

QUESITO n 6

Scrivere una funzione polinomiale f in modo tale che la retta di equazione $y = 2x + 3$ sia tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 e si abbia $\int_0^3 f(x)dx = 9$.

(Soluzione di Sandro Campigotto)

Soluzione

Abbiamo 3 condizioni:

$$f(0) = 3$$

$$f'(0) = 2$$

e la condizione data sull'integrale.

Cerchiamo la più semplice tra le funzioni polinomiali che risolve il problema: $y = ax^2 + bx + c$.

La prima condizione ci dice che $c = 3$.

$$f'(x) = 2ax + b \text{ e quindi } b = 2.$$

Ora ci basta calcolare $\int_0^3 (ax^2 + 2x + c)dx = \left[a \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_0^3 = 9a + 18$ da cui otteniamo

$$9a + 18 = 9 \text{ cioè } a = -1$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

N.B.

Possiamo trovare infinite funzioni polinomiali di grado superiore che verificano le stesse tre condizioni assegnate.

Ad esempio $f(x) = kx^3 - \left(1 + \frac{9}{4}k\right)x^2 + 2x + 3$ per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$.