

BELMANTO 2026 - RISPOSTE - 09/02/2026

1.- Un sacchetto contiene 16 palline numerate da 1 a 16. Si estraggono insieme cinque palline: qual è la probabilità p che il numero più grande tra i cinque usciti sia maggiore di 9? Dai come risposta la somma del denominatore e del numeratore di p espressa come frazione ridotta ai minimi termini.

I casi possibili sono tutte le cinque estraibili dal sacchetto: $\binom{16}{5} = 4368$. Per contare i casi favorevoli, detto m il numero intero più grande tra i cinque estratti, sarà $10 \leq m \leq 16$.

Se $m = 10$ gli altri numeri estratti saranno tra 1 e 9; in totale $\binom{9}{4} = 126$ casi.

Analogamente: se $m = 11$ avremo $\binom{10}{4} = 210$ casi; se $m = 12$, $\binom{11}{4} = 330$ casi; se $m = 13$, $\binom{12}{4} = 495$ casi; se $m = 14$, $\binom{13}{4} = 715$ casi; se $m = 15$, $\binom{14}{4} = 1001$ casi; se $m = 16$, $\binom{15}{4} = 1365$ casi.

Quindi i casi favorevoli sono in tutto: $126+210+330+495+715+1001+1365 = 4242$.

Allora $p = 4242/4368 = 101/104$.

Oppure, con la probabilità dell'evento complementare: $P(m \leq 9) = \frac{\binom{9}{5}}{\binom{16}{5}} = \frac{126}{4368}$, l'evento richiesto

ha probabilità: $p = P(m > 9) = 1 - \frac{126}{4368} = \frac{101}{104}$.

Risposta $101+104 = \mathbf{205}$.

2.- Quanti sono i numeri naturali di tre cifre in cui 8 compare almeno una volta?

I numeri naturali con 3 cifre, scrivibili nella forma abc in base 10, vanno da 100 a 999 e sono in tutto 900. Di questi quelli in cui l'8 non figura sono in tutto $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. Allora quelli in cui 8 compare almeno una volta sono in tutto: $900 - 648 = 252$. Risposta **252**.

3.- Determina in cm^2 l'area di un poligono regolare di lato 6 cm in cui ogni angolo esterno è ampio 30° . Dai come risposta la parte intera dell'area.



Sia n il numero dei lati (e degli angoli) del poligono. Seguendo il perimetro del poligono si compiono n sterzate da 30° l'una e quindi un giro completo. Da cui: $n \cdot 30^\circ = 360^\circ$, $n = 12$. Quindi si tratta di un poligono regolare di 12 lati, unione di 12 triangoli isosceli congruenti AOB con $\widehat{AOB} = 30^\circ$, $AB = 6$ cm, $\widehat{AOH} = 15^\circ$.
 $\text{Areapoligono} = 12 \cdot AB \cdot OH/2 = 6 \cdot AB \cdot AH/\tan \widehat{AOH} = 108 \cdot (2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2 \approx 403 \text{ cm}^2$
 Risposta: **403**.

4.- Determina l'area racchiusa dalla curva nel piano cartesiano le cui equazioni parametriche sono:

$$x = 30 - 20 \cos t ; y = 20 + 30 \sin t$$

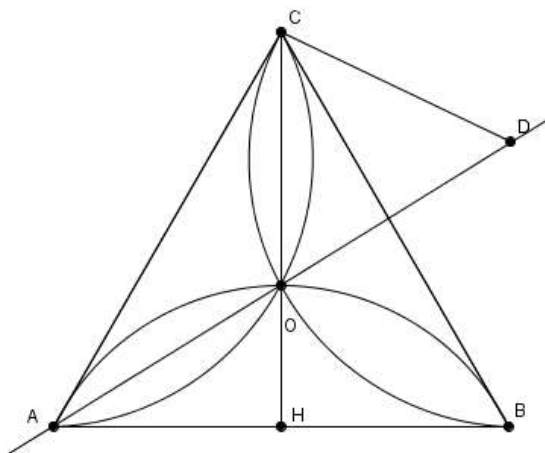
essendo t un parametro reale. Dai come risposta la parte intera dell'area.

$$\begin{cases} x = 30 - 20 \cos t \\ y = 20 + 30 \sin t \end{cases} \begin{cases} \cos t = (30 - x)/20 \\ \sin t = (y - 20)/30 \end{cases} \text{ da cui: } \frac{(x-30)^2}{20^2} + \frac{(y-20)^2}{30^2} = 1.$$

Quindi la curva è l'ellisse di centro $C(30,20)$ e semiassi 20 e 30.

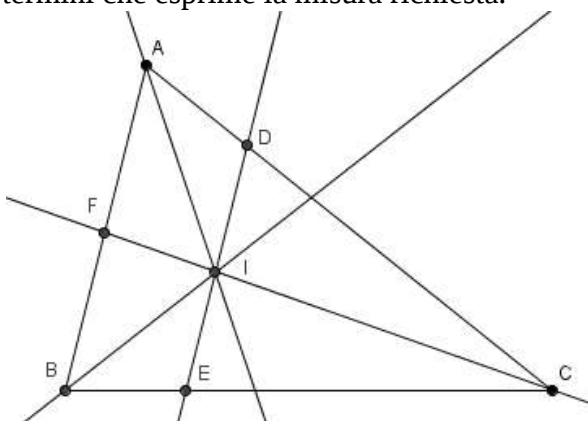
L'area racchiusa dall'ellisse è: $\pi \cdot 20 \cdot 30 = 600\pi$, la cui parte intera è 1884. Risposta: **1884**.

5.- Nel triangolo equilatero ABC di lato $a = 20$ cm sono tracciati i tre archi di circonferenza passanti ciascuno per due vertici del triangolo e per il suo centro O . Si ottiene una sorta di trifoglio di cui si chiede l'area. Dai come risposta la parte intera dell'area.



Sia D il centro della circonferenza passante per C , O , B . Si dimostra che il triangolo COD è equilatero, quindi $\widehat{CDO} = 60^\circ$, $DO = CD = CO = 2CH/3 = a\sqrt{3}/3$.
 Area triangolo $COD = a/4 \cdot a\sqrt{3}/3 = a^2\sqrt{3}/12$.
 Area settore $COD = \pi CD^2/6 = \pi a^2/18$.
 Area petalo $= 2 \cdot (\pi a^2/18 - a^2\sqrt{3}/12)$
 Area trifoglio $= 6 \cdot (\pi a^2/18 - \frac{\sqrt{3}a^2}{12}) = (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) a^2$
 Area trifoglio $\approx 72 \text{ cm}^2$.
 Risposta: **72**.

6.- Nel triangolo ABC i tre lati misurano $AB = 25$, $AC = 35$, $BC = 40$. La retta parallela al lato minore passa per l'incentro di ABC e incontra AC in D e BC in E . Quanto misura DE ?
 Dai come risposta la somma del denominatore e del numeratore della frazione ridotta i minimi termini che esprime la misura richiesta.



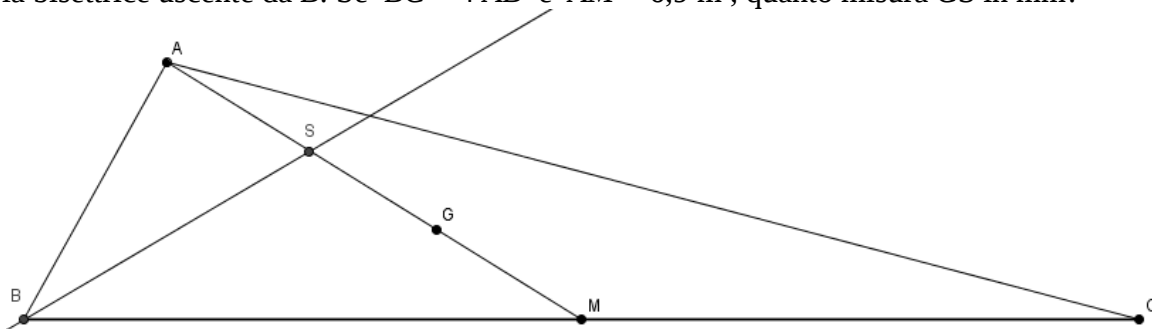
La bisettrice CF passa per l'incentro I di ABC . I triangoli DIC , AFC sono simili; allora:
 $DI : AF = CI : CF$ (1)
 Per il teorema della bisettrice sul triangolo BCF :
 $CI : FI = BC : BF$ e, componendo:
 $CI : CF = BC : (BC + BF)$ (2)
 Analogamente, col teorema della bisettrice su ABC :
 $AF : AB = AC : (AC + BC)$ (3)
 $BF : AB = BC : (AC + BC)$ (4)
 Quindi, applicando in sequenza (1), (2), (3) e (4):

$$DI = AF \cdot \frac{CI}{CF} = AF \cdot \frac{BC}{BC + BF} = AB \cdot \frac{AC}{AC + BC} \cdot \frac{BC}{BC + BF} = AB \cdot \frac{AC}{AC + BC} \cdot \frac{BC}{BC + AB \cdot \frac{BC}{AC + BC}} = \frac{AB \cdot AC}{AC + BC + AB}$$

$$\text{Analogamente si ricava: } EI = \frac{AB \cdot BC}{AC + BC + AB}; DE = DI + EI = \frac{AB \cdot (BC + AC)}{AC + BC + AB} = \frac{25 \cdot (40 + 35)}{25 + 35 + 40} = \frac{75}{4}$$

Risposta: $75 + 4 = \mathbf{79}$.

7.- Nel triangolo ABC : G è il baricentro, M il punto medio di BC , S il punto di incontro di AM con la bisettrice uscente da B . Se $BC = 4 \cdot AB$ e $AM = 6,9 \text{ m}$, quanto misura GS in mm?



Per le proprietà del baricentro: $AG = 2 \cdot GM$. Per il teorema della bisettrice sul triangolo ABM :
 $AS : SM = AB : BM = AB : (BC/2) = AB : (4 \cdot AB/2) = 1/2$, in base anche all'ipotesi $BC = 4 \cdot AB$.
 Quindi $AS = SM/2$, $GS = AS = GM = AM/3 = 6900 \text{ mm}/3 = 2300 \text{ mm}$. Risposta: **2300**.

8.- Trova tutti i numeri primi p per i quali $x^2 + 7px - 88p$ ha due radici intere.

Dai come risposta la somma dei valori assoluti di tutte le radici corrispondenti ai valori trovati di p .

Se x_1, x_2 sono le radici del polinomio, allora $x_1 + x_2 = -7p$, $x_1 \cdot x_2 = -88p$. Quindi x_1 e x_2 sono entrambe multiple di p e $x_1 \cdot x_2$ è multiplo di p^2 . Quindi p^2 divide $88p$ e p divide 88 . Allora, essendo $88 = 2^3 \cdot 11$, $p = 2$ vel $p = 11$.

Se $p = 2$ allora $x_1 = 8$, $x_2 = -22$; se $p = 11$ allora $x_1 = 11$, $x_2 = -88$.

Pertanto la somma dei moduli delle radici è: $8 + 22 + 11 + 88 = 129$. Risposta: **129**.

9.- Trova tutte le coppie ordinate (x, y) di numeri interi per i quali risulta: $x(2 + y) = 3(x + y)$.

Dai come risposta la somma dei valori assoluti di tutti i valori di x e y trovati.

L'equazione data si può riscrivere così: $xy - x - 3y = 0$, ovvero: $(x - 3)(y - 1) = 3$. Essendo entrambi i fattori interi e 3 numero primo, le uniche possibilità sono:

$x - 3 = 3 \wedge y - 1 = 1$, $x - 3 = -3 \wedge y - 1 = -1$, $x - 3 = 1 \wedge y - 1 = 3$, $x - 3 = -1 \wedge y - 1 = -3$.

Quindi le possibili soluzioni sono $(6, 2)$, $(0, 0)$, $(4, 4)$, $(2, -2)$. La somma dei loro moduli è data da:

$6 + 2 + 4 + 4 + 2 + 2 = 20$. Risposta: **20**.

10.- Calcola: $\left(\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}} \right)^4$.

Poniamo: $x = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$, $y = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}}$. Segue che: $x = \sqrt{6 + x}$, $y = \sqrt{30 + y}$.

Poichè x e y sono positivi, risulta: $x^2 - x - 6 = 0$ e quindi $x = 3$; $y^2 - y - 30 = 0$ e quindi $y = 6$.

Infine: $(x + y)^4 = 9^4 = 6561$. Risposta: **6561**.

11. In quanti modi si possono scegliere tre palline di gelato (non necessariamente di gusti distinti), avendo a disposizione 6 gusti?

Consideriamo tre asterischi * corrispondenti ai gusti scelti e cinque barre, che determinano i sei spazi in cui si possono inserire gli *. Se, ad esempio, si scelgono 3 palline del primo gusto, si ottiene ***|, se si scelgono 3 palline dei primi 3 gusti si ottiene *|*|*, dove l'assenza di * tra le barre indica che il gusto corrispondente non è stato scelto. Evidentemente gli anagrammi di ***| sono in corrispondenza biunivoca con la scelta dei gusti di gelato, così il numero di scelte è

$$\frac{(5 + 3)!}{5! 3!} = 56$$

Risposta **56**.

12.- Quanti sono gli anagrammi di CARIATIDE in cui non compaiono vocali uguali in posizioni consecutive? Rispondere con le ultime 4 cifre del risultato.

Applicando il principio di inclusione-esclusione si ottiene che gli anagrammi richiesti sono

$$\frac{9!}{2! \cdot 2!} - \frac{8!}{2!} - \frac{8!}{2!} + 7! = 18 \cdot 7! - 8 \cdot 7! + 7! = 11 \cdot 7! = 55440.$$

In particolare:

- il primo termine rappresenta la totalità degli anagrammi
- il secondo e terzo termine rappresentano gli anagrammi che contengono 2 A consecutive e quelli che contengono 2 I consecutive (entrambi si possono pensare ottenuti anagrammando

la parola di 8 lettere in cui abbiamo cancellato una A od una I, per poi ripeterla raddoppiata nella parola anagrammata finale)

- il quarto termine rappresenta gli anagrammi che contengono sia la doppia A che la doppia I (come prima si possono pensare ottenuti anagrammando “CARITDE” e raddoppiando A e I alla fine).

La risposta è **5440**.

13.- Dati i numeri reali qualsiasi x, y, z , determina il minimo valore della parte intera della somma

$$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 + 9 - 2xy} + \sqrt{y^2 + 74 - 10y} + \sqrt{4z^2 + 8z + 20}$$

La quantità può essere riscritta come:

$$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(y - x)^2 + 9} + \sqrt{(5 - y)^2 + 49} + \sqrt{4z^2 + 8z + 20}.$$

I primi tre addendi esprimono la distanza tra i punti $(0,0)$, $(x,2)$, $(y,5)$, $(5,12)$, minima se si scelgono x e y in modo che siano tutti allineati sul segmento che congiunge l'origine a $(5,12)$: in questo caso la distanza è 13. La seconda parte si può fare derivando (o cercando il vertice della parabola): il minimo è per $z = -1$ e si ottiene $\sqrt{16}$. Il minimo è pertanto **17**.

14.- Quando l'espressione $\frac{n}{520-n}$ è il quadrato di un intero m ? Fornisci la somma dei valori assoluti di tutti i possibili valori di m .

Osserviamo che:

$$\frac{n}{520-n} = m^2 \Leftrightarrow n = \frac{520m^2}{m^2 + 1}$$

Essendo m^2 e $m^2 + 1$ coprimi, si ottengono valori interi di n precisamente per m tale che $m^2 + 1$ divide $520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$, condizione soddisfatta per $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 8$.

La risposta è quindi **38**.

15.- Qual è la somma dei reciproci dei divisori positivi di 2028? Indicare come risposta la somma tra il numeratore e il denominatore della frazione corrispondente, ridotta ai minimi termini.

Essendo $2028 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13^2$, ogni divisore 2028 corrisponde ad un addendo dello sviluppo di:

$$(1 + 2 + 2^2) \cdot (1 + 3) \cdot (1 + 13 + 13^2)$$

La risposta è quindi

$$\frac{5124}{2028} = \frac{427}{169}$$

e la somma richiesta è **596**.

16.- Determina la somma dei quadrati delle soluzioni intere di $a^3 - b^3 = 217$.

Scrivendo

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 217 = 7 \cdot 31$$

Osserviamo che $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab$. Inoltre $a^2 + ab + b^2 > a - b$.

I casi che producono soluzioni sono:

- $a - b = 1, a^2 + ab + b^2 = 1 + 3ab = 217$, ovvero $1 + 3b(b + 1) = 217$ da cui le soluzioni (a, b) date da $(9, 8)$ e $(-8, -9)$.
- $a - b = 7, a^2 + ab + b^2 = 31$, ovvero $49 + 3b(b + 7) = 31$, da cui le soluzioni $(6, -1)$ e $(1, -6)$.

Risposta **364**

17.- Nel problema 1, qual è la probabilità p che il numero più grande tra i cinque usciti sia maggiore di 9 e dispari? Dai come risposta la somma del denominatore e del numeratore di p espressa come frazione ridotta ai minimi termini.

Dal conteggio dei casi possibili fornito nella prima soluzione del problema 1, il numero richiesto è dato da

$$\frac{\binom{10}{4} + \binom{12}{4} + \binom{14}{4}}{\binom{16}{5}} = \frac{1706}{4368} = \frac{853}{2184}.$$

Risposta **3037**

18.- Detto $p(x, y) = (x + y)(x^2 + y^2) \cdot \dots \cdot (x^{1024} + y^{1024})$, qual è il valore di

$$\frac{p(1, 2) + p(2, 3) + p(3, 4) + \dots + p(2025, 2026)}{p(1, 2026)}?$$

Si ha

$$(y - x)p(x, y) = y^{2048} - x^{2048},$$

pertanto, mediante somme telescopiche, si ha

$$p(1, 2) + p(2, 3) + p(3, 4) + \dots + p(2025, 2026) = 2026^{2048} - 1.$$

D'altra parte, sempre per l'osservazione iniziale, si ottiene l'espressione

$$p(1, 2026) = \frac{2026^{2048} - 1}{2025}. \text{ Il valore dell'espressione è quindi } \mathbf{2025}.$$

19.- Considerato l'insieme dei numeri naturali da 1 a 2026 (estremi inclusi), calcolare il prodotto di ogni sottoinsieme con due o più elementi dei numeri assegnati, e sommare tutti i prodotti ottenuti. Quali sono le ultime 4 cifre del risultato?

Per calcolare la somma richiesta risulta conveniente considerare il polinomio monico

$$p(x) = (x + 1)(x + 2) \cdot \dots \cdot (x + 2026).$$

Vista la forma di $p(x)$, $p(1) = 2027!$, che è anche la somma dei coefficienti di $p(x)$.

Questo valore rappresenta anche la somma richiesta, una volta tolto il coefficiente di x^{2026} e il coefficiente di x^{2025} , che è $1+2+\dots+2026=2026 \cdot 2027/2$. Il risultato si ottiene quindi come

$$2027! - 1 - \frac{2026 \cdot 2027}{2} = -2053352 \equiv -3352 \equiv 6648 \pmod{10000},$$

essendo $2027!$ è evidentemente divisibile per 10^4 . Risposta **6648**.

20.- Sia ABC un triangolo acutangolo di altezze AL, BJ, CK . Sapendo che $\angle KJB = 24^\circ$, $\angle JBC = 35^\circ$, qual è l'ampiezza di $\angle K\hat{L}J$?

L'ortocentro di un triangolo acutangolo è l'incentro del suo triangolo ortico (il triangolo avente i piedi delle altezze come vertici). Si può osservare notando che $\angle AB\hat{J} = \angle AC\hat{K} = 90^\circ - \angle B\hat{A}C$. Essendo i quadrilateri $BKHL$ e $CJHL$ ciclici, se ne deduce che $\angle K\hat{L}H = \angle H\hat{L}J$, quindi LA è bisettrice di $\angle K\hat{L}J$. Si ottiene un risultato analogo per JB, KC . Dalla ciclicità di $BKHL$ si deduce anche che $\angle H\hat{K}L = 35^\circ$. Si ha quindi $\angle L\hat{K}J = 2\angle H\hat{K}L = 70^\circ$, $\angle K\hat{J}L = 48^\circ$, quindi $\angle K\hat{L}J = 62^\circ$. Risposta **62**.

