Soluzioni

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara. Insieme a Francesco Veneziano, ingaggiato in extremis e di grande aiuto, e a Sandro Campigotto, che ha anche avuto una parte fondamentale nell'organizzazione e gestione delle gare a squadre in modalità remota, sono stati l'aiuto principale: Giulia Gaggero, Andrea Giusto, Bruk Mohamed, Cecilia Oliveri, Luca Renzi, Silvia Sconza, Simone Traverso, Anna Ulivi. Sono tutti ex-giocatori che svolgono i loro studi universitari presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. Per le condizioni imposte gli unici mesi possibili sono gennaio (01), febbraio (02), novembre (11) e dicembre (12) e, per ciascuno di tali mesi, ogni giorno del mese verifica la condizione richiesta. Le date cercate sono $31 + 29 + 30 + 31 = 121$ in quanto anche la data 29/02/2092 è ammessa perché l'anno 2092 è bisestile.
La risposta è `0121`.

Soluzione del problema 2. La somma, alla pagina p, consiste degli addendi $\binom{i+1}{2}$ per $i \leq p$, cioè grazie alla definizione induttiva delle righe del Triangolo di Tartaglia si calcola come $\sum_{i=0}^{p} \binom{i+1}{2} = \binom{p+2}{3}$. Si verifica che $\binom{9}{3} = 84$ e $\binom{10}{3} = 120$.
La risposta è `0008`.

Soluzione del problema 3. Sia v un valore qualunque. Dunque Don Abbondio dichiara $d = \frac{5}{4}v$ perché il Monte dei Pegni offre, a detta di Don Abbondio, $\frac{4}{5}d$. Ma nell'esperienza dell'ultima volta Don Abbondio ha perso $\frac{1}{10}v$. Dunque il Monte dei Pegni ha effettivamente applicato una valutazione $ad = v - \frac{1}{10}v$. Perciò $a = \frac{4}{5}\frac{9}{10} = \frac{18}{25}$.
La risposta è `0043`.

Soluzione del problema 4. Sia b la capacità del bicchiere. La bottiglia tiene $5b$. Don Abbondio ha bevuto $\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b = \frac{5}{4}b$; nella bottiglia restano $105\,\mathrm{cl}$. Perciò $5b - \frac{5}{4}b = 105\,\mathrm{cl}$ e $b = \frac{20}{15}105\,\mathrm{cl} = 140\,\mathrm{cl}$. Così Don Abbondio ha bevuto $35\,\mathrm{cl}$.
La risposta è `0035`.

Soluzione del problema 5. Consideriamo il massimo conto di Renzo. Poiché tutti hanno speso un numero intero di euro, allora il conto di Renzo deve essere un multiplo di 9. Ordinando quattro piatti da 195 soldi l'uno, Tonio potrebbe aver speso 780 soldi che è divisibile per 3, ma non per 9. Basta quindi togliere 15 soldi per ottenere il massimo conto di Tonio, cioè 765 soldi. Allora il conto di Renzo sarà di 85 soldi.
La risposta è `1105`.

Soluzione del problema 6. Renzo ha a disposizione $N = 14$ giorni. Ogni giorno Renzo può scegliere una tra le seguenti mosse: (A) tagliare la barba; (B) non tagliare la barba. Supponiamo che Renzo opti per (A) almeno una volta; in quel giorno azzera il risultato ottenuto con le opzioni (B) precedenti. Perciò ottiene il massimo risultato, iniziando per k giorni con l'opzione (A), poi scegliendo l'opzione (B). Si deve cercare di massimizzare il risultato di una sequenza del tipo $A_k B_{N-k}$, dove si intende che i primi k giorni Renzo opterà per (A), nei restanti $N - k$ giorni opterà per (B). Così la lunghezza della barba, il giorno del matrimonio, sarà $(N - k)(3/2)^k v_0$ con $v_0 = .5\,\mathrm{mm/d}$. La derivata di una funzione interpolante è $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^x (\log_e \frac{3}{2}(N - x) - 1)$ che ha massimo per $x = 14 - \log_{\frac{3}{2}} e$. Dato che $e \approx 2.7183$ e $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$, si ha che $11 \leq x \leq 12$. Tabulando i valori per $k = 11, 12$

k	$\frac{N-k}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k$
11	$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{11} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$
12	$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

si ottiene lo stesso risultato. La lunghezza massima che può raggiungere la barba di Renzo è

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\,\mathrm{mm} = \frac{531441}{4096}\,\mathrm{mm} \approx 129.7463\,\mathrm{mm}$$

La risposta è `0129`.

Soluzione del problema 7. Si consideri un lato qualsiasi del decagono: la sua misura è la somma dei raggi delle circonferenze che hanno come centri gli estremi di quel lato. Quindi il perimetro del decagono può essere scritto in funzione dei raggi delle circonferenze come: $2{\cdot}r_1{+}4{\cdot}r_2{+}4{\cdot}r_3{+}4{\cdot}r_4{+}4{\cdot}r_5{+}2{\cdot}r_6 = 202$. Quindi $2{\cdot}r_1{+}\frac{4}{3}{\cdot}r_1{+}\frac{4}{9}{\cdot}r_1{+}\frac{4}{27}{\cdot}r_1{+}\frac{4}{81}{\cdot}r_1{+}\frac{2}{243}{\cdot}r_1 = 202$.
Risulta quindi $r_1 = \frac{243}{968}\cdot 202 \approx 50.7086\,\mathrm{m}$.
La risposta è `5070`.

Soluzione del problema 8. L'anagramma richiesto può iniziare con una consonante o con una vocale, questa stabilisce la sequenza di consonanti e vocali che seguono. Gli anagrammi di MTRMN sono $\frac{5!}{2!} = 60$ e quelli di AIOIO sono $\frac{5!}{2!2!} = 30$.
La risposta è `3600`.

Soluzione del problema 9. Sia $abcde$ il numero cercato. L'ultima cifra dovrà essere 0 se voglio che $abcde$ sia divisibile per 5 e che de sia divisibile per 2; quindi il numero deve essere della forma $abcd0$. Il fatto che ab, bc e cd debbano essere divisibil per 2, comporta che b, c e d siano pari. Poiché si sta cercando il più grande numero possibile, cominciamo considerando $a = 9$. Se $b = 8$, si ha che $c = 4$ poiché abc deve essere multiplo di 3; questo comporta che $d = 0$ oppure $d = 6$, ma 9846 non è multiplo di 4 e 400 non è multiplo di 3.
Supponiamo ora $b = 6$, allora $c = 0$ oppure $c = 6$; se $c = 6$ allora $d = 0$. Il numero 96600 soddisfa tutte le condizioni.
La risposta è `9660`.

Soluzione del problema 10. Dato $n \geq 1$ intero, si scrive

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1,$$

cioè l'n-esimo numero positivo dispari (iniziando da 3). Ci sono 24 numeri primi dispari minori di 100: il ventiquattresimo numero primo è 97, che è il 48-esimo numero dispari.
La risposta è `0048`.

Soluzione del problema 11. Gli angoli retti interessati dalla richiesta sono angoli alla circonferenza circoscritta al poligono regolare, quindi insistono su un diametro che congiunge due vertici del poligono. Tali diametri sono 10. Per contarli, si fissi un tale diametro AB, si tracci il diametro perpendicolare ad esso e si considerino i quattro vertici dell'icosagono che sono nel primo quadrante: a partire dal vertice A sul diametro, siano questi in ordine C, D, E e F. Per ciascuno di questi vertici, conteremo i triangoli rettangoli formati dalle travi con angolo retto nel vertice stesso, andando in senso antiorario a partire dal primo vertice dell'icosagono non sul diametro. Questi sono formati da due rette perpendicolari che congiungono il vertice considerato con i due vertici A e B che stanno sul diametro—ciascuna retta contiene una diagonale o un lato dell'icosagono—; l'ipotenusa del triangolo è (una parte di) un'altra diagonale che attraversa le due rette perpendicolari.
Per il primo vertice C, ci sono i triangoli generati da ciascuna delle 9 diagonali che escono dal vertice A verso un altro vertice nel semicerchio ACB: determinano l'ipotenusa di un altro triangolo—il più grande tra questi è il triangolo ACB.
Per il secondo vertice D, ci sono 8 diagonali che escono da A e 8 diagonali che escono da C; ciascuna, attraversando il semipiano ADB (che è anche il sempiano ACB), determina l'ipotenusa di un triangolo.
Per il terzo vertice E, ci sono 7 diagonali che escono da A, 7 diagonali che escono da C e 7 diagonali che escono da D; ciascuna attraversa il semipiano AEB.
Per il quarto vertice F, ci sono 6 diagonali che escono da A, 6 diagonali che escono da C, 6 diagonali che escono da D e 6 diagonali che escono da E; ciascuna attraversa il sempiano AFB.
C'è poi il vertice G a metà dell'arco ACB: sulle diagonali AG e GB si tagliano 5 ipotenuse per ogni vertice A, C, D, E e F.

In totale i triangoli determinati sono $((9+2\cdot8+3\cdot7+4\cdot6)\cdot2+5\times5)\cdot2\cdot10=3300$.
La risposta è `3300`.

Soluzione del problema 12. Si numerino i pacchetti da 1 a 6. Ogni permutazione di sei elementi si scrive come prodotto di cicli. Tali cicli possono essere di lunghezza i con $0 \leq i \leq 6$. Perché un pacchetto torni al suo posto dopo 3 azioni della stessa permutazione, è necessario che tale permutazione contenga un ciclo di lunghezza c tale che $c \div 3$. Le permutazioni che non realizzano questo devono essere composte soltanto da cicli di lunghezza 2, 4, 5 o 6; si ottengono trovando i modi in cui 6 si può scrivere come somma soltanto di tali numeri che sono $2+2+2$, $2+4$ e 6. Ce ne sono 5! con un singolo ciclo di 6 pacchetti. Per ogni insieme di 4 pacchetti, ci sono 3! permutazioni con un ciclo su quell'insieme di 4 pacchetti e un ciclo sul complementare: gli insiemi di 4 pacchetti sono $\binom{6}{4}=15$. Infine per ogni coppia di insiemi disgiunti di 2 pacchetti, basta considerare quale pacchetto è accoppiato con il pacchetto 1 tra i 5 possibili e quale pacchetto è accoppiato con quello con numero minore ancora disponibile in 3 modi possibili: in totale sono 15 permutazioni. Le permutazioni che, eseguite tre volte, non hanno un punto fisso sono $5!+3!\cdot15+15=225$. Le permutazioni che hanno almeno un punto fisso eseguite tre volte sono $720-225=495$. Perciò la probabilità è $\frac{495}{720}=\frac{11}{16}$.
La risposta è `0027`.

Soluzione del problema 13. È utile scrivere il numero 2020 in base 2. Si noti che, se i coefficienti fossero solo 0 e 1, cioè il polinomio P dà le scritture di 2020 con potenze di 2, P sarebbe unico: 2020 in base 2 si scrive 11111100100. A questo punto bisogna solo contare i modi in cui si possono modificare le cifre della scrittura in base 2 di 2020 usando anche la "cifra" 2: se una cifra 1 o 2 è seguita da una cifra 0, si può trasformare una cifra 1 in 0 scrivendo a destra una cifra 2, e trasformare una cifra 2 in 1 scrivendo a destra una cifra 2. Perciò, considerando scritture in base 2 con cifre 0, 1 e 2 si ha che $10=02$ e $20=12$. Perciò $100=020=012$ e $1000=0200=0120=0112$. Basta ora contare le riscritture di 11111100 che sono $2\cdot6=12$ e le riscritture di 111111000 che sono $3\cdot6=18$. In totale sono $1+12+2+2\cdot18=51$.
La risposta è `0051`.

Soluzione del problema 14. Sia P il punto medio di AB, centro della circonferenza. Si consideri l'altra tangente nel punto D alla circonferenza da X; si ha che $XD=XF$. Dunque $D=E=A$ e il triangolo XAF è isoscele e retto in X e coincide con il triangolo EFP Si ha dunque che $AB=72cm$ e $XY=72\,\text{cm}-\sqrt{(39\,\text{cm})^2-(36\,\text{cm})^2}=57\,\text{cm}$. Per il teorema di Talete $\dfrac{XY}{AB}=\dfrac{CX}{CA}=\dfrac{CA-XE}{CA}$; dunque $CA=\dfrac{72\cdot36}{15}$ cm. L'area del triangolo è $\dfrac{72\cdot36\cdot72}{15\cdot2}\,\text{cm}^2=6220.8\,\text{cm}^2$.
La risposta è `6220`.

Soluzione del problema 15. La persona 1 mente; di conseguenza c'è almeno una persona, diversa da 1, che dice la verità. In secondo luogo si deve notare che le ultime m persone mentono tutte o dicono tutte il vero, mentre tra le prime n ve n'è al più una che dice il vero. Se una delle prime n persone dicesse la verità, mettiamo la persona k, necessariamente tutte le altre mentirebbero; se fosse l'unica mentirebbe a sua volta dato che $k \neq 1$, mentre se $k=m$ vi sono $m+1$ persone a dire che le persone che dicono il vero sono m, assurdo. Perciò l'unica possibilità è che le prime n mentano tutte e che le ultime m dicano la verità. Poiché $m>1$ si ha che $n<m$, altrimenti anche la persona numero m direbbe la stessa cosa, e sarebbero $m+1$. Il numero di persone che dice la verità è quindi esattamente m, il cui minimo valore accettabile è 1011 dato che $n<m$.
La risposta è `1011`.

Soluzione del problema 16. La base a stella è composta da 12 triangoli equilateri, ciascuno di area $\frac{20}{6}\,\text{m}^2$. Il volume del covone è $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{20}{6}\,\text{m}^2\cdot12\cdot3\,\text{m}=40\,\text{m}^3$.
La risposta è `0040`.

Soluzione del problema 17. Nel caso che il sesto dica il vero, ci sono 1793 bugiardi che sono massimo e minimo. Nel caso che il sesto dica il falso, il numero massimo possibile di bugiardi non può essere 3586 poiché è un numero pari, quindi almeno il primo sarebbe sincero; non può essere 3585, poiché è un numero divisibile sia per 3 che per 5, quindi ci sarebbero almeno due sinceri che sono il secondo e il quarto; non può essere 3584 poiché è un numero multiplo sia di

2 che di 4 che di 7, quindi ci sarebbero almeno tre sinceri che sono il primo, il terzo e il quinto. Il più grande possibile è 3583 che è primo e determina tutti i sei abitanti bugiardi. Per quanto riguarda il minimo numero di bugiardi possibile nel caso che il sesto dica il falso, tale numero è maggiore di 1 poiché 1 non è multiplo di 2, quindi sicuramente ci sono almeno due bugiardi che sono il primo e il sesto; è maggiore di 2 poiché 2 non è multiplo né di 3 né di 4, quindi ci sono sicuramente almeno tre bugiardi che sono il secondo, il terzo e il sesto; è maggiore di 3 poiché 3 non è multiplo né di 2 né di 4 né di 5, quindi ci sono sicuramente almeno quattro bugiardi che sono il primo, il terzo, il quarto e il sesto. Il minor numero possibile di bugiardi è 4, e tali bugiardi sarebbero proprio il secondo, il quarto, il quinto e il sesto.
La risposta è `3587`.

Soluzione del problema 18. Sia $l = 12\,\mathrm{m}$. Si noti prima di tutto che la posizione reciproca tra i primi due cubi è unica a meno di rotazioni. Le posizioni del terzo cubo rispetto agli altri due sono due, a meno di simmetrie e rotazioni. I due volumi si calcolano usando il metodo di inclusione-esclusione: il volume del solido composto può essere visto come $V_t = 3l^3 - V_{1,2} - V_{2,3} - V_{1,3} + V_{1,2,3}$ dove $V_{i,j}$ è il volume dell'intersezione dell'i-esimo cubo e del j-esimo cubo e $V_{1,2,3}$ è il volume dell'intersezione dei tre cubi. Quindi per il minimo è

$$V_m = 3l^3 - \frac{1}{8}l^3 - \frac{27}{64}l^3 - \frac{1}{64}l^3 + \frac{1}{64}l^3 = \frac{157}{64}l^3$$

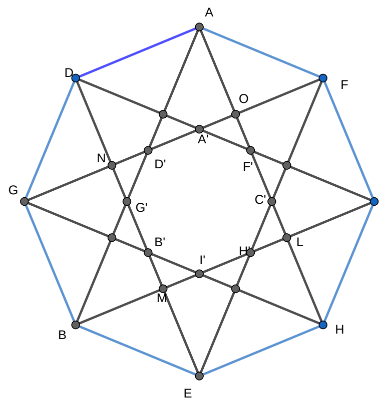
mentre per il massimo

$$V_M = 3l^3 - \frac{1}{8}l^3 - \frac{9}{64}l^3 - \frac{3}{64}l^3 + \frac{1}{64}l^3 = \frac{173}{64}l^3.$$

La somma richiesta è $V_m + V_M = \dfrac{157+173}{64}l^3 = \dfrac{330}{64}\ell^3 = 330 \cdot 27 = 8910$.
La risposta è `8910`.

Soluzione del problema 19. Supponiamo che la carta più bassa sia un 7, allora per la seconda condizione anche la carta più alta deve essere un 7. La terza condizione impone che le 7 carte seguiranno la sequenza: dispari-pari-dispari-pari-dispari-pari-dispari. Dunque sia la somma delle quattro carte sotto che la somma delle tre sopra sono numeri pari. Si noti che la somma delle quattro carte può essere: 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14 o 12. Per la quarta condizione si escludono 26, 22, 18 e 14 perché la loro metà è un numero dispari. La somma non può essere 12 poiché la sua metà è un numero minore di 7; non può essere 16 poiché la metà è 8 e $8 < 7 + 2n + (2m + 1)$ con $n, m > 0$. Non può essere 20 poiché 10 si ottiene soltanto con la sequenza $1 - 2 - 7$, e la prima condizione dovrebbe essere rispettata nelle quattro carte sotto; ma $20 < 7 + 6 + 7 + 2n$ con $n > 0$. Ne segue che l'unico caso possibile è che la somma delle quattro carte sotto sia 24. Per ottenere 12 con le tre carte sopra ci sono due possibilità: $1-4-7$ oppure $2-3-7$. Mentre per ottenere 24 con le prime quattro carte in modo che valga anche la prima condizione bisogna necessariamente avere $7-6-7-4$. Quindi le combinazioni possibili sono solo due: $7-6-7-4-1-4-7$ e $7-6-7-4-3-2-7$. Facendo variare i semi tra quelli possibili, e ricordandosi che il 6 deve essere rosso, per la prima serie di carte ci sono 2304 combinazioni, per la seconda 3072 combinazioni. In totale danno 5376 combinazioni.
La risposta è `5376`.

Soluzione del problema 20. Per costruzione le punte della stella sono tutti angoli di 45 gradi. Sia ℓ la lunghezza del lato dell'ottagono. Dato che AOF è rettangolo isoscele, $AO = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}$; dunque $AB = \dfrac{2\ell}{\sqrt{2}} + \ell = (\sqrt{2}+1)\ell$. Inoltre, dato che $LC = LF'$, si ha che $OF' = FC - LF' = FC - LC = \ell - \dfrac{\ell}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\ell$. L'area dell'ottagono si ottiene sottaendo all'area del quadrato $LMNO$ l'area dei quattro triangoli $A'F'O$, $C'H'L$, $B'I'M$ e $D'G'N$. Sia $AB = a$, perciò $\ell = \dfrac{a}{\sqrt{2}+1} = a\left(\sqrt{2}-1\right)$ e l'area risulta



$$\ell^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \ell^2 = 2\ell^2\left(\sqrt{2}-1\right) = 2a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^3 \approx 48.2261.$$

La risposta è 0048.

Soluzione del problema 21. Sia $n! = \ell_1! \cdot \ldots \cdot \ell_k!$ una scomposizione fattoriale e sia p il massimo primo minore o uguale di n. Allora uno degli ℓ_k è maggiore o uguale a p. Ne segue che $n!$ non può avere una scomposizione fattoriale quando n è primo. E, se n è il succesivo di un numero primo, allora $n!$ può avere una scomposizione fattoriale soltanto se n è un fattoriale, diciamo $n = k!$, cioè $n! = k! \cdot (n-1)!$ che non è uno dei casi cercati. Perciò restano soltano da testare i fattoriali dei numeri 9, 10, 15, 16, 21 e 22. Si scarta 15 perché in una scomposizione dovrebbe comparire 13! e $14 \cdot 15$ è un multiplo di 7! minore di 7!. Si scartano 21 e 22 con argomentazioni simili. Per gli altri tre numeri si trova che $\frac{9!}{7!} = 3! \cdot 3! \cdot 2!$ induce l'unica scomposizione possibile di 9!. Si trova che $\frac{10!}{7!} = 6!$, così, dato che $6! = 3! \cdot 5!$, si determinao due scomposizioni fattoriali ammissibili di 10!. Infine $\frac{16!}{13!} = 14 \cdot 5! \cdot 2!$ che produce una scomposizione fattoriale di 16!. Riassumendo ci sono quattro soluzioni

$$9! = 7! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2! \qquad 10! = 7! \cdot 6! \qquad 10! = 7! \cdot 5! \cdot 3! \qquad 16! = 14! \cdot 5! \cdot 2!$$

La risposta è 0037.