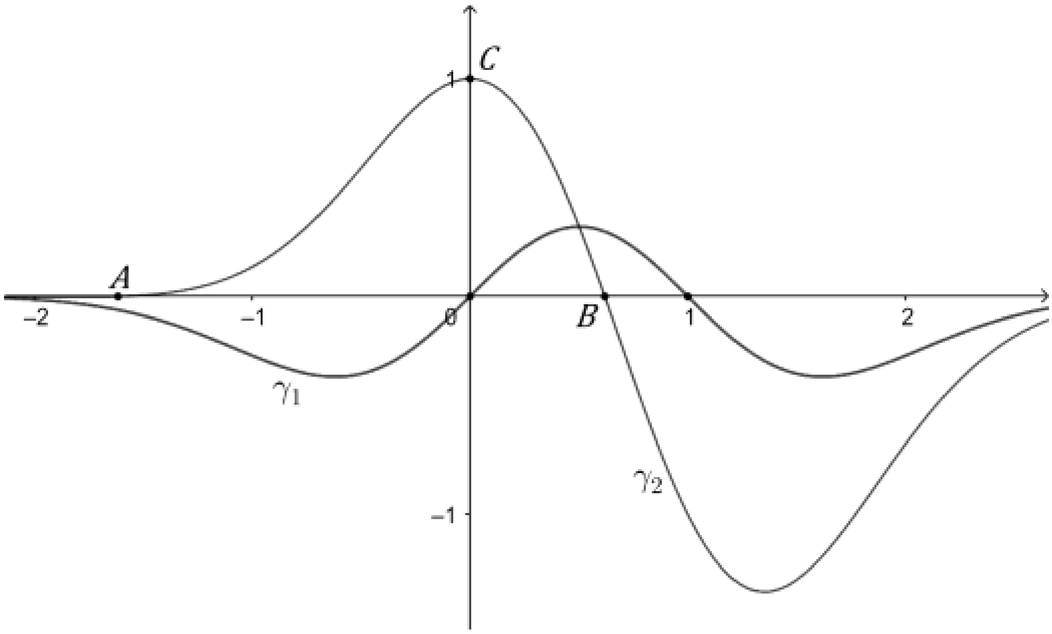
PROBLEMA 2

(Soluzione di Sandro Campigotto)



I grafici γ_1 e γ_2 rappresentano, rispettivamente, le funzioni f e g, definite su $\mathbb{R}$, le cui espressioni analitiche sono

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}, \qquad g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$$

con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di secondo grado.

a) Determinare i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ utilizzando le informazioni deducibili dai grafici in figura, considerando che $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è ascissa di un punto stazionario di f e che $-\varphi$, ascissa del punto A, è uno zero di g.

Determiniamo, prima di tutto, l'equazione di $f(x)$.
Dal grafico vediamo che passa per $(0;0)$ e per $(1;0)$ e il testo ci assicura che $f'(\varphi) = 0$
Per verificare le prime due condizioni, siccome $e^{p(x)}$ è sempre positivo, dovrà essere
$f(x) = a(x^2 - x)e^{a(x^2-x)}$. Calcoliamo la derivata e applichiamo la terza condizione:

$$f'(x) = a\left((2x-1)e^{a(x^2-x)} + a(x^2-x)(2x-1)e^{a(x^2-x)}\right) = a(2x-1)e^{a(x^2-x)}\left(ax^2 - ax + 1\right)$$

Solo il polinomio nell'ultima parentesi può annullarsi per $x = \varphi$ e quindi $a\varphi^2 - a\varphi + 1 = 0$.
Potremmo fare semplicemente i calcoli, ma ricordando la proprietà della sezione Aurea $\varphi^2 = \varphi + 1$, abbiamo $a(\varphi+1) - a\varphi + 1 = 0$ e quindi $a = -1$

Abbiamo trovato $p(x) = -x^2 + x$ e $f(x) = (-x^2 + x)e^{-x^2+x}$

Cerchiamo ora di determinare l'equazione di $g(x)$.
Dal grafico osserviamo che $g(x)$ passa per $A(-\varphi;0)$, $C(0;1)$ e che $g'(0)=0$.
Sia $g(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x^2+x}$
$\to C \Rightarrow g(0)=c=1$
$g'(x)=(2ax+b)e^{-x^2+x}+(ax^2+bx+1)(-2x+1)e^{-x^2+x}=e^{-x^2+x}\left((2ax+b)+(ax^2+bx+1)(-2x+1)\right)$
$g'(0)=b+1=0$ da cui otteniamo $b=-1$
Sostituendo nel polinomio $q(x)$ si deve avere
$q(-\varphi)=a\varphi^2-(-\varphi)+1=0$. Utilizzando ancora la proprietà della sezione aurea per non fare conti inutili, otteniamo $a(\varphi+1)+\varphi+1=0$ da cui otteniamo fattorizzando $(a+1)(\varphi+1)=0$ e quindi $a=-1$
$q(x)=-x^2-x+1$ e $g(x)=(-x^2-x+1)e^{-x^2+x}$

b) Posto che $p(x) = x - x^2$, studiare la funzione f specificando l'equazione dell'asintoto, le ascisse dei punti stazionari e di flesso. Verificare che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per γ_1. Determinare l'insieme immagine di f e indicare, al variare del parametro reale k, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Studiamo la funzione $f(x)=(-x^2+x)e^{-x^2+x}$.

Essa ha dominio tutto $\mathbb{R}$, interseca gli assi cartesiani nei punti $(0;0)$ e $(1;0)$

Il segno è lo stesso del polinomio $p(x)=-x^2+x$:

	0		1	
$-$	|	$+$	|	$-$

Calcoliamo i limiti (che si potrebbero anche determinare dal grafico assegnato):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x^2+x)e^{-x^2+x} \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x}{e^{x^2-x}} = 0$$ per confronto di infiniti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^2+x)e^{-x^2+x} \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x}{e^{x^2-x}} = 0$$ per confronto di infiniti.

La funzione ha un asintoto orizzontale $y=0$.

Studiamo la derivata prima. Sfruttiamo il calcolo già effettuato al punto 1)

$$f'(x)=(2x-1)\left(x^2-x-1\right)e^{-x^2+x}=0$$

L'equazione ha tre soluzioni: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$
$+$	|	$-$	|	$-$	|	$+$
$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$
$\searrow$	|	$\nearrow$	|	$\searrow$	|	$\nearrow$

Abbiamo trovato due minimi relativi e un massimo:

$$M_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt[4]{e}}{4}\right)\quad m_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};-\frac{1}{e}\right)\ \text{e}\ m_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};-\frac{1}{e}\right)$$

Avventuriamoci ora alla ricerca dei punti di flesso. Ci aspettiamo di trovarne almeno quattro.

$$f''(x)=2\left(x^2-x-1\right)e^{-x^2+x}+(2x-1)\left(2x-1\right)e^{-x^2+x}-(2x-1)^2\left(x^2-x-1\right)e^{-x^2+x}=$$
$$\left[-4x^4+8x^3+5x^2-9x\right]e^{-x^2+x}=-x(x-1)(4x^2-4x-9)e^{-x^2+x}$$

Da cui otteniamo i quattro punti di flesso: $x_1=0$; $x_2=1$ $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{10}}{2}$

Operiamo ora una traslazione di vettore $\vec{v}\left(-\frac{1}{2};0\right)$ sostituendo $x\to x+\frac{1}{2}$:

$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left[-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\left(-x^2+\frac{1}{4}\right)e^{-x^2+\frac{1}{4}}$ che risulta essere una funzione pari. La simmetria è così provata.

L'insieme immagine di f sono tutti i valori $y\in\left[-\frac{1}{e};\frac{\sqrt[4]{e}}{4}\right]$ in particolare il sistema $\begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$ che rappresenta le intersezioni di un fascio di rette parallele all'asse delle ascisse con la funzione $f(x)$ ha soluzioni:

$k=-\frac{1}{e}$, due soluzioni

$-\frac{1}{e}<k<0$, quattro soluzioni

$k=0$, due soluzioni

$0<k<\frac{\sqrt[4]{e}}{4}$, due soluzioni

$k=\frac{\sqrt[4]{e}}{4}$, una soluzione.

Nessuna soluzione per tutti gli altri valori.

c) Stabilito altresì che $q(x) = 1 - x - x^2$, verificare che $\frac{1}{\varphi}$ è l'ulteriore zero di g e che il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno un unico punto di intersezione, del quale si chiedono le coordinate. Considerati su γ_1 e γ_2, rispettivamente, i punti P_1 e P_2 aventi uguale ascissa $x \geq \frac{1}{2}$, calcolare la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2.

Verifichiamo che $g\left(\frac{1}{\varphi}\right) = 0$:

$$g\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \left(-\left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 - \left(\frac{1}{\varphi}\right) + 1\right)e^{[\ldots]} = \left(-\frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi} + 1\right)e^{[\ldots]} = \left(\frac{-1-\varphi+\varphi^2}{\varphi^2}\right)e^{[\ldots]} = \left(\frac{-1-\varphi+\varphi+1}{\varphi^2}\right)e^{[\ldots]} = 0$$

Verifichiamo che il triangolo ABC è rettangolo:

Abbiamo $A\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2};0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};0\right)$ e $C(0;1)$ (dove abbiamo calcolato le coordinate di B risolvendo l'equazione $q(x) = 0$)

Osserviamo che $AO = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; $BO = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $CO = 1$.

Siccome $AO \cdot BO = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{4}{4} = 1 = CO^2$, per il 2° Teorema di Euclide possiamo affermare che il triangolo ABC è rettangolo.

Intersechiamo le due funzioni per determinare tutti i punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = p(x)e^{p(x)} \\ y = q(x)e^{p(x)} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = p(x)e^{p(x)} \\ p(x)\cancel{e^{p(x)}} = q(x)\cancel{e^{p(x)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = p(x)e^{p(x)} \\ x - x^2 = 1 - x - x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{\sqrt[4]{e}}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le due curve hanno un solo punto di intersezione.

Sia ora $P_1\left(k; p(k)e^{p(k)}\right) \in \gamma_1$ e $P_2\left(k; q(k)e^{p(k)}\right) \in \gamma_2$ con $k \geq \frac{1}{2}$;

$$P_1P_2(k) = \left(p(k) - q(k)\right)e^{p(k)} = \left(k - k^2 - 1 + k + k^2\right)e^{k-k^2} = (2k-1)e^{k-k^2}.$$

Calcoliamo la derivata e cerchiamo dove la derivata si annulla:

$$P_1P_2\,'(k) = 2e^{k-k^2} - (2k-1)^2 e^{k-k^2} = e^{k-k^2}\left(2 - (2k-1)^2\right)$$

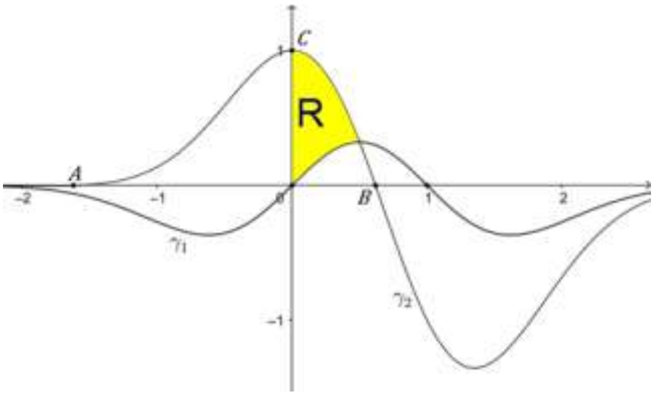
Che si annulla per $2 - (2k-1)^2 = 0$ cioè quando $(2k-1)^2 = 2$ e quindi $2k - 1 = \pm\sqrt{2}$ e quindi $k = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ di cui solo $k = \frac{1+\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$.

Lo studio del segno ci conferma di aver trovato il punto di massimo:

$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$		
|	$+$	|	$-$	
	$\nearrow$	|	$\searrow$	

$$P_1P_2\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}}$$

d) Calcolare l'area della regione limitata R compresa tra γ_1, γ_2 e l'asse delle ordinate. Individuare, successivamente, il valore di $t \geq \frac{1}{2}$ affinché la retta $x = t$ delimiti con i due grafici una regione R' equivalente ad R.



L'area cercata la possiamo calcolare

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - p(x))e^{p(x)}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)e^{x-x^2}dx = \left[e^{x-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{e} - 1$$

Per determinare R' risolviamo l'equazione

$$\int_{\frac{1}{2}}^{t} (p(x) - g(x))e^{p(x)}dx = \sqrt[4]{e} - 1$$

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{t} (1-2x)e^{x-x^2}dx = \sqrt[4]{e} - 1$$

$$-\left[e^{x-x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{t} = \sqrt[4]{e} - 1$$

$$-e^{t-t^2} + \cancel{\sqrt[4]{e}} = \cancel{\sqrt[4]{e}} - e^0$$

$$t - t^2 = 0$$

Da cui segue l'unica soluzione accettabile $t = 1$.