

PROBLEMA 1

(Soluzione di Sandro Campigotto)

Dati $r > 0$ e $k < 0$, si considerino la circonferenza C_r , di centro l'origine e raggio r , e la funzione $f_k(x) = k|x|$.

- a) Verificare che f_k è continua ma non derivabile in $x = 0$ qualunque sia il valore di k . Individuare i due valori di r in corrispondenza dei quali C_r delimita con il grafico di f_k , per opportuni valori di k , un settore circolare nel semipiano $y \leq 0$ di area π e contorno di lunghezza $4 + \pi$. Stabilito che $r = 2$ è il maggiore di tali valori, in uno stesso riferimento cartesiano Oxy , tracciare la circonferenza C_2 e il grafico della funzione f_{-1} .

Scriviamo la funzione sfruttando la definizione di valore assoluto:

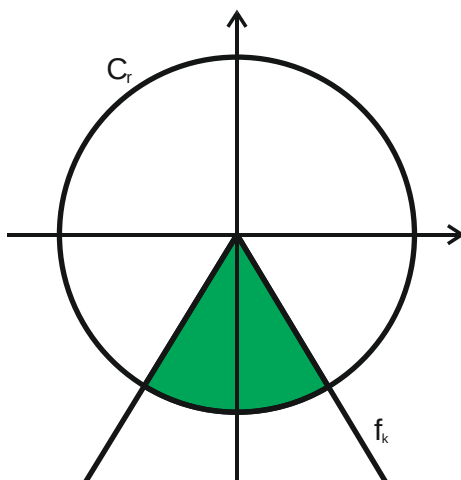
$$f_k(x) = k|x| = \begin{cases} kx & \text{se } x \geq 0 \\ -kx & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_k(x) = 0$, la funzione è continua in $x = 0$;

$$f'_k(x) = \begin{cases} k & \text{se } x > 0 \\ -k & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'_k(x) = -k$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_k(x) = k$ ed essendo $k \neq 0$, la funzione non è derivabile in $x = 0$ presentando un punto angoloso.

$$C_r: x^2 + y^2 = r^2$$



Sia α l'angolo espresso in radianti del settore circolare che si forma intersecando C_r con f_k .

L'area del settore circolare e la lunghezza dell'arco di circonferenza sono proporzionali all'angolo α : $A_{Settore} : A_{Cerchio} = \alpha : 2\pi$ e $l_{Arco} : l_{Circonferenza} = \alpha : 2\pi$

abbiamo cioè $A_{Settore} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{2\pi} = \frac{r^2 \alpha}{2}$ e $2p_{Settore} = 2r + l_{arco} = 2r + \frac{2\pi r \cdot \alpha}{2\pi} = 2r + r\alpha$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{r^2 \alpha}{2} = \pi \\ 2r + r\alpha = 4 + \pi \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{r^2} \\ 2r + r \frac{2\pi}{r^2} = 4 + \pi \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{r^2} \\ 2r^2 - (4 + \pi)r + 2\pi = 0 \end{cases}$$

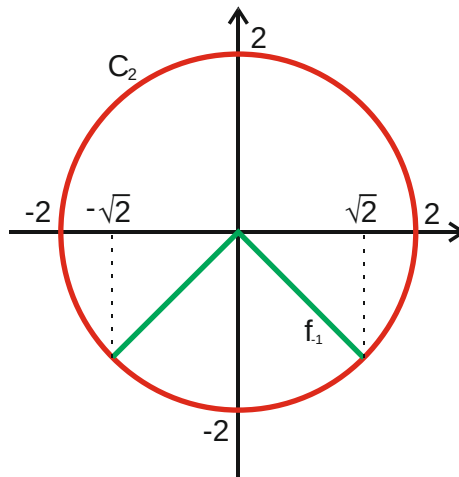
$$\begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{r^2} \\ r_{1,2} = \frac{4 + \pi \pm \sqrt{(4 + \pi)^2 - 16\pi}}{4} = \frac{4 + \pi \pm (4 - \pi)}{4} \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow r_1 = 2 \\ \searrow r_2 = \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

Le due soluzioni sono:

$$\begin{cases} r_1 = 2 \\ \alpha_1 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \end{cases} \text{ e } \begin{cases} r_2 = \frac{\pi}{2} \\ \alpha_2 = \frac{8}{\pi} \cong 146^\circ \end{cases}$$

Osserviamo che $r_1 = 2 > r_2$ come indicato nella traccia del problema.

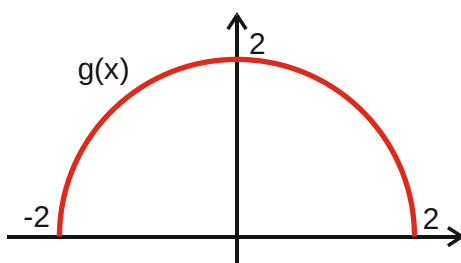
Rappresentiamo quanto richiesto su un sistema di assi cartesiani:



- b) Studiare la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, specificandone dominio, simmetrie, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia ed insieme immagine. Verificare che il grafico di g coincide con la parte di C_2 che si trova nel semipiano $y \geq 0$. Spiegare perché g non è invertibile nel suo dominio ed esplicitare l'intervallo $[a; b]$ di ampiezza massima, con $b > 0$, nel quale g ammette una funzione inversa h . Qual è l'espressione analitica di h ?

Siccome C_2 ha equazione $x^2 + y^2 = 4$, isolando la y abbiamo che $y^2 = 4 - x^2$ e per $y \geq 0$ C_2 e $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ coincidono.

Sapendo questo, la rappresentazione grafica e tutte le richieste del problema sono facilmente ricavabili dal grafico.



La funzione $g(x)$ ha dominio $[-2; 2]$, è pari, non è derivabile nei punti $x = \pm 2$ (tangente verticale), è crescente in $[-2; 0]$ e decrescente in $[0; 2]$. L'insieme immagine di $g(x)$ è $[0; 2]$.

$g(x)$ non è invertibile in quanto non è iniettiva sul suo dominio. Possiamo renderla invertibile su $[0; 2]$.

Limitandosi a $g(x): [0; 2] \rightarrow [0; 2]$ ($x \geq 0$ e $y \geq 0$) la funzione risulta invertibile con inversa:

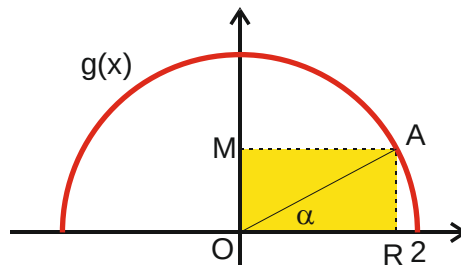
$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 = 4 - y^2$$

$$x = \sqrt{4 - y^2}$$

$h(x) = g^{-1}(x): [0; 2] \rightarrow [0; 2]$ ha espressione analitica $h(x) = g^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

- c) Sia A un punto del grafico di g , situato nel I quadrante, e siano M e R le sue proiezioni ortogonali sugli assi del riferimento. Determinare le coordinate di A in modo che il quadrilatero $AMOR$ abbia area massima. Dopo aver verificato che tale quadrilatero è un quadrato, dimostrare che è anche quello di perimetro massimo.



Sia $A(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$ con $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ il punto di $g(x)$

$$A_{AMOR}(\alpha) = 4\sin\alpha \cos\alpha = 2\sin 2\alpha$$

Calcoliamo la derivata

$$A'_{AMOR}(\alpha) = 4\cos 2\alpha \text{ che si annulla per}$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ e quindi } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ dove l'area ha il suo massimo.}$$

L'angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ corrisponde al quadrato.

$$2p_{AMOR}(\alpha) = 2\sin\alpha + 2\cos\alpha = 2(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Procediamo allo stesso modo derivando e cercando dove la derivata si annulla

$$2p'_{AMOR}(\alpha) = 2(\cos\alpha - \sin\alpha) \text{ che si annulla proprio quando } \cos\alpha = \sin\alpha \text{ e cioè quando } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Anche in questo caso il quadrilatero $AMOR$ è il quadrato.

- d) Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4-t^2} dt$, con $x \in [-2; 2]$. Determinare $F(2)$ e tracciare un grafico di F , dopo averne studiato monotonia e concavità. Scrivere, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso.

Calcoliamo (anche se potremmo farne a meno)

$F(2) = \int_{-2}^2 \sqrt{4-t^2} dt$. Eseguiamo la sostituzione $t = 2\sin x$ che ha $dt = 2\cos x$:

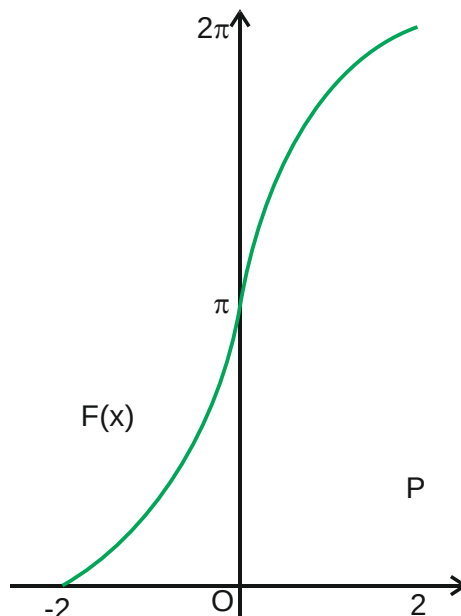
$$F(2) = \int_{-2}^2 \sqrt{4-t^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 x} \cdot 2\cos x dx = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \left[4 \frac{x + \cos x \sin x}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[2(x + \cos x \sin x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi$$

$F(2)$ rappresenta, infatti, l'area del semicerchio di centro l'origine e raggio 2.

Il grafico può essere tracciato senza determinare l'espressione analitica della funzione $F(x)$ in quanto sappiamo che $F(-2) = 0$, $F(2) = 2\pi$ e quindi $F(0) = \pi$. La funzione è sempre crescente sul suo dominio $[-2; 2]$.

Il flesso è presto determinato in quanto $F''(x) = g'(x)$ che vale 0 nel solo punto $x = 0$ con segno

0		
+		-
∪		∩



La tangente nel flesso è $y - \pi = F'(0)x$ ma siccome $F'(x) = g(x)$ $F'(0) = 2$.

L'equazione richiesta è $y = 2x + \pi$.