QUESITO n 3

L'opera di Boccioni "*Forme uniche della continuità dello spazio*" del 1913, riportata sulla moneta da 20 centesimi, descrive un uomo che avanza velocemente nello spazio. Una parte del profilo evidenziato in figura, in un opportuno sistema di riferimento, può essere approssimato dalla funzione

$$f(x)=\begin{cases}-4x^2-8x & \text{se } -1\le x\le 0\\ 1+\tan\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right) & \text{se } 0<x\le 2\end{cases}$$

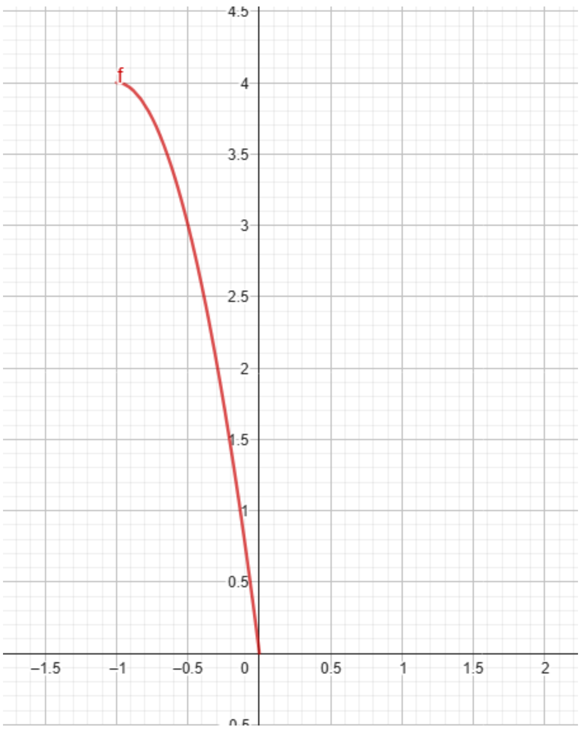
Tracciare il grafico, dopo aver analizzato la continuità e la derivabilità nell'intervallo $[-1;2]$.

(Soluzione di Sandro Campigotto)

Soluzione

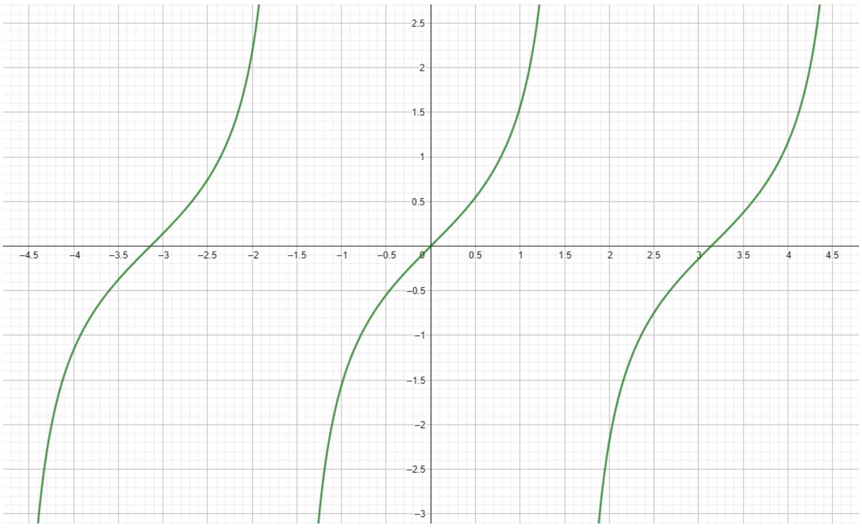
Analizziamo una parte alla volta.

$y=-4x^2-8x=-4x(x+2)$ per $-1\le x\le 0$ è un arco di parabola che proprio in $x=-1$ ha il suo vertice, visto che attraversa l'asse delle ascisse in $(0;0)$ e in $(-2;0)$. Il vertice ha coordinate $(-1;4)$



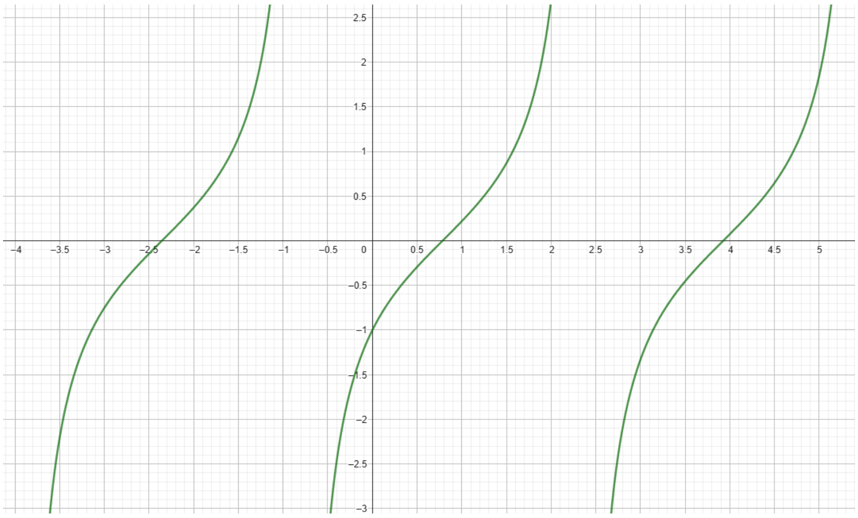
$f(x) = 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$ se $0 < x \leq 2$

Possiamo ottenere la parte di curva interessata procedendo con delle trasformazioni geometriche a partire dalla nota curva $y = \tan x$



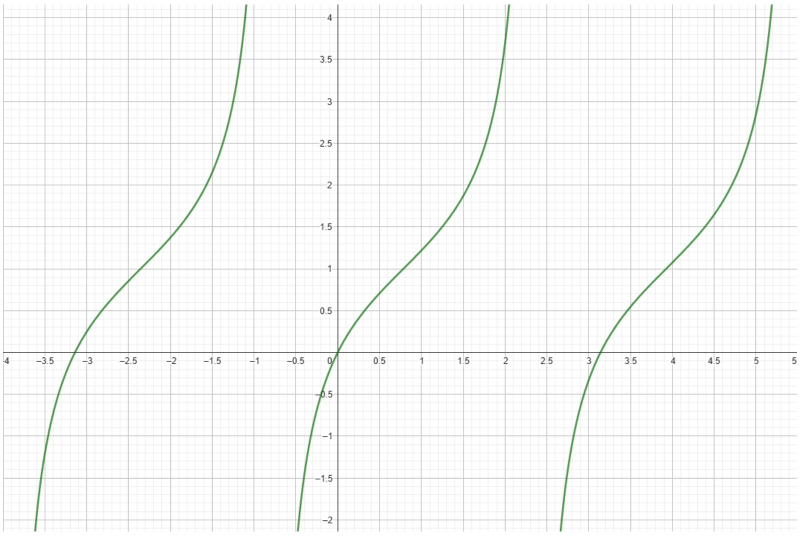
ed operando due traslazioni:

la prima sull'asse delle x: $\tau_x\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ cioè $x \to x + \frac{3}{4}\pi$ che ci porta alla funzione $y = \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$



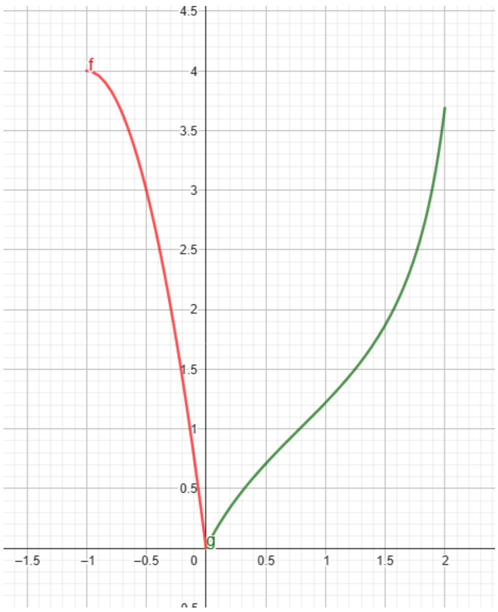
Ed una traslazione sull'asse delle y: $\tau_y(1)$ cioè cioè $y \to y - 1$ che ci porta alla funzione

$y - 1 = \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$ e dunque a $y = \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) + 1$



Osserviamo che $f(0)=0$ e $f(2)=\tan\left(2+\frac{3}{4}\pi\right)+1 \cong 3,69$

Riportando la funzione assegnata abbiamo:



La funzione risulta essere continua in 0, infatti
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

La funzione non è derivabile in 0.

Infatti: $f'(x)=\begin{cases} -8x-8 & \text{se } -1<x<0 \\ \dfrac{1}{\cos^2\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)} & \text{se } 0<x<2 \end{cases}$

e $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -8$, ma $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi\right)} = 2$

$x=0$ è un punto angoloso.