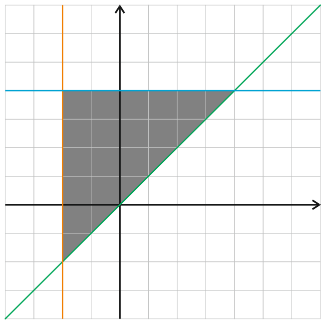
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (25/11/2024)
BIENNIO

PROBLEMA 1 [49]

$n = 8^{16} \cdot 5^{49} = \left(2^3\right)^{16} \cdot 5^{49} = 2^{48} \cdot 5^{49} = 5 \cdot 10^{48}$ che ha 49 cifre.



PROBLEMA 2 [18]

L'area richiesta è quella del triangolo rappresentato in figura.

$$A = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$$

PROBLEMA 3 [5572]

Sia x la somma posseduta dalla mamma. Il problema può essere descritto mediante l'equazione $2\left(20,80 + \frac{x}{2}\right) = 69,46 + \frac{x}{2}$ che risolta porta a determinare $x = 55,72$ €.

PROBLEMA 4 [76]

Per avere una speranza (seppur minima) di entrare al collegio è necessario avere una media nei primi tre esami tale che prendendo 100 all'ultimo esame si raggiunga il minimo richiesto dalla scuola. Sia x tale media:

$$\frac{3x + 100}{4} = 82$$

Risolvendo si ottiene $x = 76$.

PROBLEMA 5 [32]

Visualizziamo la situazione:

24 NO ALGEBRA		x
y	20 NO PROB	
	giorni liberi	

Quindi il problema è risolto dal sistema

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 24 + x = 20 + y \end{cases}$$ che ha come soluzione $$\begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}.$$

Lo stage dura $24 + 8 = 20 + 12 = 32$ giorni

PROBLEMA 6 [9900]

Ogni concorrente dovrà fare due volte il percorso fino a ciascuna pietra (andata e ritorno) cioè $2(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99) = 2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 9900 \text{ m}$.

PROBLEMA 7 [7846]

Scriviamo tutti i quadrati di tre cifre.

10	100
11	121
12	144
13	169
14	196

15	225
16	256
17	289
18	324
19	361

20	400
21	441
22	484
23	529
24	576

25	625
26	676
27	729
28	784
29	841

30	900
31	961

Eliminiamo tutti quelli che presentano due cifre uguali:

13	169
14	196
16	256

17	289
18	324
19	361

23	529
24	576
25	625

27	729
28	784
29	841

31	961

Ora, guardano una tastiera di cellulare, eliminiamo quei numeri le cui cifre non formano un triangolo isoscele

16	256

25	625

27	729

28	784

Il più grande è 784 e quindi la quarta cifra è $8 - 2 = 6$. Il PIN cercato è 7846

PROBLEMA 8 [76]

Scelti tre punti in $\binom{9}{3}$ modi, vanno tolti i triangoli degeneri che sono 3 orizzontali (scegliendo i tre punti di una riga), 3 verticali (scegliendo i tre punti di una colonna)e 2 sulle due diagonali (scegliendo i tre punti di una delle diagonali).

$\binom{9}{3}-8=84-8=76$.

PROBLEMA 9 [1155]

$n=(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)=5a$; n è multiplo di 5

$n=(b-2)+(b-1)+b+(b+1)+(b+2)+(b+3)=6b+3$; n è multiplo di 3 ma non di 6

$n=(c-3)+(c-2)+(c-1)+c+(c+1)+(c+2)+(c+3)=7c$; n è multiplo di 7.

Siccome $mcm(3,5,7)=105$, cerchiamo il primo multiplo dispari di 105 di quattro cifre. Siccome $1000:105\cong 9$ la soluzione, non potendo essere $105\cdot 10$ è $105\cdot 11=1155$.

PROBLEMA 10 [516]

12 dadi finiscono in un vertice del parallelepipedo mostrando tre delle loro facce;

$\left((5-2)+(4-2)+(3-2)\right)\cdot 4=24$ sono i dadi che mostreranno due facce visto che finiscono su uno degli spigoli ma non nel vertice.

Rimangono $\left((5-2)\cdot(4-2)+(5-2)\cdot(3-2)+(3-2)\cdot(4-2)\right)\cdot 2=22$ dadi che mostreranno un solo valore finendo all'interno delle facce del parallelepipedo.

Il totale dei valori che potremmo vedere sarà $8\cdot(6+5+4)+24\cdot(6+5)+22\cdot 6=120+264+132=516$

PROBLEMA 11 [12]

Siano M ed N i punti medi dei lati obliqui. AB, MN e CD risultano essere in progressione aritmetica, quindi $MN=\frac{2CD+CD}{2}=\frac{3}{2}CD$. Siccome MN divide l'altezza in due parti uguali, risulta che il rapporto vale:

$$\frac{X}{Y}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(CD+\frac{3}{2}CD\right)\cancel{\frac{h}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\left(2CD+\frac{3}{2}CD\right)\cancel{\frac{h}{2}}}=\frac{\frac{5}{2}CD}{\frac{7}{2}CD}=\frac{5}{7}$$

La risposta richiesta è $5+7=12$

PROBLEMA 12 [1440]

Dette s le sfere, q i cubi e c i coni, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} s+q+c=280g \\ 3s+3q=4c \\ 2s+4c=6q \end{cases} \quad \text{che risolto ci dice} \quad \begin{cases} s=60g \\ q=100g \\ c=120g \end{cases}$$

Quindi $3c+9q+3s=3\cdot 120+9\cdot 100+3\cdot 60=1440g$.

PROBLEMA 13 [165]

I modi sono tanti quanti quelli di scegliere in quale posizione della sequenza di 11 cartoncini posizionare gli 8 rossi:

$\binom{11}{8}=165$.

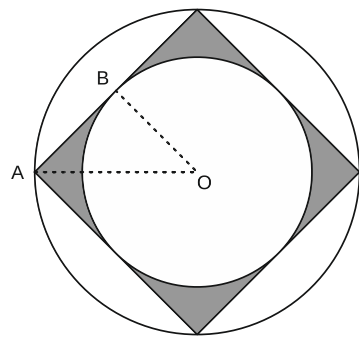
PROBLEMA 14 [5940]
Scegliamo un maschio ed una ragazza per la prima squadra: $10\cdot 12$ ora scegliamo un altro maschio ed un'altra ragazza per la seconda squadra: $9\cdot 11$. Le possibili partite sono $\frac{(10\cdot 12)\cdot(9\cdot 11)}{2}=5940$ dove abbiamo diviso per 2 per non contare la stessa partita due volte con le scelte invertite di maschio-donna.

PROBLEMA 15 [73]
Se prendo tutti i numeri tranne i multipli di 5 non avrò nessuna coppia che mi va bene.
Siccome $90:5=18$, con $90-18=72$ numeri non avrò ancora la certezza di averne due che moltiplicati mi diano un multiplo di 10. Me ne servirà uno in più che necessariamente sarà un multiplo di 5. La risposta richiesta è 73.

PROBLEMA 16 [11]
La superficie dello schermo è 2700 cm^2. Siccome $2^{11}=2048$ avremo che $\frac{2700}{2^{12}}<1$ e quindi lo schermo mostrerà in tutto 11 schermi.

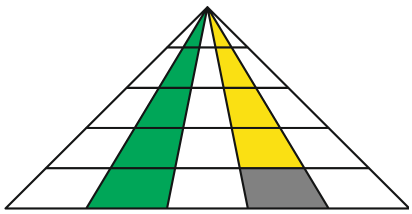
PROBLEMA 17 [110]
Se v è la velocità di Mattia, $10v$ è la velocità del tram e $2v$ quella di Jacopo.
In 10 secondi, il tram ha percorso uno spazio di $s=10v\cdot 10=100v$ mentre mattia $s=10v$.
Mattia e Jacopo avranno una distanza di $110v$ nel momento in cui mattia inizia l'inseguimento.
Se ora pensiamo a Mattia fermo e Jacopo che cammina con velocità $2v-v=v$ avremo che Jacopo ci metterà $\frac{110v}{v}=110\text{ sec}$ per raggiungere l'amico.

PROBLEMA 18 [1073]
Osservando la figura a lato, possiamo notare che:
$AO=\frac{10}{2}=5\text{ m}=50\text{ dm}$ e che $OB=\frac{50}{\sqrt{2}}\text{ dm}$.
L'area cercata vale:
$$A=(2\cdot OB)^2-\pi OB^2=(4-\pi)OB^2=(4-\pi)\frac{2500}{2}=1250(4-\pi)\cong 1073\text{ dm}^2$$



PROBLEMA 19 [39]
Se prendo tutti i numeri $n\equiv 1\bmod 10$, $n\equiv 2\bmod 10$, $n\equiv 3\bmod 10$ e $n\equiv 4\bmod 10$ non avrò alcuna coppia di numeri la cui somma valga un multiplo di 10. Se a questi aggiungo un solo numero multiplo di 10 ed uno di 5 siamo ancora nei guai. Ne servirà ancora 1 per trovare una coppia di numeri la cui somma sarà multipla di 10.
In totale serviranno $9\cdot 4+1+1+1=39$ numeri.

PROBLEMA 20 [90]
Prima di tutto osserviamo che ciascuno dei triangolini (in verde in figura) in cui rimane diviso il triangolo grande è esattamente $\frac{1}{5}$ dell'area del triangolo grande.
Il triangolo evidenziato in giallo ha sia la base che l'altezza che sono i $\frac{4}{5}$ della base e dell'altezza del triangolo verde.



L'area cercata è quindi:
$$A_{grigia}=A_{verde}-A_{gialla}=A_{verde}-\left(\frac{4}{5}\right)^2A_{verde}=\frac{9}{25}A_{verde}=\frac{9}{25}\frac{1}{5}A_{Triangolo}=\frac{9}{125}\cdot\frac{50\cdot 50}{2}=90\text{ cm}^2$$