

# Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale  $x$  è il più grande intero minore od uguale ad  $x$ .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\sqrt{3} = 1,7321$$

$$\sqrt{5} = 2,2361$$

$$\pi = 3,1416.$$

Siamo fieri di essere in grado di presentare materiale che non si è avuto il coraggio di mandare in onda durante lo **Speciale SCIENZA!** di **MISTERIUS** di ottobre 2013 sulla regina delle scienze.

È nostro dovere avvisare le persone di animo delicato prima che voltino pagina: potrebbero restare scioccate da quel che leggeranno!

Ma, prima di tutto, una domanda a cui noi tutti vorremmo poter dare risposta: se Galileo Galilei ha veramente inventato il telescopio, allora perché ha dato il suo nome a una coppa?

«Cari amici, bentornati a **MISTERIUS!**... **MISTERIUS**, il programma che va dove abita la verità, suona il campanello e poi scappa!»<sup>(1)</sup>

Nella puntata **Speciale SCIENZA!** di ottobre 2013 abbiamo parlato di

**Jean-Pierre Bagolot:** (1887-2001), matematico dalle infinite sfaccettature, famoso per la scoperta del numero frazzo  $\mathfrak{z}$

**Henry Gordon Leveraine:** (1934- ), astrofisico che raggiunse fama planetaria per le sue teorie sull'universo

**Albert Laughton:** (1958- ), matematico, grande esperto del cosiddetto "problema della Grande Enciclopedia delle Scienze".

---

<sup>(1)</sup> Leo Ortolani, *Comics&Science*, pp. 32+iv, Istituto per le Applicazioni del Calcolo "Mauro Picone"-Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma, ottobre 2013.

7 marzo 2014

## Gara a Squadre – Testi dei problemi

### 1. L'inspiegabile caso del turista (punti 20)

A **MISTERIUS** raccontiamo eventi che restano senza spiegazione. Un turista, originario del paese che usa il *ctrome* come unità di misura per le lunghezze e il *loki* come unità di misura per il peso, si reca in un paese dove misurano le lunghezze in *cmotre* e i pesi in *koli*. Il turista sa che 15 *ctrome* corrispondono a 7 *cmotre*, mentre 40 *loki* sono 3 *koli*. Sa anche che 14 *cm* corrispondono a 3 *ctrome*, mentre 2 *kg* sono 9 *koli*. Incredibilmente, alla frontiera, il turista dichiara di saper calcolare il peso in *loki* di 20 *cmotre*<sup>3</sup> di acqua. Ma che peso calcola il turista in *loki*? [Ricordare che 1 *dm*<sup>3</sup> di acqua pesa 1 *kg*.]

### 2. A differenza di Dio, l'uomo gioca a dadi (punti 20)

Noi di **MISTERIUS** facciamo sempre domande che sono fondamentali per l'uomo. Ad esempio: Qual è la probabilità che, tirando un dado a sei facce sei volte, vengano sei risultati diversi?

Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ottenuta dopo aver semplificato tutti i fattori comuni.

### 3. Il frazzo 9 (punti 20)

**MISTERIUS** ha scoperto che l'infinito è di casa in matematica, infatti nei dipartimenti di matematica ci sono spesso così tante persone che si devono usare metodi per induzione per farle uscire tutte. Tentando metodi più raffinati di quelli per induzione per approssimare il numero frazzo 9, Bagolot considerò la possibilità di ottenere una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  con le seguenti regole:

- $f(1) = 1$
- se  $n = 2m$ , allora  $f(n) = 4f(m) + 6$
- se  $n = m + 2$ , allora  $f(n) = f(m) + 12(m + 1)$

Quanto vale  $f(6)$ ?

### 4. Nel *Nachlass* di Bagolot (punti 20)

Dopo la sua morte, tra le carte di Bagolot, è stato trovato un foglio con due righe di numeri: sulla riga superiore sono scritti i numeri interi da 1 a 50; sotto a ciascun numero, sulla riga inferiore, la parte intera della sua radice quadrata. Bagolot aveva valutato la somma dei numeri presenti nella riga superiore e se ne era appuntato il valore che aveva scoperto essere 1275. Invece sui suoi appunti manca la somma dei numeri presenti sulla riga inferiore: è chiaro che voleva calcolarla, ma si è trovato davanti ad un calcolo molto più difficile del previsto. Qual è la somma dei numeri sulla riga inferiore?

### 5. Il problema del pasticcere (punti 25)

Noi di **MISTERIUS** aiutiamo ad affrontare le domande della vita quotidiana. Ad esempio, prendiamo un pasticcere che sforna una torta quadrata di 50 *cm* di lato, alta 5 *cm* e ne vuole ricavare quattro tortine cubiche (di lato 5 *cm*). Allora, con quattro formine identiche a base quadrata, estrae le quattro tortine dalla torta facendo attenzione a tenere ciascuna formina ben separata dalle altre e lontana dal bordo della torta. Se vuole ricoprire tutta la superficie di quel che rimane della torta (anche la base inferiore) di glassa al cioccolato, noi gli diciamo che superficie deve ricoprire. Ma quanti *cm*<sup>2</sup> misura tutta la superficie da ricoprire di glassa?

## 6. Il riscaldamento di Bagolot (punti 25)

Noi di **MISTERIUS** siamo in grado di descrivervi un esercizio di riscaldamento numerico che Bagolot eseguiva prima di affrontare le sue difficili prove matematiche: elencare su un foglio tutti e soli i numeri  $n$  interi positivi minori di 10'000'000 e divisibili per 6 che si scrivono usando soltanto le cifre 0 e 1. Certo scriveva tanti numeri: ma quanti sono?

## 7. Il piccolo Bagolot (punti 25)

Come Gauss, anche Bagolot dimostrò le sue capacità matematiche fin da bambino. Si racconta che Bagolot, mentre svolgeva un compito in classe sulle frazioni, si accorse che sul suo foglio un esercizio era stato scritto male: si leggeva a malapena

$$1400/1600/7/3/2014$$

ma non si capiva quali fossero le linee di frazione “più importanti”. Bagolot intuì che, ad esempio,  $3/2/4$  poteva essere letto come  $\frac{3}{\frac{2}{4}}$ , oppure come  $\frac{\frac{3}{2}}{4}$ , ottenendo due numeri razionali diversi. Coraggiosamente, Bagolot affrontò senza indugi il problema calcolando tutti i possibili numeri razionali. Determinare il massimo risultato minore di 9999 trovato da Bagolot.

## 8. Impossibile! (punti 25)

Noi di **MISTERIUS** abbiamo anche il coraggio di presentare problemi impossibili per l'uomo. Ad esempio, qual è il perimetro più grande (misurato in metri) che può avere un triangolo rettangolo con lati che, misurati in metri, hanno lunghezze intere, sapendo che uno di essi misura 25 m?

## 9. Inimmaginabile! (punti 25)

Noi di **MISTERIUS** abbiamo anche il coraggio di presentare problemi inimmaginabili. Ad esempio, quanti sono gli interi positivi di cinque cifre tali che il prodotto delle loro cifre sia 2000?

## 10. L'Ultimo Teorema di Bagolot (punti 30)

Il famoso Ultimo Teorema di Bagolot è il seguente: considerato un triangolo rettangolo di cateti 30 e 16 inscritto in una circonferenza di raggio  $R$ , e circoscritto ad una circonferenza di raggio  $r$ , è impossibile determinare  $R + r$ . Dimostrare che l'Ultimo Teorema di Bagolot è falso calcolando il valore di  $R + r$ .

## 11. La pizza Margherita (punti 30)

Noi di **MISTERIUS** abbiamo scoperto che i matematici sono persone come gli altri: dormono, camminano, mangiano come tutti. **MISTERIUS** è addirittura andato dove “mangiano i matematici”: in una pizzeria vicino al dipartimento. **MISTERIUS** ha scoperto che l'anno scorso la pizza Margherita costava 4€. Quest'anno il prezzo è aumentato di 50 centesimi, ma c'è una novità: ogni volta che si acquista una pizza Margherita, si fa marcare un timbro su una tesserina, e con dieci timbri si ha diritto ad una Margherita “omaggio”!

I cambiamenti stanno sconvolgendo, oltre alla vita dei matematici che mangiano pizza Margherita, anche quella delle ragazze alla cassa: ce ne sono due nuove, Alice e Elena. Alice è un po' sbadata, e anche quando si paga con i dieci timbri invece che con il denaro, segna un timbro su una nuova tesserina. Elena aspetta, per dare una tesserina nuova col primo timbro, che si paghi la successiva Margherita.

Noi di **MISTERIUS** ci chiediamo (e sappiamo che molti tra i telespettatori si chiederanno con noi) se è maggiore la differenza tra il prezzo totale di 2014 pizze pagate sempre ad Elena e 2014 pizze pagate sempre ad Alice, o la differenza tra 2014 pizze pagate sempre ad Alice e 2014 pizze pagate l'anno scorso. Quanto vale la differenza maggiore?

**12. Probabilità al bar****(punti 40)**

**MISTERIUS** è riuscita a recuperare il video della famosa partita a dadi tra Bagolot e Enrico Fermi al bar a Gottinga nel 1923. Come si vede nel video, Bagolot e Fermi hanno tre dadi: uno con 4 facce, numerate da 1 a 4; un altro con 6 facce, numerate da 1 a 6; l'ultimo dado con 8 facce, numerate da 1 a 8. Bagolot sfida Fermi al seguente azzardo: Fermi tira tutti i dadi una volta; a quel punto Bagolot ne getta via uno; Fermi tira i due dadi rimasti una seconda volta. Si sommano tutti i punti ottenuti (con il primo lancio di tre dadi ed il secondo con i due rimasti): se la somma è 15, Fermi vince 100 marchi da Bagolot; altrimenti Bagolot ne vince 10 da Fermi. Si vede che Fermi tira una volta tutti e tre i dadi insieme, ottenendo 8 come somma delle facce. Purtroppo il video termina di colpo; si sa che, a quel punto, avvenne qualcosa di strabiliante: Bagolot valutò perfettamente le sue probabilità di vincere i 10 marchi a seconda del dado che avrebbe gettato. Qual era la sua migliore probabilità di vincere i 10 marchi? [Scrivere come soluzione le prime 4 cifre dopo la virgola del risultato.]

**13. Leveraine idrofobo****(punti 40)**

Noi di **MISTERIUS** abbiamo scoperto che i matematici sono stravaganti. Ad esempio, Leveraine aveva una piscina rotonda di diametro 20 m; quando venne colpito da idrofobia, fece ridurre la superficie d'acqua facendo inserire nella piscina un'isola a forma di triangolo equilatero con i tre vertici che toccavano il bordo della piscina. L'idrofobia di Leveraine raggiunse livelli acuti e lui fece sovrapporre alla prima isola un'altra quadrata, sempre con i vertici che toccavano i bordi della piscina e con un lato parallelo ad uno dei lati del triangolo. La superficie d'acqua visibile rimasta non spaventava più Leveraine. Quanti m<sup>2</sup> misurava l'area dell'acqua visibile?

**14. La Congettura di Bagolot****(punti 40)**

Nei suoi approfondimenti sul numero frazzo  $\mathfrak{z}$ , Bagolot si convinse che, se  $\mathfrak{z}$  esisteva, era una cifra  $F$  che verificava la seguente proprietà:

$$0, \overline{9F5} = \frac{n}{810} \text{ per un opportuno numero intero } n.$$

Bagolot dimostrò che, se esiste, tale cifra  $F$  è unica, ma a tutt'oggi, non si sa se la proprietà—ormai nota come Congettura di Bagolot—sia verificata da qualche cifra  $F$  (e da qualche  $n$ ). Se si risolve la CB, si risponda scrivendo prima  $F$ , seguito delle tre cifre di  $n$ .

**15. Irrisolubile!****(punti 40)**

Noi di **MISTERIUS** abbiamo scoperto un problema che la matematica non sa risolvere. Questa scatola che vedete inquadrata, a forma di parallelepipedo rettangolo, ha tre facce le cui aree sono, rispettivamente, di 429 m<sup>2</sup>, 364 m<sup>2</sup> e 231 m<sup>2</sup>. Ma quanto vale il suo volume in m<sup>3</sup>?

**16. La Grande Enciclopedia delle Scienze****(punti 40)**

Nei suoi studi sulla Grande Enciclopedia delle Scienze, Laughton si rese conto che la difficoltà di reperire informazioni all'interno della GES dipendeva anche dalle caratteristiche del numero della pagina da trovare. Per questo introdusse la definizione di numero confuso: un numero intero positivo  $n$  si dice *confuso* se esiste un numero intero (positivo)  $k$  tale che il numero  $n \times k$  è  $n$  letto da destra a sinistra. Ma quanti sono i numeri confusi di esattamente 4 cifre?



**17. Leveraine a Legdo****(punti 40)**

Noi di **MISTERIUS** abbiamo scoperto che i matematici sono abili trasformisti. Abbiamo le prove che, per fare esperimenti di logica, Leveraine visitò l'isola di Legdo, che era famosa perché ciascun isolano mente sempre oppure dice sempre il vero; per poter far agevolmente domande, vi si recò travestito da ufficiale giudiziario. Leveraine convocò tutti gli isolani sulla piazza. Li numerò, uno a uno, da 1 a 2014; poi impose che ciascuno di loro, seguendo l'ordine numerico che aveva appena assegnato, dicesse qualcosa riguardo a uno degli altri.

Purtroppo il primo parlò a voce così bassa che Leveraine non capì quel che disse; dal secondo in poi, ogni isolano contraddistinto da un numero pari minore di 2014 asserì che quello subito dopo di lui avrebbe mentito, mentre ogni isolano contraddistinto da un numero dispari  $n$  disse che l'isolano contraddistinto dal numero  $n - 2$  aveva mentito; l'ultimo, contraddistinto dal numero 2014, disse che l'isolano contraddistinto dal numero 2013 mentiva. Ciò nonostante, Leveraine determinò il numero di isolani che mentivano. Noi di **MISTERIUS** chiediamo: ma che numero aveva calcolato?

**18. Il passatempo di Bagolot****(punti 50)**

Il passatempo preferito di Bagolot consisteva nel prendere un foglio di carta e tagliarlo in modo da ottenere un rettangolo con un lato lungo  $\frac{4}{7}$  dell'altro. Tracciava poi sul rettangolo ottenuto due linee  $AB$  e  $CD$  parallele al lato lungo (con  $A$  e  $C$  sullo stesso lato), marcava quattro punti  $Q_1, Q_2, Q_3$  e  $Q_4$  su  $AB$ , tre punti  $R_1, R_2$  e  $R_3$  su  $CD$ , poi segnava i punti medi  $M$  di  $AC$  e  $N$  di  $BD$ . Fatto questo prendeva le forbici e tagliava il foglio lungo la spezzata  $MQ_1R_1Q_2R_2Q_3R_3Q_4N$ . Terminato di tagliare il foglio, calcolava le due aree ottenute.

Un giorno trovò che aveva tagliato due aree uguali. Incredulo, misurò alcune lunghezze per poter ripetere il passatempo con lo stesso risultato: le misure erano  $AB = 14$  cm,  $AM = 2$  cm,  $AQ_1 = 1$  cm,  $AQ_2 = 5$  cm,  $AQ_3 = 9$  cm e  $AQ_4 = 13$  cm, poi  $CR_1 = 3$  cm,  $CR_2 = 7$  cm e  $CR_3 = 11$  cm. Ma Bagolot dimenticò di misurare la distanza di  $M$  dai vertici del lato su cui era segnato e questo gli impedì di ripetere i tagli. I valori di quelle due distanze sono da allora noti come le "distanze di Bagolot". Quanti decimillimetri è lunga la minore delle due distanze di Bagolot?

**19. I pesi delle torri****(punti 50)**

Noi di **MISTERIUS** abbiamo scoperto che molti matematici giocano a scacchi, ma lo fanno soltanto per poter usare le scacchiere per i loro scopi. Ad esempio, ricordiamo il concetto di disposizione torrica introdotta da Laughton sulle scacchiere  $6 \times 6$ . Una *disposizione torrica* consiste delle posizioni di sei torri del gioco degli scacchi sulla scacchiera in modo che non si "mangino" (ricordate che una torre si muove sulla riga o sulla colonna su cui si trova in partenza di quante caselle si vuole). Laughton tentò di associare un peso numerico ad ogni disposizione torrica: presa una scacchiera  $6 \times 6$  si scrivono in ordine i numeri 0, 1, 2, 0, 1, 2 nella prima riga, nella seconda riga i numeri 1, 2, 0, 1, 2, 0, nella terza riga i numeri 2, 0, 1, 2, 0, 1, nella quarta i numeri 0, 1, 2, 0, 1, 2, nella quinta riga i numeri 1, 2, 0, 1, 2, 0, nella sesta riga i numeri 2, 0, 1, 2, 0, 1 (sarà un caso, ma sulla prima colonna si leggono i numeri 0, 1, 2, 0, 1, 2 nello stesso ordine di quelli sulla prima riga: mah, queste coincidenze fanno pensare che i matematici facciano tutto senza riflettere). Il *peso* della disposizione è il prodotto dei sei numeri che sono coperti dalle sei torri della disposizione torrica. Noi di **MISTERIUS** vogliamo sapere: quanto vale la somma dei pesi di tutte le disposizioni torriche possibili?

**20. L'Ipotesi di Bagolot****(punti 50)**

Nei suoi studi aritmetici, Bagolot considerò operazioni numeriche diverse da quelle canoniche. Ad esempio, la famosa Ipotesi di Bagolot riguarda l'operazione di contorno di un numero: Bagolot definì il *contorno additivo* di  $n$  come la somma delle cifre di  $n$  e il *contorno moltiplicativo* di  $n$  come il prodotto delle cifre di  $n$ . Introdusse poi il *contorno (generale)*  $c(n)$  di  $n$  come la somma del contorno additivo di  $n$  e del contorno moltiplicativo di  $n$ : ad esempio,  $c(3) = 6$  e  $c(13) = 7$ . L'IB è la seguente: per ogni numero intero positivo  $n$  minore di 100 il numero 11 compare nella successione

$$n, c(n), c(c(n)), c(c(c(n))), \dots, \overbrace{c(\dots(c(n))\dots)}^{k \text{ volte}}, \dots$$

I colleghi matematici dubitarono della IB perché—dichiararono—ci sono troppi controesempi; ma si sa: i matematici sono sempre invidiosi. Del resto, quanti poi sono i controesempi all'IB?

**21. Il primo problema del milionario****(punti 60)**

**MISTERIUS** ha fatto una scoperta incredibile che non possiamo tenere nascosta! I matematici risolvono problemi per diventare milionari: il Clay Mathematics Institute addirittura offre un milione di dollari per la soluzione di alcuni problemi di nessun interesse. Anche **MISTERIUS** vuole proporre problemi che fanno diventare milionari. Il primo è il seguente: Qualunque numero può essere rappresentato usando una scrittura *elementare*, che utilizza cioè il numero '1', i segni di operazione '+', '×' e le parentesi '(' e ')'. Ad esempio 12 ha una scrittura elementare come  $(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1)$ , mentre  $11 + 1$  non è una scrittura elementare di 12. Quanti numeri '1', come minimo, bisogna utilizzare per ottenere una scrittura elementare di 466?

**22. Il secondo problema del milionario****(punti 60)**

Il secondo problema per diventare milionari è il seguente:

Quanto fa la somma dei numeri interi positivi minori di 100 che si possono scrivere in almeno due modi distinti come differenza di quadrati di numeri interi positivi?

**23. Il terzo problema del milionario****(punti 70)**

Il terzo problema per diventare milionari è il seguente:

Si considera una scacchiera quadrata di lato 9 dm (ve l'avevamo detto che i matematici giocano a scacchi!). Su uno dei quattro vertici della scacchiera, si trova una formica. La scacchiera è divisa in 81 caselle quadrate, ciascuna di lato 1 dm, per un totale di 100 vertici. Sulla scacchiera si trovano 4 pioli, in corrispondenza di altrettanti vertici (tra i 100 possibili). La formica si muove in linea retta verso il piolo più vicino. Arrivata a questo, si dirige verso il piolo più vicino tra quelli ancora non visitati, sempre in linea retta; nel caso in cui due pioli si trovino alla stessa distanza, sceglie a caso uno dei due pioli. Procede così fino a giungere all'ultimo piolo. Sapendo che i pioli sono posizionati in modo che sia massimo il percorso che la formica può compiere in questo modo, quanti millimetri è lungo il percorso che essa ha compiuto?

**24. Il quarto problema del milionario****(punti 70)**

Il quarto problema per diventare milionari è il seguente:

Si consideri il polinomio  $2x^3 - 11x^2 + 4x + 6$  e siano  $a, b, c$  le sue radici. Sia poi

$$D_k := (a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b))^k$$

e sia  $k_1$  il più piccolo valore intero positivo di  $k$  tale che la prima cifra da sinistra di  $D_k$  sia 7, e  $k_2$  il più piccolo valore intero positivo di  $k$  tale che la prima cifra da sinistra di  $D_k$  sia 9. Calcolare  $k_1 \times k_2$ .

# Soluzioni per la Coppa Galileo 2014

*Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:*

*Matteo Bobbio, Luca De Stefano, Mattia Fecit, Simone Gardella, Fulvio Gasparini, Alessandro Logar, Stefano Mereta, Francesco Morandin, Alessandro Murchio, Matteo Musso, Milo Orlich, Maurizio Paolini, Ludovico Pernazza, Edi Rosset, Valentina Trapani.*

**MISTERIUS** sa di aver fatto una domanda scomoda: «Esistono numeri più importanti di altri?»<sup>(1)</sup> Siamo convinti che, oltre al fondamentale 653424318 di cui abbiamo già parlato, ce ne siano altri 24 molto importanti. Li elenchiamo nel seguito con molte parole intorno che tanti troveranno inutili. Sembra incredibile, ma sono tutti numeri minori di 10'000. Sarà un caso?

**Soluzione del problema 1.** Dai dati del problema si ha che le conversioni tra ctrome, centimetri e cmotre e tra loki, chili e koli sono le seguenti:

| ctrome | cm | cmotre | loki | kg  | koli |
|--------|----|--------|------|-----|------|
| 15     | 70 | 7      | 40   | 2/3 | 3    |
| 3      | 14 | 7/5    | 120  | 2   | 9    |

da cui si ottiene che 1 cmotre sono 10 cm, quindi 1 cmotre<sup>3</sup> corrisponde a 1 dm<sup>3</sup>, quindi 20 cmotre<sup>3</sup> sono 1200 loki.

La risposta è 1200.

**Soluzione del problema 2.**  $\frac{6!}{6^6} = \frac{5}{3^2 \cdot 6^2} = \frac{5}{324}$

La risposta è 0329.

**Soluzione del problema 3.**  $f(6) = f(2 \cdot 3) = 4(f(1 + 2)) + 6 = 4(f(1) + 12 \cdot 2) + 6 = 106$ .

La risposta è 0106.

**Soluzione del problema 4.**  $[\sqrt{1}] = 1$  e  $[\sqrt{n}]$  aumenta di 1 in corrispondenza dei quadrati perfetti, cioè ogni numero  $1 \leq k \leq 6$  compare tante volte quanto  $2k + 1$  e 7 compare 2 volte. Quindi la somma delle parti intere è  $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 13 + 7 \cdot 2 = 2\frac{6(6+1)(2 \cdot 6+1)}{6} + \frac{6(6+1)}{2} + 7 \cdot 2 = 217$ .

La risposta è 0217.

**Soluzione del problema 5.** Un taglio eseguito da una formina aumenta la superficie del parallelepipedo di 50 cm<sup>2</sup>. L'area è  $2 \times 50^2 + 4 \times 5 \times 50 + 4 \times 50 = 6200$ .

La risposta è 6200.

**Soluzione del problema 6.** I numeri  $n$  sono al massimo di 7 cifre; poiché è divisibile per 6 deve essere pari, quindi l'ultima cifra deve essere 0. Essendo inoltre divisibile per 3, la somma delle sue cifre deve essere divisibile per 3, quindi deve essere 3 o 6. Se la somma è 6, il numero contiene una cifra 0 ed è 1111110; altrimenti, il numero contiene 4 cifre 0 di cui una alla fine: le combinazioni possibili sono  $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ . Quindi esistono  $20 + 1 = 21$  numeri  $n$  che soddisfano le tre proprietà.

La risposta è 0021.

**Soluzione del problema 7.** La risposta è  $\frac{1400 \cdot 7 \cdot 2014}{1600 \cdot 3} = 4111$ . Basta vedere che 1600 resta sempre al denominatore della "frazione finale", ma da solo è troppo poco: fa superare 9999. Ci sono tre modi per aggiungere solo il 3 al denominatore, quanto basta per stare sotto a 9999.

La risposta è 4111.

---

<sup>(1)</sup> Leo Ortolani, Comics&Science, pp. 32+iv, Istituto per le Applicazioni del Calcolo "Mauro Picone"-Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma, ottobre 2013.

**Soluzione del problema 8.** Vista l'imposizione sulla lunghezza del lato, per massimizzare il perimetro deve essere il cateto minore lungo 25 m. Si cercano dunque due numeri naturali  $a$  e  $b$ —necessariamente diversi, diciamo  $a > b$ —tali che  $25^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  tali che la somma  $a+b$  sia massima, di conseguenza tali che  $a-b$  sia minima. Dato che, per ogni  $n$  naturale,  $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ , basta porre  $a+b = 2n+1 = 625$ , cioè  $a+b+25 = 650$ . La risposta è 0650.

**Soluzione del problema 9.** Dato che  $2000 = 5^3 \cdot 2^4$ , delle cinque cifre tre dovranno essere 5, le altre due tali che il loro prodotto sia 16, quindi 2 e 8 oppure 4 e 4. Nel caso 5, 5, 5, 2, 8 ci sono  $\frac{5!}{3!} = 20$  combinazioni. Nel caso 5, 5, 5, 4, 4 ci sono  $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$  combinazioni. La risposta è 0030.

**Soluzione del problema 10.** Poiché il triangolo è rettangolo, l'ipotenusa corrisponde al diametro del cerchio esterno. Quindi  $2 \cdot R = \sqrt{16^2 + 30^2}$  da cui  $R = 17$ . L'area del triangolo è  $\frac{16 \cdot 30}{2} = 240$ . Vedendo il triangolo diviso in tre triangoli di altezza  $r$  e base ciascuno dei lati si trova che  $\frac{16 \cdot r + 30 \cdot r + 34 \cdot r}{2} = \frac{80 \cdot r}{2} = 240$  da cui  $r = 6$ . Quindi  $R+r = 23$ . La risposta è 0023.

**Soluzione del problema 11.** Si tratta di contare: 2014 pizze l'anno scorso si sarebbero pagate 8056€. Quest'anno, con Alice si paga 10 volte per le prime 11 pizze, e poi solo 9 volte ogni 10; dato che  $2014 = 11 + 200 \cdot 10 + 3$ , quindi in totale si pagano  $(10 + 200 \times 9 + 3) \times 4.50\text{€} = 8158.50\text{€}$ . Con Elena si pagano 10 pizze ogni 11;  $2014 = 183 \cdot 11 + 1$ , e quindi in totale  $(183 \cdot 10 + 1) \times 4.50\text{€} = 8239.50\text{€}$ . La risposta è 0102.

**Soluzione del problema 12.** Fermi deve ottenere 7. Dato che ogni risultato sul dado con minor numero di facce c'è un unico risultato sull'altro dado, le probabilità di vittoria sono  $1/6$  con la coppia di dadi a 4 facce e a 6 facce,  $1/8$  negli altri due casi con il dado a 8 facce. La probabilità peggiore per Fermi è  $\frac{1}{8}$ ; quella migliore per Bagolot è  $\frac{7}{8} = 0.875$ . La risposta è 8750.

**Soluzione del problema 13.** Sia  $r = 10$  m. Il lato del triangolo è  $r\sqrt{3}$ ; il lato del quadrato è  $r\sqrt{2}$ . La parte di triangolo equilatero che rimane scoperta dal quadrato consiste delle aree di due triangoli equilateri: uno ha altezza  $r - \frac{r\sqrt{2}}{2} = r\frac{2-\sqrt{2}}{2}$  e area  $r^2 \frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{12}$ ; l'altro ha lato  $r\sqrt{3} - r\sqrt{2} = r(\sqrt{3} - \sqrt{2})$  e area  $r^2 \frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{4}$ . L'area cercata è

$$r^2 \left( \pi - 2 - \frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{12} - \frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{4} \right) = r^2 \left( \pi - 2 - \frac{7}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right) \approx 104.8 \text{ m}^2$$

La risposta è 0104.

**Soluzione del problema 14.**  $0.\overline{9F5} = \frac{9F5}{999}$ . Quindi  $\frac{n}{810} = \frac{9F5}{999}$ , cioè  $37 \cdot n = 30 \cdot (9F5)$ . Perciò  $37|9F5$ : i multipli di 37 compresi tra 900 e 1000 sono 925 e 962 (e 999), così  $F = 2$  e  $n = \frac{30 \cdot 925}{37} = 750$ . La risposta è 2750.

**Soluzione del problema 15.** Siano  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  le superfici delle tre facce e siano  $a$ ,  $b$ ,  $c$  le tre dimensioni del solido. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che  $a \cdot b = X$ ,  $b \cdot c = Y$  e  $a \cdot c = Z$ . Il volume del solido è dato dalla formula  $V = a \cdot b \cdot c$ . Notiamo che  $a \cdot b \cdot c = \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = \sqrt{(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c)} = \sqrt{X \cdot Y \cdot Z}$ . Quindi, il volume del solido cercato è la radice quadrata del prodotto delle superfici delle tre aree:  $X = 429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$ ,  $Y = 364 = 4 \cdot 7 \cdot 13$ ,  $Z = 231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$ .  
 $\sqrt{X \cdot Y \cdot Z} = \sqrt{(3 \cdot 11 \cdot 13) \cdot (4 \cdot 7 \cdot 13) \cdot (3 \cdot 7 \cdot 11)} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 6006$ .

La risposta è 6006.

**Soluzione del problema 16.**  $k > 9$  non fornisce numeri confusi, perché il prodotto  $n \cdot k$  aumenta il numero di cifre, rendendo il problema senza soluzioni. Per questa ragione per  $k = 5, 6, 7, 8, 9$  la prima cifra di  $n$  deve essere 1, l'ultima cifra moltiplicata per  $k$  deve essere uguale alla prima. Questo esclude subito soluzioni dai casi  $k = 5, 6, 7, 8$ .

Nel caso  $k = 9$  si ha che il numero è del tipo  $1xy9$ , ed è multiplo di 9, perché deve esserlo se letto al contrario. Quindi è 1089, perché per  $x$  più grandi il prodotto  $n \cdot k$  aumenterebbe il numero di cifre.

Nel caso  $k = 4$  con la stessa argomentazione la prima cifra deve essere 1 o 2, ma il numero letto al contrario è multiplo di 4, quindi non può essere 1. Allora la prima cifra è 2 e l'ultima è  $2 \cdot 4$ , e il numero diventa del tipo  $2xy8$ , e deve valere  $2xy8 \cdot 4 = 8yx2$  da cui  $4 \cdot (10x + y) + 8 = 10y + 2$ . Così  $39x + 8 = 6y$  e  $13x + 2 = 2y$ . Quindi  $x = 1, y = 7$  e il numero è 2178.

Nel caso  $k = 3$  la prima cifra deve essere 1, 2, 3, e l'ultima corrispondentemente 7, 4, 1, da cui  $1xy7 \cdot 3 = 7yx1$ , oppure  $2xy4 \cdot 3 = 4yx2$ , oppure  $3xy1 \cdot 3 = 1yx3$ . dal confronto delle cifre delle migliaia si deduce che sono tutti e tre casi assurdi.

Nel caso  $k = 2$  la prima cifra deve essere pari e minore di 5, cioè 2 o 4, e l'ultima corrispondentemente 1, 6 o 2, 7 da cui  $2xy1 \cdot 2 = 1yx2$  oppure  $2xy6 \cdot 2 = 6yx2$  oppure  $4xy2 \cdot 2 = 2yx4$  oppure  $4xy7 \cdot 2 = 7yx4$ . Dal confronto delle cifre delle migliaia si deduce che sono tutti e quattro casi assurdi.

Nel caso  $k = 1$  i numeri che soddisfano la proprietà richiesta sono quelli palindromi, ovvero del tipo  $xyyx$ ,  $x = 1, 2, \dots, 9$ ,  $y = 0, 1, \dots, 9$  che sono 90.

Il totale dei numeri confusi è quindi  $90 + 2$ .

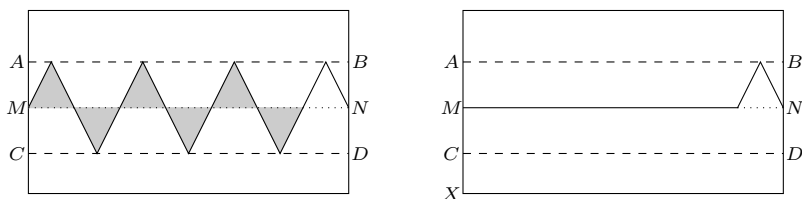
La risposta è 0092.

**Soluzione del problema 17.** Le due affermazioni ripetute indicano che, per isolani con numero  $2a + 1$ ,  $2a + 2$  e  $2a + 3$  (con  $0 \leq a < 1005$ ), la natura di  $2a + 3$  è diversa sia da quella di  $2a + 1$  che da quella di  $2a + 2$  (che perciò coincidono):

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $2a + 1$ | $2a + 2$ | $2a + 3$ | $2a + 1$ | $2a + 2$ | $2a + 3$ |
| sincero  | sincero  | bugiardo | bugiardo | bugiardo | sincero  |

Dato che non si sa nulla del primo, i casi possibili sono due, ma la natura del primo determina quella di tutti gli isolani fino al 2103-esimo che, riguardo al dire la verità, si alternano a gruppi di due. La natura del 2013-esimo è diversa da quella dall'ultimo. Perciò i bugiardi sono 1007. La risposta è 1007.

**Soluzione del problema 18.** I triangoli dello stesso colore in figura sono congruenti



Quindi il problema diventa quello di trovare a che altezza tracciare la spezzata della seconda figura in modo che il rettangolo sia diviso in due parti di area uguale. Il triangolo ha area  $\alpha = 2 \text{ cm}^2$ . Sia  $b = 14 \text{ cm}$ ,  $\ell = \frac{4}{7}14 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ ; quindi la distanza  $h = MX$  deve essere tale che  $b \cdot h + \alpha = b(\ell - h) - \alpha$ , cioè  $h = \frac{\ell}{2} - \frac{\alpha}{b} = 4 \text{ cm} - \frac{2}{14} \text{ cm} \approx 3.857 \text{ cm}$ . La risposta è 0385.

**Soluzione del problema 19.** È sufficiente calcolare i numeri torrici non nulli, cioè quelli originati da disposizioni in cui nessuna torre occupa una casella 0. Lavoriamo sulle prime 3 righe e sia  $c = (c_1, c_2, c_3)$  la terna dei numeri delle caselle occupate nella prima, seconda e terza riga rispettivamente. Distinguiamo 4 casi in cui si ha la scelta di un 2 sulla prima riga ( $c_1 = 2$ ).

$c = (2, 2, 2)$ . Tale caso si ottiene in  $2^3 = 8$  modi (scelto in 2 modi un 2 nella prima riga, si può scegliere in 2 modi un 2 nella seconda riga, e ancora in 2 modi un 2 nella terza riga). A questo punto sulla quarta riga si può scegliere: a) un 2 in un solo modo e allora si ha la scelta obbligata di 2 nelle ultime due righe in un solo modo; si hanno 8 numeri torrici uguali a  $2^6$ ; b) un 1 in un solo modo e allora si ha la scelta obbligata di 1 nelle ultime due righe in un solo modo; si hanno 8 numeri torrici uguali a  $2^3 1^3$ . Quindi in totale da questo caso si ha  $8 \cdot 2^6 + 8 \cdot 2^3 1^3$ .

$c = (2, 2, 1)$ . Tale caso si ottiene in  $2^2 = 4$  modi (scelto in 2 modi un 2 nella prima riga, si può scegliere in 2 modi un 2 nella seconda riga, e in un solo modo un 1 nella terza riga). A questo punto sulla quarta riga si può scegliere: a) un 2 in un solo modo ma allora nella quinta riga si deve scegliere 0, e lo scartiamo; b) un 1 in due modi e allora si ha la scelta obbligata di 1 nella quinta e 2 nella sesta in un solo modo; si hanno 8 numeri torrici uguali a  $2^3 1^3$ . Quindi da questo caso si ha  $8 \cdot 2^3 1^3$ .

$c = (2, 1, 2)$ . Tale caso si ottiene in  $2^2 = 4$  modi (scelto in 2 modi un 2 nella prima riga, si può scegliere in 1 modo un 1 nella seconda riga, e in 2 modi un 2 nella terza riga). A questo punto si ha la seguente scelta obbligata: nella quarta riga di 1 in un modo, nella quinta di 2 in 2 modi e nella sesta di 1 in un solo modo; si hanno 8 numeri torrici uguali a  $2^3 1^3$ . Quindi da questo caso si ha  $8 \cdot 2^3 1^3$ .

$c = (2, 1, 1)$ . Tale caso si ottiene in  $2^2 = 4$  modi (scelto in 2 modi un 2 nella prima riga, si può scegliere in 1 modo un 1 nella seconda riga, e in 2 modi un 1 nella terza riga). A questo punto si ha la seguente scelta obbligata: nella quarta riga di 1 in un 2 modi, nella quinta di 2 in 1 modo e nella sesta di 2 in un modo; si hanno 8 numeri torrici uguali a  $2^3 1^3$ . Quindi da questo caso si ha  $8 \cdot 2^3 1^3$ .

Per simmetria, i casi in cui  $c_1 = 1$ , danno questi risultati:

$c = (1, 1, 1)$ :  $8 \cdot 1^6 + 8 \cdot 2^3 1^3$ .

$c = (1, 1, 2)$ :  $8 \cdot 2^3 1^3$ .

$c = (1, 2, 1)$ :  $8 \cdot 2^3 1^3$ .

$c = (1, 2, 2)$ :  $8 \cdot 2^3 1^3$ .

In totale si ha  $8 \cdot 2^6 + 8 \cdot 1^6 + 8 \cdot 8 \cdot 2^3 1^3 = 1.032$ .

La risposta è 1032.

**Soluzione del problema 20.** Sia  $s(n)$  il contorno additivo di  $n$  e  $p(n)$  il contorno moltiplicativo, cosicché  $c(n) = s(n) + p(n)$ . Per  $n = 1$  si ottiene la seguente successione

$$1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10, 2, \dots$$

che assume tutti i valori fra 1 e 18; dunque i numeri  $n$  tali che  $1 \leq n \leq 18$  sono da escludere. Se  $n = 10 \cdot A + B$ , si ha che  $c(n) = A + B + A \cdot B$ . Si osservi che, per  $9 < n \leq 100$ , si ha che  $c(n) = A + B + A \cdot B \leq 10 \cdot A + B \leq n$ ; in particolare,

$$c(n) = n \text{ se e solo se } n = 10k - 1, k = 2, \dots, 10$$

dato che, per  $n = 10A + B$  con  $A \neq 0$ ,

$$A + B + A \cdot B = 10 \cdot A + B \Leftrightarrow A(9 - B) = 0 \Leftrightarrow B = 9.$$

Dunque, per  $n \in \{19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99\}$ , la successione è costante di valore  $n$ ; in particolare, non assume valore 11.

Sia  $S$  l'insieme degli  $n$  richiesti. Si ha che  $n \in S$  se e solo se  $c(n) \in S$ . Se  $m$  è il numero che si ottiene invertendo l'ordine delle cifre di  $n$ , allora  $c(n) = c(m)$ . Dunque anche  $91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98 \in S$ , mentre i multipli di 10 non sono in  $S$ . Controlliamo incrementalmente (colonna per colonna, dato che per questi  $c(n) < n$ ) i numeri rimanenti limitandoci al caso  $n = 10 \cdot A + B$  con  $A < B$ :

$$\begin{aligned} c(22) &= 8 \notin S \\ c(23) &= 11 \notin S & c(33) &= 15 \notin S \\ c(24) &= 14 \notin S & c(34) &= 19 \in S & c(44) &= 24 \notin S \\ c(25) &= 17 \notin S & c(35) &= 23 \notin S & c(45) &= 29 \in S \\ c(26) &= 20 \notin S & c(36) &= 27 \notin S & c(46) &= 34 \in S \\ c(27) &= 23 \notin S & c(37) &= 31 \notin S & c(47) &= 39 \in S \\ c(28) &= 26 \notin S & c(38) &= 35 \notin S & c(48) &= 44 \notin S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(55) &= 35 \notin S \\
c(56) &= 41 \notin S & c(66) &= 48 \notin S \\
c(57) &= 47 \in S & c(67) &= 55 \notin S & c(77) &= 53 \notin S \\
c(58) &= 53 \notin S & c(68) &= 62 \notin S & c(78) &= 71 \notin S & c(88) &= 80 \notin S
\end{aligned}$$

A quelli trovati vanno aggiunti i numeri con le cifre invertite: 43, 54, 64, 74, 75.

Le soluzioni in totale sono  $9 + 8 + 5 + 5 = 27$ .

La risposta è 0027.

**Soluzione del problema 21.** L'idea iniziale è quella di scomporre 466 e trovare il numero minimo di '1' che si utilizzano. La fattorizzazione migliore si trova notando che

$$\begin{aligned}
466 &= 1 + 3 \times 5 \times 31 = 1 + 3 \times 5 \times (1 + 2 \times 3 \times 5) \\
&= 1 + (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \times (1 + (1 + 1) \times \\
&\quad \times (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1)).
\end{aligned}$$

In questa scomposizione si usa solamente 20 volte il carattere '1'. In qualunque altra, si utilizza almeno 22 volte il carattere '1'.

La risposta è 0020.

**Soluzione del problema 22.** Si cercano gli elementi della coppia nucleo  $K$  della funzione

$$(m, k) \mapsto (m + k)^2 - m^2 = 2km + k^2 : \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

coristretta all'insieme  $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 100\}$ . Consideriamo le fibre della relazione al variare di  $k$ :

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{2m + 1 \mid 0 < m \leq 49\} & K_2 &= \{4m + 4 \mid 0 < m \leq 23\} \\
K_3 &= \{6m + 9 \mid 0 < m \leq 15\} & K_4 &= \{8m + 16 \mid 0 < m \leq 10\} \\
K_5 &= \{10m + 25 \mid 0 < m \leq 7\} & K_6 &= \{12m + 36 \mid 0 < m \leq 5\} \\
K_7 &= \{14m + 49 \mid 0 < m \leq 3\} & K_8 &= \{16m + 64 \mid 0 < m \leq 2\} \\
K_9 &= \{18m + 81 \mid 0 < m \leq 1\}
\end{aligned}$$

Dalle prime due si vede che tutti i numeri dispari maggiori di 1 si scrivono come differenza di quadrati positivi e tutti i numeri pari che si scrivono come differenza di quadrati sono i multipli di 4 maggiori di 4.

Perciò la somma richiesta consiste di quei numeri che si trovano in  $K_3 \cup K_5 \cup K_7 \cup K_9$  o in  $K_4 \cup K_6 \cup K_8$ , cioè gli insiemi

$$K_3 \cup \{35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 63, 77, 91, 99\}$$

e

$$K_4 \cup \{48, 60, 72, 84, 96, 80, 96\}$$

Dunque la somma è

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{15} (6m + 9) + 35 + 55 + 65 + 85 + 95 + 77 + 91 + \sum_{m=1}^{10} (8m + 16) + 60 + 84 = \\
&= 6 \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} + 9 \cdot 15 + 503 + 8 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 16 \cdot 10 + 144 \\
&= 720 + 135 + 503 + 440 + 160 + 144 = 2102
\end{aligned}$$

La risposta è 2102.

**Soluzione del problema 23.** Diciamo che la formica si trova nel vertice  $(0, 0)$ .

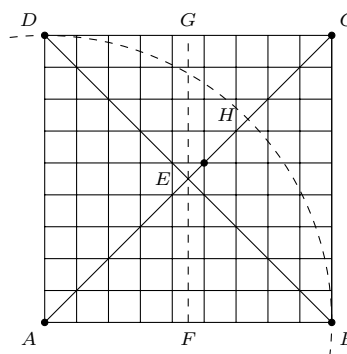
Si consideri il quadrato con il percorso che passa per i pioli  $(5, 5)$ ,  $(9, 9)$ ,  $(9, 0)$  e  $(0, 9)$ .

Per simmetria, basta considerare i casi in cui il secondo piolo si trova nel triangolo  $ACD$ .

Ogni percorso il cui secondo piolo non si trova all'interno dell'arco di circonferenza non può completarsi in modo che sia più lungo di un percorso su tre lati.

Ogni percorso il cui secondo piolo è nel trapezio  $AFED$  non può completarsi in modo che sia più lungo di quello indicato.

Si verifica poi che anche se il secondo piolo si tro-



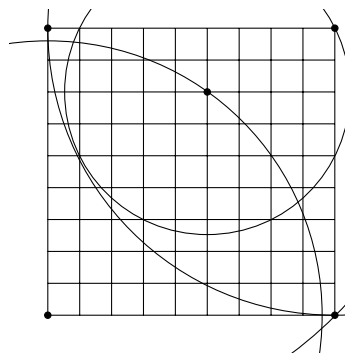
va nell'altro triangolo  $DEG$  non ci sono percorsi a completare che superano la lunghezza del percorso indicato.

Si tratta a questo punto di determinare se è possibile trovare un percorso il cui secondo piolo si trova nella parte dell'arco di circonferenza tra i segmenti  $EC$  e  $EG$ .

A questo punto si verifica che il percorso più lungo è quello che ha i pioli in  $(5, 7)$ ,  $(9, 9)$ ,  $(9, 0)$  e  $(0, 9)$  e ha lunghezza

$$100 \left( \sqrt{74} + \sqrt{20} + 9 + 9\sqrt{2} \right) \approx 3480.2383.$$

La risposta è 3480.



**Soluzione del problema 24.** Il problema è diviso in due parti, in primo luogo dobbiamo calcolare quanto vale  $a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$ .

$$\begin{aligned} a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) &= a(ab+ac) + b(ab+bc) + c(ac+bc) = \\ &= a(ab+ac+bc) + b(ab+bc+ac) + c(ac+bc+ab) - 3abc = \\ &= (ab+bc+ac)(a+b+c) - 3abc = 2 \times \frac{11}{2} - 3 \times (-3) = 20. \end{aligned}$$

Ora dobbiamo calcolare il minimo  $k$  tale che la prima cifra di  $20^k$  abbia prima cifra a sinistra 7, e lo stesso per 9. Dato che  $20^k = 10^k \times 2^k$ , basta lavorare con  $2^k$ . Osserviamo che  $2^{k+10} = 2^k \times 1024 = 2^k \times 1000 + 2^k \times 24$ . Allora se la prima cifra da sinistra di  $2^k$  è  $x$ , le prime cifre da sinistra di  $2^{k+10}$  sono  $x$  o  $x+1$ . Quindi per trovare il più piccolo con prima cifra 7, iniziamo con  $2^6 = 64$ . Indichiamo con  $a_{(4)}$  le prime 4 cifre da sinistra di  $a$  e con  $a_{(3)}$  le prime 3 cifre da sinistra di  $a$ .

$$(2^{16})_{(4)} \leq (2^6 \times 1000)_{(4)} + (2^6 \times 24)_{(3)} = 6400 + 153 = 6553.$$

$$(2^{26})_{(4)} \leq (2^{16} \times 1000)_{(4)} + ((2^{16})_{(4)} \times 24)_{(3)} = 6553 + 157 = 6710.$$

$$(2^{36})_{(4)} \leq (2^{26} \times 1000)_{(4)} + ((2^{26})_{(4)} \times 24)_{(3)} = 6710 + 161 = 6871.$$

$$(2^{46})_{(4)} \leq (2^{36} \times 1000)_{(4)} + ((2^{36})_{(4)} \times 24)_{(3)} = 6871 + 164 = 7035.$$

Gli errori commessi in ogni passaggio possono essere al massimo di un'unità. Quindi possiamo concludere che  $k_1 = 46$ . Infine, per trovare il più piccolo  $D_k$  con prima cifra 9, iniziamo con  $2^3 = 8$ .  $(2^{13})_{(4)} \leq (2^3 \times 1000)_{(4)} + (2^3 \times 24)_{(3)} = 8000 + 192 = 8192$ .

$$(2^{23})_{(4)} \leq (2^{13} \times 1000)_{(4)} + ((2^{13})_{(4)} \times 24)_{(3)} = 8192 + 196 = 8388.$$

$$(2^{33})_{(4)} \leq (2^{23} \times 1000)_{(4)} + ((2^{23})_{(4)} \times 24)_{(3)} = 8388 + 201 = 8589.$$

$$(2^{43})_{(4)} \leq (2^{33} \times 1000)_{(4)} + ((2^{33})_{(4)} \times 24)_{(3)} = 8589 + 206 = 8795.$$

$$(2^{53})_{(4)} \leq (2^{43} \times 1000)_{(4)} + ((2^{43})_{(4)} \times 24)_{(3)} = 8795 + 211 = 9006.$$

Quindi  $k_2 = 53$  e  $k_1 \times k_2 = 2438$ .

La risposta è 2438.

*Un particolare ringraziamento a Leo Ortolani*

