 6) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \equiv 0 \pmod 6 \\ 2, & \text{se } n \equiv 1 \pmod 6 \\ 1, & \text{se } n \equiv 2 \pmod 6 \\ 6, & \text{se } n \equiv 3 \pmod 6 \\ 1, & \text{se } n \equiv 4 \pmod 6 \\ 2, & \text{se } n \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

cioè:

$$\gcd(n^3+3n, 6n) = \begin{cases} 3n, & \text{se } n \equiv 0 \pmod 6 \\ 2n, & \text{se } n \equiv 1 \pmod 6 \\ n, & \text{se } n \equiv 2 \pmod 6 \\ 6n, & \text{se } n \equiv 3 \pmod 6 \\ n, & \text{se } n \equiv 4 \pmod 6 \\ 2n, & \text{se } n \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

Osserviamo ad esempio che se $n \equiv 3 \pmod 6$, allora $6n$, non sarà mai un quadrato perfetto (perché ha un solo fattore 2), analogamente se $n \equiv 1, 5 \pmod 6$, allora $2n$, non sarà mai un quadrato perfetto.

Se $n \equiv 2 \pmod 6$, allora vogliamo che n sia un quadrato perfetto, tuttavia 2 non è residuo quadratico modulo 6, per cui ciò è impossibile.

Se $n \equiv 4 \pmod 6$, allora vogliamo che n sia un quadrato perfetto. Unendo ciò al fatto che $n \equiv 4 \pmod 6$, troviamo che tutti i quadrati di numeri congrui a $2, 4 \pmod 6$ funzionano (prima condizione).

Se $n \equiv 0 \pmod 6$, vogliamo $3n$ quadrato perfetto. Questo succede solo se n ha un numero pari di fattori 2 (almeno 2), un numero dispari di fattori 3 (ad esempio $n = 12, 48, \dots$) e un numero pari di fattori con altri primi, ovvero se n è 3 volte un quadrato perfetto pari (seconda condizione).

Elenchiamo infine i numeri ottenuti.

Da considerazioni precedenti abbiamo visto che 3 funziona.

I numeri che rispettano la prima condizione sono 4, 16, 64, 100, 196, 256 (tra questi non ci sono né 3 né 12 valutati in precedenza). La loro somma è 636.

I numeri che rispettano la seconda condizione, sono 12, 48, 108, 192, 300, ma tra questi ci sarebbe il 12 che abbiamo escluso prima. La loro somma è dunque 648.

In totale abbiamo quindi $3 + 648 + 636 = 1287$.

15. Un vecchio camper

Risposta: 2648

624 è radice del polinomio. Calcoliamo intanto le ultime quattro cifre di 624^{2025}. Per il teorema cinese del resto questo è equivalente a risolvere $624^{2025} \pmod{16}$ e $624^{2025} \pmod{625}$. Il primo è chiaramente $624^{2025} \equiv 0 \pmod{16}$. Osserviamo poi $624^2 \equiv 1 \pmod{625}$ che implica che l'ordine di 624 modulo 625 è 2, cioè $624^{2025} \equiv 624 \pmod{625}$. Unendo le due condizioni si trova $624^{2025} \equiv 624 \pmod{10000}$.

Ora gestiamo l'altra parte del polinomio. Considerata una radice λ generica di $p(x)$, vale $p(\lambda) = 0$. Se $\lambda \neq 624$, necessariamente $1 + 2\lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{2025} = 0$. Poiché chiaramente 0 e 1 non sono radici del polinomio, quest'ultima equazione si può riscrivere come $(\lambda - 1)(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{2025}) + (\lambda - 1)\lambda = 0$, cioè $\lambda^{2026} - 1 + \lambda^2 - \lambda = 0$, o ancora $\lambda^{2026} = 1 + \lambda - \lambda^2$, ovvero $\lambda^{2025} = \frac{1}{\lambda} + 1 - \lambda$. La somma delle potenze 2025-esime delle altre 2025 radici allora è:

$$\sum_{i=1}^{2025} \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{2025} 1 - \sum_{i=1}^{2025} \lambda_i$$

La prima sommatoria è: $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{2025}}$, ovvero:

$$\frac{\lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \cdots \cdot \lambda_{2025} + \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \cdots \cdot \lambda_{2025} + \cdots + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{2024}}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{2025}}$$

Tuttavia, numeratore e denominatore si trovano facilmente applicando il teorema di Viete al polinomio $(1 + 2x + x^2 + \cdots + x^{2025})$, e vale $\frac{2}{-1} = -2$.

La seconda sommatoria vale 2025 e la terza vale -1 (ancora per Viete).

In totale abbiamo quindi $2025 - 2 - (-1) = 2024$.

Abbiamo poi da sommare 624 e otteniamo infine 2648

16. Un lavoro per Saul Goldbach

Risposta: 0096

Dobbiamo assicurarci che l'espressione sia congrua a 0 modulo p e modulo q. Per il teorema di Lucas, $\binom{pq}{q}$ è sempre congruo a $0 \pmod{p}$, poiché sopra abbiamo un'espressione che termina per 0 se scritta in base p e sotto chiaramente non termina per 0. Modulo p, $\binom{pq}{p}$ sarà invece sempre non congruo a 0 poiché sotto abbiamo un'espressione che scritta in base p è 10, sopra certamente termina per 0, ma non per 00 essendo multiplo di p ma non di p^2. Dunque otteniamo:

$$2024\binom{pq}{q} + 2025\binom{pq}{p} \equiv 2025\binom{pq}{p} \equiv 0 \pmod{p}$$

cioè necessariamente $p \mid 2025$, $p = 3, 5$.

Analogamente con q otteniamo:

$$2024\binom{pq}{q} + 2025\binom{pq}{p} \equiv 2024\binom{pq}{q} \equiv 0 \pmod{q}$$

cioè necessariamente $q \mid 2024$, $q = 2, 11, 23$: Tutte le coppie (p, q) sono dunque:

$$(3, 2),\ (3, 11),\ (3, 23),\ (5, 2),\ (5, 11),\ (5, 23).$$

La somma totale è dunque 96.

17. Ufficio legale

Risposta: `0160`

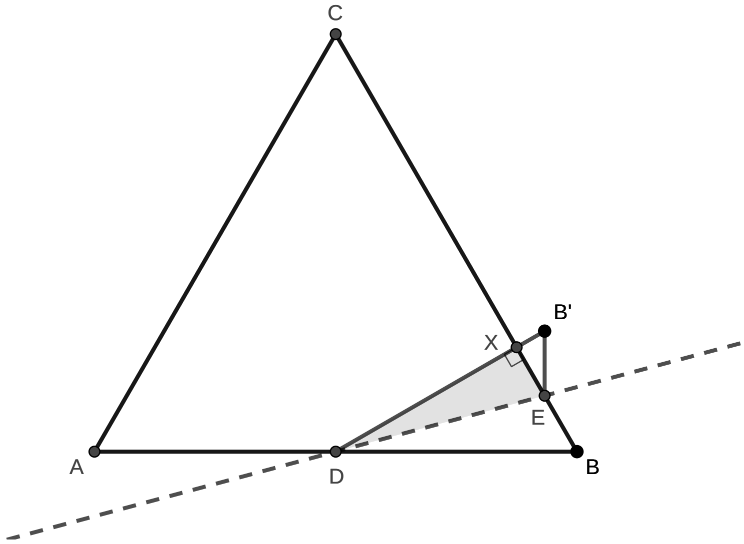

Figura 5

Prima soluzione

Dato che D è punto medio di AB, $\overline{DB} = 40$. Notando poi che DBX è la metà di un triangolo equilatero, si ricava che $\overline{DX} = \frac{\overline{DB}\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$ e $\overline{BX} = 20$. Usando il teorema della bisettrice per il triangolo BDX,

$$\overline{EX} = 20\frac{20\sqrt{3}}{20\sqrt{3}+40} = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$$

L'area di DEX, quindi, vale

$$\frac{\overline{DX}\cdot\overline{EX}}{2} = 1200 - 600\sqrt{3} \approx 160{,}74$$

Seconda soluzione

$$\angle DBX = 60^\circ \implies \angle BDX = 30^\circ \implies \angle EDX = \frac{\angle BDX}{2} = 15^\circ$$
$$\overline{EX} = \overline{DX}\tan(\angle EDX) = \overline{DX}\tan(15^\circ)$$
$$\overline{DX} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{DB} = 20\sqrt{3}$$

L'area del triangolo DEX è quindi

$$\frac{\overline{DX}\cdot\overline{EX}}{2} = \frac{1}{2}\overline{DX}^2\tan(15^\circ) = 1200 - 600\sqrt{3} \approx 160{,}74$$

Nota: $\tan(15^\circ)$ si può calcolare per bisezione:

$$\tan(15^\circ) = \sqrt{\frac{1-\cos(30^\circ)}{1+\cos(30^\circ)}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}$$

18. Codice [⋆⋆]

Risposta: 6394

È più semplice calcolare il complementare dell'insieme cercato, e poi sottrarre i codici dal totale. Per contare i codici con somma multiplo di 4, ignorando il requisito delle cifre consecutive, si consideri il polinomio.

$$p(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^9)^5$$

Si noti che il coefficiente di x^n del polinomio dato è esattamente il numero di codici le cui cifre sommano ad n.

In generale, la somma dei coefficienti di grado multiplo di 4 è:

$$\frac{p(1) + p(i) + p(-1) + p(-i)}{4}$$

Il numero di tali codici è quindi 24998.

Per contare gli altri casi conviene classificare i possibili codici in base a quante ripetizioni di numeri contengono: in particolare, si rappresentino un insieme di codici con una stringa di lettere in modo che lettere uguali rappresentino cifre uguali e lettere diverse rappresentino cifre diverse. Ad esempio, la stringa AABCD rappresenta tutti i codici in cui c'è esattamente una coppia di lettere uguali, in modo che le cifre possano essere eventualmente permutate (per esempio, il codice 23411 è del tipo AABCD).

Il caso in cui compare almeno una coppia di cifre consecutive uguali è codificato dal seguente polinomio:

$$(1 + x^2 + x^4 + ... + x^{18})(1 + x + x^2 + ... + x^9)^3$$

Da cui $\frac{10^4}{4} \cdot 4 = 10^4$ codici (si moltiplica per 4 per considerare le permutazioni possibili dei fattori del polinomio scelto), che nei termini degli insiemi descritti prima sono:

AABCD contato 1 volta
AABBC contato 2 volte
AABBB contato 3 volte
AAABC contato 2 volte
AAAAB contato 3 volte
AAAAA contato 4 volte

Analogamente per altri casi:

per AA?BB si consideri il polinomio è $(1 + x^2 + x^4 + ... + x^{18})^2(1 + x + x^2 + ... + x^9)$ da cui si trovano $\frac{10^3}{4} \cdot 3 = 750$ codici, divisi in:

AABBC contato 1 volte
AABBB contato 2 volte
AAAAB contato 1 volte
AAAAA contato 3 volte

Per il caso di AAA?? si consideri il polinomio $(1 + x^3 + x^6 + ... + x^{27})(1 + x + x^2 + ... + x^9)^2$ da cui si trovano $\frac{10^3+4}{4} \cdot 3 = 753$ codici divisi in:

AAABC contato 1 volta
AAABB contato 1 volta
AAAAB contato 2 volte
AAAAA contato 3 volte

infine è utile considerare alcuni casi piccoli, semplici da calcolare a mano:

AAABB ammette 44 codici possibili
AAAAB ammette 54 codici possibili
AAAAA ammette 3 codici possibili

Da i vari casi contati con molteplicità è necessario trovarne una combinazione che conti ogni scelta sbagliata esattamente una volta.

La seguente combinazione funziona:

$$10^4 - 750 - 753 + 44 + 54 + 3 \cdot 3 = 8604$$

e il risultato cercato è $24998 - 8604 = 16394$.

19. Ultimo giorno all'autolavaggio

Risposta: 1498

Prima considerazione: se un numero ha un fattore 2, allora l'uguaglianza $F(n) = n$ non è verificata. Infatti $n = 2$ non funziona e inoltre, $\varphi(n)$ per $n \geq 3$ è pari e poiché la nostra somma per $F(n)$ termina sempre con $+1$, avremo che $F(n)$ è sempre dispari. Possiamo dunque escludere tutti i numeri con fattori 2.

Seconda considerazione: tutti i numeri della forma 3^a (con $a \geq 1$), sono tali che $F(n) = n$. Mostriamolo per induzione.

Passo base:

$$F(3^1) = \varphi(3^1) + \varphi(2) = 2 + 1 = 3^1$$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned}
F(3^{n+1}) &= \varphi(3^{n+1}) + \varphi(\varphi(3^{n+1})) + \cdots + 2 + 1 = \\
&= \varphi(3^{n+1}) + \varphi(2 \cdot 3^n) + \varphi(\varphi(2 \cdot 3^n) + \cdots + 2 + 1 = \\
&= \varphi(3^{n+1}) + \varphi(2) \cdot \varphi(3^n) + \varphi(\varphi(2)) \cdot \varphi(\varphi(3^n)) + \cdots + 2 + 1 = \\
&= \varphi(3^{n+1}) + F(3^n) = \\
&= \varphi(3^{n+1}) + 3^n = \\
&= 2 \cdot 3^n + 3^n = \\
&= 3^{n+1}
\end{aligned}$$

Poiché i numeri devono essere minori o uguali a 2025^2 e sappiamo $3^6 = 729, 3^7 = 2187$, otteniamo che la più grande potenza di 3 da considerare è 3^{13}. Da questo otteniamo un totale di

$$\sum_{i=1}^{13} 3^i = \frac{3^{14} - 1}{2} - 1 = \frac{2187^2 - 1}{2} - 1 \equiv 1484 - 1 \equiv 1483 \pmod{10000}.$$

Ora consideriamo i fattori 5. Nessun numero della forma $5^a, a \geq 1$ soddisfa la condizione: se $a \geq 2$, allora $F(5^a) = \varphi(5^a) = 4 \cdot 5^{a-1}, \varphi(\varphi(5^a)) = \varphi(4 \cdot 5^{a-1}) = 2 \cdot 4 \cdot 5^{a-2}$, per cui solo la somma di questi primi due termini vale $5^{a-2} \cdot (20 + 8) > 5^a$, inoltre $F(5) = 4 + 2 + 1 > 5$

L'ultima possibilità da controllare sono i numeri che hanno fattori 3 e fattori 5.

Mostriamo che numeri della forma $n = 3^a \cdot 5^b, a, b \geq 2$ non funzionano.

Osserviamo i primi due termini di $F(n = 3^a \cdot 5^b)$:

$$\varphi(3^a \cdot 5^b) = 2 \cdot 3^{a-1} \cdot 4 \cdot 5^{b-1} = \frac{8}{15} \cdot n \varphi(\varphi(3^a \cdot 5^b)) = \varphi(2 \cdot 3^{a-1} \cdot 4 \cdot 5^{b-1}) = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3^{a-2} \cdot 5^{a-2} = \frac{32}{225} \cdot n$$

Tutti i termini successivi, poiché hanno almeno un fattore 2 (e eventualmente dei fattori 3 e dei fattori 5) sono minori o uguali della metà del precedente (poiché al posto di 2^x abbiamo $\varphi(2^x) = 2^{x-1}$). Possiamo dunque scrivere:

$$F(n) = \frac{8}{15} \cdot n + \frac{32}{225} \cdot n + \varphi(\frac{32}{225} \cdot n) + \cdots \leq \frac{8}{15} \cdot n + \frac{32}{225} \cdot n + \frac{16}{225} \cdot n + \cdots \leq \frac{8}{15} \cdot n + \frac{64}{225} \cdot n = \frac{120 + 64}{225} \cdot n < n$$

Trattiamo in modo analogo i casi $a = 1, b \geq 2$ e $a \geq 2, b = 1$.

$$F(n = 3 \cdot 5^a) = \frac{8}{15} \cdot n + \frac{16}{75} \cdot n + \varphi(\frac{16}{75} \cdot n) + \cdots \leq \frac{8}{15} \cdot n + \frac{16}{75} \cdot n + \frac{8}{75} \cdot n + \cdots \leq \frac{8}{15} \cdot n + \frac{32}{75} \cdot n = \frac{40 + 32}{75} \cdot n < n$$

$$F(n = 5 \cdot 3^a) = \frac{8}{15} \cdot n + \frac{8}{45} \cdot n + \varphi(\frac{8}{45} \cdot n) + \cdots \leq \frac{8}{15} \cdot n + \frac{8}{45} \cdot n + \frac{4}{45} \cdot n + \cdots \leq \frac{8}{15} \cdot n + \frac{16}{45} \cdot n = \frac{24 + 16}{45} \cdot n < n$$

Resta solo il caso $a = 1, b = 1$: $F(15) = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$, per cui 15 funziona.

Il totale è dunque $15 + 1483 \equiv 1498 \pmod{10000}$.

20. Los Pollos Hermanos [$\star$]

Risposta: 0745

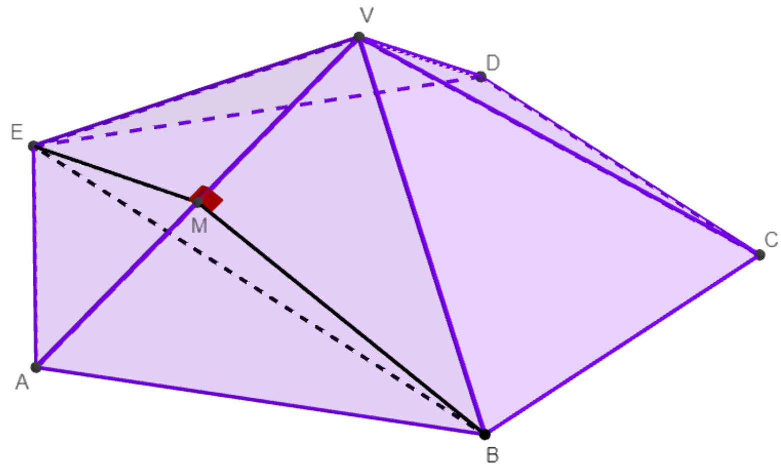

Figura 6

Scelto un vertice V dell'icosaedro, i cinque triangoli equilateri che hanno V come vertice costituiscono le facce laterali di una piramide a base pentagonale regolare. Siano A, B, C, D ed E i vertici della base della piramide. L'angolo diedro tra due facce dell'icosaedro corrisponde quindi all'angolo $\theta = \angle BME$, dove M è il punto dello spigolo AV tale per cui il piano che contiene B, M ed E è perpendicolare ad AV. M deve quindi essere il punto medio di AV. θ si ottiene ora tramite il teorema del coseno: detto l il lato dell'icosaedro e sapendo che il rapporto tra la diagonale e il lato in un pentagono regolare è $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mentre il rapporto tra l'altezza e il lato in un triangolo equilatero è $\sqrt{3}/2$,

$$a := \overline{BE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} l$$

$$b := \overline{BM} = \overline{EM} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos\theta \implies \cos\theta = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \approx -0{,}745\,367$$

21. Ricina

Risposta: 0020

Analizziamo prima il caso $x = y$. Otteniamo un'equazione di terzo grado:

$$x = x(3-x)^2$$

che ha chiaramente come soluzioni 0, 2, 4. Questo restituisce $x + y = 0, 4, 8$.

Ora, se $x \neq y$, definiamo la somma $s = x + y$ e il prodotto $p = xy$. Sottraendo le due equazioni si ottiene:

$$p = s^2 - 6s + 10$$

Sommiamo ora le due equazioni iniziali:

$$0 = s(s^2 - 3p) - 6(s^2 - 2p) + 8s$$

Sostituendo p:

$$0 = s^3 - 12s^2 + 47s - 60$$

Fattorizzando:

$$(s-3)(s-4)(s-5) = 0$$

Da questo otteniamo che i possibili valori di $s = x + y$ sono 3, 4, 5. Nel caso $x = y = 2$, è già stato ottenuto 4.

Verificando, si ottiene che anche 3 e 5 sono effettivamente realizzabili con:

$$(x, y) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Quindi, i valori possibili per $x + y$ sono 0, 3, 4, 5, 8 e la loro somma è 20.