OliMaTo 7

Simulazione Gara Nazionale a Squadre 2019

- Per ogni problema indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Alcuni problemi da noi ritenuti più impegnativi sono contrassegnati da una o due stelle ([$\star$] o [$\star\star$]).
- Di seguito sono riportati alcuni valori approssimati utili nello svolgimento dei calcoli:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142 \qquad \sqrt{3} \approx 1,7321 \qquad \sqrt{5} \approx 2,2360 \qquad \sqrt{7} \approx 2,6458 \qquad \pi \approx 3,1415$$

- **10 minuti dall'inizio:** scadenza per la scelta del problema jolly (dopo verrà assegnato il problema 1).
- **30 minuti dall'inizio:** scadenza per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** fine della gara.

Gara scritta da: Matteo Protopapa, Matteo Rossi, Michele Trosso.
Ambientazione a cura di: Alessandro Perlo.

1. Sogno leggendario

La leggenda narra di un guerriero leggendario, la cui abilità nel kung fu era materia di leggenda. Viaggiava per il paese in cerca di degni antagonisti... In una locanda un vagabondo gli propose di trovare il valore di $q(16)$, sapendo che $q(x)$ è un polinomio di grado 3 con due proprietà: $q(0) = -1$ e le radici di $q(x)$ sono i quadrati delle radici di $x^3 + x + 1$. Il guerriero non disse nulla... Aveva la bocca piena. Prima inghiottì... e poi parlò: "Po alzati, farai tardi al lavoro!". E così ha termine il curioso sogno di Po e ha inizio la nostra storia. Cosa avrebbe dovuto rispondere il guerriero?

Soluzione: la risposta è 4623. Siano a, b, c le radici di $p(x) = x^3 + x + 1$, allora $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, quindi dato che le radici di q sono a^2, b^2, c^2 vale $q(x) = k(x - a^2)(x - b^2)(x - c^2)$, ma dato che $abc = -1$ abbiamo $-q(0) = ka^2b^2c^2 = k = 1$, quindi

$$q(x^2) = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) = (x - a)(x - b)(x - c)(x + a)(x + b)(x + c) = -p(x)p(-x),$$

da cui il risultato.

2. Spaghettinari di professione

Il padre (adottivo) di Po è un'oca gentile e un po' ingenua, ed è un perfetto spaghettinaro. La sua Zuppa dall'Ingrediente Segreto è la miglior zuppa di spaghetti di tutta la Cina. Ha promesso di rivelare l'ingrediente segreto a Po solo quando troverà la somma di tutti gli interi positivi m il cui quadrato si scrive in notazione decimale con una cifra 1 seguita da un qualche numero positivo di cifre 4. Po non ci è ancora riuscito. Che numero sta cercando?

Soluzione: la risposta è 0050. Ogni numero $1\underbrace{4...4}_{n\ volte}$ può essere scritto come $10^n + \underbrace{4...4}_{n\ volte} = 10^n + 4 \cdot (\underbrace{1...1}_{n\ volte})$. Per $n \geq 2$, possiamo raccogliere un fattore 2^2 ottenendo $4 \cdot (25 \cdot 10^{n-2} + \underbrace{1...1}_{n\ volte}) = 4 \cdot k$. Quindi il numero è un quadrato se k è un quarato. Andiamo allora a considerare i resti di un numero quando diviso per 4: un quadrato diviso per 4 dà resto 0 o 1. Il resto di una somma è la somma dei resti, quindi il resto di k se diviso per 4 è la somma dei resti di:

- $25 \cdot 10^{n-2}$, che è 0 per $n \geq 4$;
- $\underbrace{1...1}_{n\ volte}$, che è sempre 3, per $n \geq 2$.

Quindi, per $n \geq 4$, il resto di k quando diviso per 4 è sempre 3. Allora, per $n \geq 4$, $1\underbrace{4...4}_{n\ volte}$ non è un quadrato.

Resta da vedere se per quali degli altri n si ha un quadrato. Possiamo osservare come $144 = 12^2$ e $1444 = 38^2$, mentre 14 non è un quadrato, da cui la risposta.

3. [$\star\star$] Pace interiore

Shifu è agitato. Il maestro Oogway ha avuto una visione: Tai Lung farà ritorno. "Pace interiore. Pace interiore" continua a ripetersi Shifu, con scarsi risultati. Decide dunque di ricorrere ad una tecnica insegnatagli dal suo vecchio maestro. Scrive su una pergamena tutti i 1023 sottoinsiemi non vuoti di $\{1, 2, 3, ..., 10\}$, ne sceglie uno a caso e cancella quello e tutti i suoi sottoinsiemi. Ne sceglie poi un secondo tra i rimanenti e, nuovamente, cancella quello e tutti i suoi sottoinsiemi che ancora erano scritti sulla pergamena. Ripete questo processo fino a quando non ci sono più insiemi scritti. Quante volte, in media, Shifu avrà dovuto scegliere un insieme? *Se la risposta si scrive come $\frac{m}{n}$ con m, n coprimi, rispondere con $m + n$.*

Soluzione: la risposta è 7509. Notiamo che la probabilità che un insieme S venga scelto è $\frac{1}{2^{10-|S|}}$, dove con $|S|$ si indica il numero di elementi di S. Infatti S è ancora presente nella lista in un determinato istante se e solo se lo sono tutti gli insiemi che lo contengono e dato che sia S che gli insiemi che lo contengono hanno la stessa probabilità di essere scelti hanno tutti probabilità $\frac{1}{2^{10-|S|}}$. Il problema diventa quindi calcolare

$$\sum_{S \subseteq \{1,...,10\}} \frac{1}{2^{10-|S|}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{\text{numero di insiemi di dimensione k}}{2^{10-k}} = \frac{(\sum \binom{n}{k} 2^k) - 1}{2^{10}} = \frac{3^{10} - 1}{2^{10}}$$

da cui la risposta.

4. [$\star$] Una prigione, un prigioniero

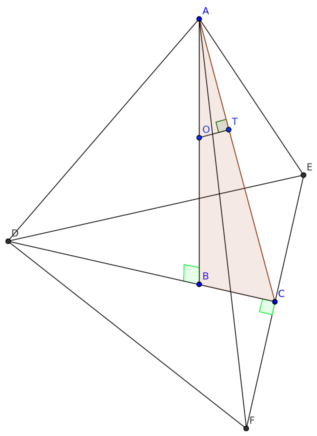
Una via d'entrata, una via d'uscita, innumerevoli guardie e un solo prigioniero: Tai Lung. Il numero delle guardie della prigione di Chargom è sconosciuto. La leggenda narra che ad ogni numero intero positivo n con almeno 3 divisori, siano associate due quantità: $f(n)$ è la somma dei suoi 3 divisori più piccoli, $g(n)$ è la somma dei due più grandi. Il numero delle guardie è dato dalla somma degli $n \leq 2019$ tali che esista un intero positivo m tale che $g(n) = f(n)^m$. Trova il numero di guardie secondo la leggenda.

Soluzione: la risposta è 1032. Siano $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$ i divisori di n, allora $f(n) = 1 + d_2 + d_3$ e $g(n) = n + \frac{n}{d_2}$, quindi $n + \frac{n}{d_2} = (1 + d_2 + d_3)^m \implies n(d_2 + 1) = d_2(1 + d_2 + d_3)^m \implies d_2 + 1|(1 + d_2 + d_3)^m \implies d_2 + 1| \sum \binom{m}{k}(1 + d_2)^k d_3^{m-k} \implies d_2 + 1|d_3^m$. Chiaramente d_2 è primo, se $d_3 = d_2^2$ otteniamo $d_2 + 1|d_2^{2m}$ che è impossibile, quindi anche d_3 è primo, ma allora $d_2 + 1|d_3^m$ vuol dire $d_2 + 1 = d_3^k$ per un qualche k ma $d_2 + 1 \leq d_3$ e quindi $d_2 + 1 = d_3$, ovvero $d_2 = 2, d_3 = 3$ e sostituendo nell'equazione iniziale $n = 2^{m+1}3^{m-1}$, da cui i possibili n sono 24, 144, 864.

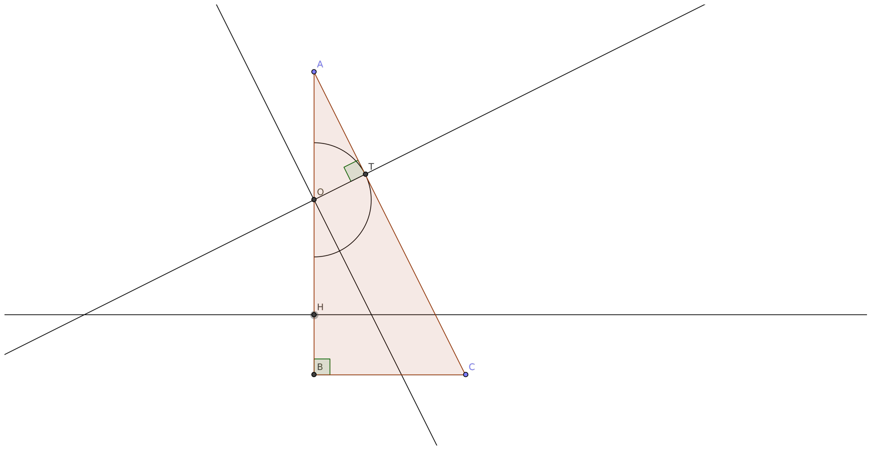
5. [$\star$] Carretto spaghetti

"Sono mille anni che aspettiamo questo momento!" esclama eccitato Po. Oggi è il giorno più importante della storia del kung fu: il maestro Oogway sceglierà il guerriero dragone. "Dove pensi di andare?" lo richiama il padre "Dimentichi il carretto degli spaghetti". Il carretto ha la forma di un tetraedro regolare di lato 1 e contiene quattro cavità a forma di sfera: una mantiene caldi gli spaghetti, una contiene i piatti, una le posate e la quarta ha un'utilità che risulta misteriosa per Po. Le cavità sono sfere identiche di raggio r disposte in modo che ognuna sia tangente a tre facce del tetraedro e alle altre tre sfere. Quanto vale r? *Rispondere con le prime 4 cifre decimali del risultato.*

Soluzione: la risposta è 1449. Osservo che i centri delle 4 sfere si trovano sui vertici di un tetraedro di lato $2r$. Inoltre, le facce di questo tetraedro sono parallele a quelle del tetraedro di partenza e sono distanti r da esse. Inoltre per simmetria i centri delle sfere giacciono sulle altezze del tetraedro di partenza. Considero il triangolo ABC come in figura, dove B è il piede dell'altezza del tetraedro uscente da quel vertice e C è il piede dell'altezza della faccia in questione.



Sappiamo che B è il baricentro della faccia in cui si trova, perciò $BC = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}AC$. Inoltre AC è l'altezza di un triangolo equilatero di lato 1, perciò $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, da cui $BC = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo ABC, ottengo $AB = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Considero ora i punti del triangolo ABC come nella seguente immagine, con O centro di una delle 4 sfere, T punto di tangenza della sfera di centro O con la faccia AEF del tetraedro di partenza, H punto di intersezione tra l'altezza del tetraedro di partenza e il piano su cui giacciono i centri delle altre 3 sfere.



Per ipotesi ho $OT = r$. Inoltre, per il discorso fatto in partenza, $HB = r$. Procedendo in modo analogo a come fatto per calcolare AB, otteniamo che $OH = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 2r$. Noto che i triangoli ABC e QAT sono simili, perciò $\frac{AO}{AC} = \frac{OT}{BC}$, da cui $AO = \frac{AC}{BC} \cdot r = 3r$. Mettendo tutto insieme otteniamo che $AB = AO + OH + HB$, che si traduce nell'equazione $3r + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 2r + r = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Risolvendola si ottiene $r = \frac{1}{2(1+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{6}-1}{10}$, da cui la soluzione.

6. Fuochi d'artificio

Fuochi d'artificio! Ecco cosa permetterà a Po di entrare nel Palazzo di Giada! Per sollevare la sua stazza, serve un numero di fuochi pari al numero di interi $1 \leq k \leq 2019$ tali che esistano x, y, z interi non negativi anche uguali tra loro tali che $x^2(x^2 + 2z) - y^2(y^2 + 2z) = k$. "Io amo il kung fu!" esclama Po accendendo la miccia. Quanti fuochi d'artificio ha utilizzato?

Soluzione: la risposta è 1261. Notiamo che la terna $(1, 0, z)$ dà $2z + 1$, quindi tutti i dispari sono ottenibili, mentre la terna $(2, 0, z)$ dà $16 + 8z$, quindi tutti i multipli di 8 escluso 8 stesso sono ottenibili. Mostriamo che non ci sono altre soluzioni: fattorizziamo come $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2 + 2z)$, guardando modulo 2 notiamo che tutte le parentesi hanno la stessa parità, quindi se un numero pari è ottenibile esso è un multiplo di 8. Rimane da mostrare che 8 non è ottenibile: chiaramente $x \geq y$ perché le altre due parentesi sono sempre positive, ma $x - y \geq 2$, quindi $x \geq 2$, $x^2 \geq 4$ e $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2 + 2z) \geq x \cdot x^2 \cdot (x - y) \geq 16$, quindi 8 non è ottenibile.

7. [$\star$] Dono dal cielo

"Molto interessante" commenta il maestro Oogway. Il cortile del Palazzo di Giada ha la forma di un esagono regolare $ABCDEF$ di area 1. Ha lastricata in marmo l'area $PQMR$, dove M è il punto medio di DE, $P = AC \cap BF$, $Q = AC \cap BM$ e $R = AM \cap BF$. Po è piombato lì in mezzo proprio nel momento in cui Oogway doveva indicare il Guerriero Dragone. "L'universo ci ha portato il Guerriero Dragone" annuncia Oogway tra lo sconcerto dei presenti. Quanto vale l'area lastricata? *Se la risposta è nella forma $\frac{m}{n}$ con m e n coprimi, rispondere con $n + m$.*

Soluzione: la risposta è 0151. Siano l il lato dell'esagono, N il punto medio di AB, $T = AE \cap BF$ e h la distanza di M da BF. Per simmetria, l'area di $PQMR$ è il doppio dell'area di PMR, cioè $h \cdot PR$. Per Talete, $FT = TP = PB$ e quindi $AT = 2 \cdot NP$. $\angle ABF = 30°$, quindi $\angle MPF = \angle BPN = 60°$, per cui $PN = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{6}BF = \frac{1}{6}MN \implies PM = \frac{5}{6}MN = \frac{5}{6}l\sqrt{3}$ e $h = \frac{\sqrt{3}}{2}PM = \frac{5l}{4}$. Notiamo che $\triangle ATR$ e $\triangle MPR$ sono simili, quindi $\frac{TR}{PR} = \frac{AT}{MP} = \frac{2}{5}$ ed essendo $PT = \frac{1}{3}BF = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ si ha che l'area cercata vale $\mathcal{A} = h \cdot PR = \frac{5l}{4} \cdot \frac{5l\sqrt{3}}{21} = \frac{25l^2\sqrt{3}}{96}$. Essendo l'area dell'esagono pari a 1, abbiamo che $l^2 = \frac{2}{9}\sqrt{3}$, quindi $\mathcal{A} = \frac{25}{126}$ da cui la risposta.

8. Urna dei Guerrieri Sussurranti

Nel Palazzo di Giada ci sono molti cimeli sbalorditivi. "La leggenda narra che contiene le anime di tutto l'esercito Tai-Shu" sussurra Po avvicinandosi all'Urna dei Guerrieri Sussurranti. Osservando attentamente l'Urna, nota che vi è incisa una sequenza di 100 numeri $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ che ha la proprietà per cui, per ogni k tra 1 e 100, a_k è esattamente la somma degli altri 99 elementi meno k. Purtroppo viene interrotto dal maestro Shifu e non riesce a memorizzare il valore di a_{50}; ricorda soltanto che si può scrivere nella forma $\frac{m}{n}$ con m e n primi tra loro. *Ripondere con il valore di $m+n$.*

Soluzione: la risposta è 0173. Sia S la somma di tutti gli elementi, allora la condizione data è $a_k = S - a_k - k$, cioè $2a_k + k = S$. Ma allora $2a_k + k = S = 2a_{k+1} + k + 1$, quindi $a_{k+1} = a_k - \frac{1}{2}$ che porta a $a_k = a_1 - \frac{k-1}{2}$. Osservando che $2a_1 + 1 = S = \sum_{n=1}^{100} a_1 - \frac{n-1}{2} = 100a_1 - 2475$, si ha $a_1 = \frac{2476}{98}$ e $a_{50} = a_1 - \frac{49}{2} = \frac{75}{98}$ da cui la risposta.

9. [$\star$] I primi ostacoli

"Probabilmente oggi ho fatto più schifo di chiunque altro nella storia del kung fu, nella storia della Cina, nella storia dello schifo" si lamenta Po "Non diventerò mai il Guerriero Dragone. É più facile che io trovi la somma dei possibili valori di $P(2)$, sapendo che $P(x)$ è un polinomio di grado $m \leq 10$ tale che $P(x)$ ha m radici intere distinte, $P(0) = 0$ e $P(x) + 1$ può essere fattorizzato nel prodotto di due polinomi non costanti a coefficienti interi". Che numero sta cercando Po?

Nota: in gara a questo problema mancava l'ipotesi $P(0) = 0$, senza la quale è possibile costruire infiniti polinomi che soddisfano le ipotesi. Pertanto, abbiamo considerato come corrette sia la risposta 0000 che la risposta 9999.

Soluzione: la risposta è 0152. Scriviamo $P(x) = Q_1(x)Q_2(x) - 1$ e siano $r_1, ..., r_m$ le radici di $P(x)$, ovvero $Q_1(r_i)Q_2(r_i) = 1$ per ogni i, ma i due polinomi sono a coefficienti interi, quindi $Q_1(r_i) = Q_2(r_i)$ per ogni i, ovvero $Q_1(x) = Q_2(x)$ per ogni x reale. Quindi $P(x) = Q(x)^2 - 1$, ovvero m è pari e metà delle radici di Q sono tali che $Q(r_i) = 1$ e l'altra metà sono tali che $Q(r_i) = -1$. Da qui è facile vedere che Q ha grado al più 2, quindi distinguiamo due casi:

- Se Q ha grado 1 allora può essere solo $Q(x) = x + 1$ o $Q(x) = x - 1$
- Se Q ha grado 2 allora scriviamo $Q(x) = x^2 + ax + b$ (possiamo supporre Q monico), ma sia $Q(x) - 1$ che $Q(x) + 1$ devono avere radici intere, quindi $a^2 - 4b - 4$ e $a^2 - 4b + 4$ devono essere quadrati perfetti, ovvero $a^2 - 4b = 5$ e dato che dev'essere $b = 1$ o $b = -1$ troviamo 4 soluzioni $x^2 - 3x + 1, x^2 + 3x + 1, x^2 - x - 1, x^2 + x - 1$.

Abbiamo quindi $P(2) = Q(2)^2 - 1 = 8, 0, 0, 120, 0, 24$, da cui la risposta.

10. [$\star\star$] Ha mollato...

"Il panda ha mollato" afferma soddisfatto Shifu. "Cosa faremo ora, maestro?" "Possiamo solo riprendere gli allenamenti" risponde Shifu scrivendo nella sabbia la coppia di numeri $(1, 0)$. "Tigre, una mossa consiste nel sostituire la coppia scritta (a, b) con una coppia a scelta tra $(2a - b, a)$, $(2a + b + 2, a)$ e $(a + 2b + 2, b)$. Sai dirmi per quanti interi non negativi k si può arrivare con un numero finito di mosse alla coppia $(2019, k)$?". Tigre è troppo orgogliosa per ammettere la difficoltà del problema. Cosa deve rispondere?

Soluzione: la risposta è 0800. Consideriamo le coppie con entrambi gli elementi aumentati di 1, ovvero il gioco dove si parte dalla coppia $(2, 1)$ e le mosse sono rispettivamente portare la coppia (m, n) in $(2m-n, m), (2m+n, m), (m+2n, n)$. Si può notare facilmente che:

- Ci sarà sempre esattamente un elemento pari e uno dispari
- Il primo elemento sarà sempre maggiore del secondo
- Gli elementi saranno sempre coprimi

Si può dimostrare per induzione su $m + n$ che tutte le coppie descritte da queste 3 proprietà sono ottenibili con un numero finito di mosse, quindi ci interessano gli interi positivi dispari minori di 2020 e coprimi con 2020, che sono $\phi(2020) = 800$, da cui la risposta.

11. ... o forse no?

"Che cosa ci fai tu qui?" esclama sorpreso Shifu. "Buongiorno, maestro. Ehm, facevo qualche riscaldamento" risponde Po, che si è incastrato nel tentativo di imparare a fare la spaccata. "Ci vogliono anni" replica seccato Shifu "per sviluppare la flessibilità necessaria. In una sola notte invece, se proprio ti impegni, puoi trovare qual è il più grande intero positivo n tale che $n!$ sia esprimibile come il prodotto di $n - 3$ interi consecutivi". Così Po inizia le lezioni di kung fu. Qual è il numero cercato?

Soluzione: la risposta è 0023. Sia n l'intero cercato e sia k l'intero tale che $n! = k(k-1)(k-2)...(k-n+4)$. Chiaramente $k > n$ perché $n! > n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 5 \cdot 4$, poniamo $k = n+1$ e la condizione si riscrive come $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 =$

$(n+1) \cdot n \cdot \ldots \cdot 5$, ovvero $n+1 = 24$. Se per assurdo fosse $k = n+r$ con $r > 1$ si avrebbe $n! = (n+r)(n+r-1) \cdot \ldots \cdot (r+4)$, dove la parte destra, al crescere di n o r, cresce molto più velocemente della parte di sinistra e fissando $n = 10$, $r = 2$ otteniamo già che la parte di destra è troppo grande.

12. Il vero guerriero

"Non temete maestro, io non mollerò mai" afferma Po dopo aver combattuto ed essere stato sconfitto dai Cinque in allenamento. Per testare la sua forza di volontà, Shifu affida un compito a Po: scegliere un insieme di 14 numeri interi distinti, prendere tutti i suoi sottoinsiemi non vuoti e segnare le somme dei loro elementi. Alla fine chiede: "Mi sai dire quante di queste somme, al minimo, saranno pari?"

Soluzione: la risposta è 8191. Se i numeri sono tutti pari chiaramente tutti hanno somma pari e il numero di sottoinsiemi cercato è $2^{14} - 1 = 16383$. Se almeno un numero è dispari, possiamo sceglierne uno che chiamiamo k e fissato un sottoinsieme T non vuoto non contenente k, esattamente uno tra T e $T \cup \{k\}$ ha somma pari e uno ha somma dispari, quindi qualunque sia il numero di numeri dispari scelti abbiamo che il numero di sottoinsiemi non vuoti con somma pari è $\frac{1}{2}2^{14} - 1 = 8191$.

13. Notizie

"Maestro, ho due bruttissime notizie. La prima è che Tai Lung è evaso di prigione" "Shifu, esistono solo le notizie. Non sono né belle né brutte" "La seconda è che il panda ha considerato una successione $A = (a_1, a_2, ...)$ di numeri reali. Poi ha indicato con $\Delta(A)$ la successione ottenuta così: $\Delta(A) = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, ...)$. Mi ha chiesto di trovare la somma dei possibili valori di a_1, sapendo che $\Delta(\Delta(A)) = (1, 1, 1, 1, ...)$ e che $a_{19} = a_{92} = 0$" "Questa è una brutta notizia". Quale numero deve rispondere Shifu?

Soluzione: la risposta è 0819. Notiamo $(a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) = a_3 - 2a_2 + a_1 = 1$ e similmente per ogni n abbiamo $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1$, da cui deduciamo $a_{n+2} = 1 + 2a_{n+1} - a_n$. Siano $a = a_1$ e $b = a_2$. Abbiamo $a_3 = 1 + 2b - a$ e $a_4 = 3 + 3b - 2a$, che ci porta facilmente a $a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1)b - (n-2)a$. Da $a_{19} = a_{92} = 0$ troviamo due equazioni $17a - 18b = 153$ e $90a - 91b = 4095$, ovvero $a = 819$ è l'unica soluzione.

14. [$\star$] Ispirazione nelle stelle

Il maestro Oogway si è riunito con l'energia dell'universo. Ora tocca a Shifu trovare il modo di addestrare Po. Per trovare un'ispirazione, alza gli occhi e guarda le stelle. Nel cielo buio risalta la costellazione del drago: tre stelle formano un triangolo acutangolo $\triangle ABC$ con $\angle BAC = 60°$ e $AC \geq AB$. Altre tre stelle si trovano nei punti H, I e O, ovvero rispettivamente l'ortocentro, l'incentro e il circocentro di $\triangle ABC$. L'area del pentagono $BCOIH$ è la massima possibile. Purtroppo questa vista non suscita in Shifu nessuna idea geniale. Quanto vale $\angle CBA$?

Soluzione: la risposta è 0080. Siano $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$. Dimostriamo innanzitutto che $BCOIH$ è ciclico: $\angle BOC = 2\alpha = 120°$, $\angle BIC = 180° - \angle IBC - \angle ICB = 180° - \frac{\beta+\gamma}{2} = 120°$, e $\angle BHC = 180° - \angle HBC - \angle HCB = 180° - (90° - \gamma) - (90° - \beta) = 120°$. Ora, è noto che dato un arco di circonferenza e un punto su di esso, il triangolo formato dal punto e dagli estremi dell'arco è massimo se il punto biseca l'arco; da qui è facile vedere come dati due punti su un arco, l'area del quadrilatero formato dai due punti e dagli estremi dell'arco è massima se i due punti trisecano l'arco. Tornando al problema, abbiamo che l'area di $\triangle BOC$ è fissa in quanto non dipende da β o γ, al contrario di I e H, quindi dobbiamo massimizzare l'area di $BHIO$. Per quanto appena detto, vorremmo che H e I trisecassero l'arco BO. Ma allora $90° - \beta = \angle BCH = \frac{1}{3}\angle BCO = \frac{1}{3}(90° - \alpha) = 10°$, da cui $\beta = 80°$

15. [$\star\star$] Cinque contro uno

Po è un disastro. I Cinque decidono di affrontare Tai Lung da soli. Dall'alto del Palazzo di Giada osservano il villaggio: è un grande quadrato composto da 49 edifici identici disposti su 7 righe e 7 colonne. Le 8 botteghe degli artigiani si riconoscono perché hanno il tetto di paglia. Scimmia nota che se numera le righe e le colonne da 1 a 7, le botteghe sono disposte in modo curioso. Presa una qualsiasi coppia di esse con coordinate rispettivamente (x_1, y_1) e (x_2, y_2), almeno una tra le differenze $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$ è maggiore o uguale a 3. Con un solo balzo, Tigre atterra dolcemente sul tetto di una bottega. In quanti modi diversi possono essere disposte le botteghe nel villaggio?

Soluzione: la risposta è 0051. Il problema equivale al numero di modi di mettere 8 quadrati 3×3 in una griglia 9×9 in modo che non si intersechino tra loro. Chiamiamo casella (i, j) la casella alla riga i e colonna j e identifichiamo ogni quadrato con il suo centro. Chiaramente i quadrati non possono stare sulla cornice esterna della tabella, inoltre vediamo facilmente che nessun quadrato può stare in $(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)$ (e simmetrici), altrimenti non si potrebbero mettere gli altri 7. Dimostriamo che in ogni configurazione che ci interessa abbiamo almeno due colonne o righe con numeri di $\{2,5,8\} \times \{2,5,8\}$ totalmente occupate. Se tutti i quadrati sono $(2,2) \pmod 3$ questo è ovvio, altrimenti (a meno di rotazioni o riflessioni) almeno uno tra $(2,3),(2,4),(5,3),(5,4)$ è utilizzato. Se abbiamo $(2,3)$ o $(2,4)$ utilizzati abbiamo progressivamente $(5,2) \implies (8,2),(5,5) \implies (8,5),(5,8) \implies (8,8)$, quindi $\{5,8\} \times \{2,5,8\}$ è completamente occupato. L'altro caso è analogo. Per il principio di inclusione-esclusione la risposta è quindi $6\binom{(9-2)-2}{2} = 60$, ai quali dobbiamo togliere il numero di quadrati che sono $(2,2) \pmod 3$, cioè 9, da cui la risposta.

16. [$\star$] Metodi antistress

"Che c'è, quando sono sconvolto mangio. Va bene?" "Non serve spiegare" replica Shifu "io quando sono sconvolto prendo 12 dracme, ognuna delle quali è bianca da un lato e nera dall'altro. Le dispongo in fila, con la prima a sinistra che mostra il lato nero e le successive alternate (la seconda il lato bianco, la terza quello nero,. . .). Una mossa consiste nel prendere un numero di dracme consecutive (anche una sola) tali che la più a sinistra mostri la faccia nera, e girarle tutte". Compare un sorriso sulle sue labbra: ora sa come trasformare Po nel Guerriero Dragone. Quante mosse può fare Shifu al massimo prima di arrivare ad una configurazione nella quale non può più fare mosse?

Soluzione: la risposta è 2730. Assegniamo un numero binario a ogni configurazione, indicando con 1 una dracma con la faccia nera in alto e con 0 una dracma con la faccia bianca in alto. Inizialmente abbiamo quindi $101010101010_2 = 2730$. Notiamo che ogni mossa fa diminuire questo numero, quindi le mosse sono al più 2730. Esiste inoltre una sequenza di esattamente 2730 mosse che consiste nello scegliere sempre la dracma nera più a destra e tutte quelle alla sua destra, in modo da far diminuire il numero in binario sempre di 1.

17. [$\star\star$] Pozza delle Lacrime Sacre

"Panda" afferma Shifu "noi non ci laviamo le ascelle nella Pozza delle Lacrime Sacre". "La Pozza delle..." le parole si spengono in gola a Po mentre osserva che la pozza ha la forma di un triangolo $\triangle ABC$ con $AB = 13$, $BC = 14$ e $AC = 15$. Po si accorge che in M, punto medio di BC, si erge un alto sperone di roccia. Poi considera la circonferenza Γ passante per A e tangente a BC in M; e considera le intersezioni D, E tra Γ e, rispettivamente, AB e AC. Un secondo sperone si erge in N, punto medio di DE. Siano P, O le intersezioni tra MN e, rispettivamente, AB e AC. Il panda nota che il rapporto $MN : NO : OP$ può essere scritto come $a : b : c$ con $\mathrm{MCD}(a, b, c) = 1$. "Questo è il luogo d'origine del kung fu" conclude Shifu "e io sono il tuo maestro". Quanto vale $a + b + c$.?

Soluzione: la risposta è 0225. Sia G l'intersezione tra MN e Γ. $\triangle DGE$ è simile a $\triangle BAC$ visto che $\angle DGE = \angle BAC$ poichè insistono sullo stesso arco di circonferenza, e per lo stesso motivo le mediane determinano angoli uguali con i lati corrispondenti.
Possiamo calcolare BD, AD, CE e AE sapendo che $BM^2 = BD \cdot BA$ e $CM^2 = CE \cdot CA$, ottenendo $BD = 49/13$, $CE = 49/15$, $AD = 120/13$, $AE = 176/15$. Con il teorema del coseno calcoliamo DE e sfruttando la similitudine trovata all'inizio calcoliamo anche DG e GE.
In maniera simile calcoliamo MD e ME. Quindi con il teorema di Tolomeo abbiamo MG. Ora, $\angle EMG = \angle EDG = \angle CBA$ e $\angle PMB = \angle GEM$, quindi $\triangle MGE$ e $\triangle BPM$ sono simili e pertanto $\frac{ME}{MB} = \frac{GM}{BP}$ con l'unica incognita BP da cui ricaviamo AP.
Grazie al teorema di Menelao applicato a $\triangle DPN$ e $\triangle BPN$, troviamo $\frac{ON}{OP}$ e $\frac{OM}{OP}$; inoltre osserviamo che $\frac{OM}{OP} - \frac{ON}{OP} = \frac{MN}{OP}$ da cui otteniamo infine $a : b : c = 49 : 120 : 56$.

18. Attacco nervino

Tai Lung ha sconfitto i Cinque Cicloni con un attacco nervino. Per liberarli dalla paralisi Shifu deve effettuare un preciso procedimento. Sul petto della vittima traccia un triangolo $\triangle ABC$, con $\angle ABC = 58°$ e $\angle ACB = 76°$. Poi considera il circocentro O e un punto M sulla circonferenza circoscritta, appartenente all'arco minore AB. La retta per M perpendicolare a OA interseca AB e AC rispettivamente in K e L; la retta per M perpendicolare a OB interseca BA e BC rispettivamente in N e P. Premendo delicatamente nei punti K, L, N e P, Shifu riattiva il sistema nervoso dei Cinque. L'unica speranza per sconfiggere Tai Lung è il Guerriero Dragone. Sapendo che $MN = KL$, quanto misura $\angle MLP$?

Soluzione: la risposta è 0076. Sia $\gamma = \angle BCA$. $\angle MKN = \angle AKL = 90° - \angle KAO = \gamma$ poichè è noto che $\angle OAB = 90° - \gamma$; analogamente $\angle MNK = \gamma$, quindi $\triangle MNK$ è isoscele e in particolare $MK = MN$. Inoltre, $\triangle AKL$ è simile a $\triangle ABC$ e quindi $AK : KL = AC : BC$. Sia ora Q l'intersezione tra la retta MK e la circonferenza circoscritta; $\triangle AKQ$ e $\triangle MKB$ sono simili e quindi $AK : AQ = MK : MB$. Essendo $MK \perp OA$, $AQ = AM$, quindi $AK : AM = MK : MB$, $MK : AK = MB : AM$ e moltiplicando per la relazione precedentemente trovata si ha $MK : KL = \frac{AC \cdot MB}{BC \cdot AM}$. Per simmetria abbiamo anche $MN : NP = \frac{BC \cdot MA}{AC \cdot MB}$; combinata con la precedente e con l'ipotesi $MN = KL$, otteniamo $MK = KL = MN = NP$, quindi $NK \parallel LP$ e infine $\angle MLP = \angle MKN = \gamma = 76°$.

19. [$\star$] Pergamena

"La leggenda narra che quando leggerai la Pergamena del Drago sentirai il battito d'ali di una farfalla, sentirai l'universo in movimento attorno a te e saprai trovare il numero di sequenze di interi positivi $(a_1, a_2, ..., a_{2019})$ tali che $a_i \leq 2019$ per $i = 1, ..., 2019$, $a_{i-1} \leq a_i$ per $i = 2, ..., 2019$ e $|a_m - a_n| \leq |m - n|$ per ogni $m, n \in \{1, 2, ..., 2019\}$" "Mitico! E spaccherò i muri con un pugno?" domanda Po. "Concentrati" replica Shifu "e adempi al tuo destino: diventa il Guerriero Dragone". *Se il numero di sequenze è nella forma $d \cdot 2^n$ con d dispari, rispondere con $d + n$.*

Soluzione: la risposta è 2524. Dato che la sequenza è debolmente crescente, si ha $a_{n+1} = a_n + k$ per un qualche k intero non negativo. Ma abbiamo anche che $k = |a_{n+1} - a_n| \leq |1|$, quindi $k \in \{0, 1\}$. Supponendo $a_{2019} - a_1 = h$, abbiamo $\binom{2018}{h}$ scelte sui punti in cui incrementare la successione e $2019 - h$ scelte per a_1, quindi il numero totale di successioni che soddisfa le condizioni è $\sum_{h=0}^{2018} (2019 - h)\binom{2018}{h} = 2019 \cdot 2^{2018} - 2018 \cdot 2^{2017} = 505 \cdot 2^{2019}$, da cui la risposta.

20. Il compimento del destino

"Stai mentendo, Shifu non ti ha insegnato la Presa del dito Wuxi" "No, l'ho immaginata" replica tranquillo Po, che flettendo il mignolo aggiunge: "Skadush". Sul suolo si forma un enorme cratere dalla forma di un quadrilatero $ABCD$ non intrecciato e ciclico tale che $AB = 75$ metri e $AC = 125$ metri. Tai Lung si trovava esattamente nel punto M di intersezione delle diagonali, inoltre $AB = BM$, $CD = CM$ e AC è un diametro della circonferenza circoscritta ad $ABCD$. Po ha portato a termine il suo destino: Tai Lung non è più. Quanto vale BD? *Nota: un quadrilatero si dice ciclico se è inscrivibile in una circonferenza.*

Soluzione: la risposta è 0117. Poiché AC è diametro, $\widehat{ABC} = 90°$. Applicando il Teorema di Pitagora sul triangolo ABC ottengo che $BC = 100$. Considero O centro della circonferenza circoscritta: il triangolo OAB è isoscele di angoli alla base $\widehat{ABO} = \widehat{OAB} = \widehat{MAB}$, in quanto $OA = OB$ raggi della circonferenza circoscritta. Poiché il triangolo AMB è isoscele di angolo alla base $\widehat{BMA} = \widehat{MAB} = \widehat{OAB}$ per ipotesi, i triangoli OAB e AMB sono simili. Perciò $\frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AO}$, che per ipotesi, AC diametro, dà $AM = AB^2 \cdot \frac{2}{AC} = 90$. Allora $CD = CM = 125 - 90 = 35$. Poiché AC è diametro $\widehat{CDA} = 90°$. Applicando il Teorema di Pitagora sul triangolo ACD ottengo che $AD = 120$. Posso applicare ora il Teorema di Tolomeo ottenendo che $BD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot AD$, da cui $BD = 117$.

21. The end

La pace è tornata nella valle e i Cinque si possono concedere un po' di riposo. Scimmia e Gru tirano a turno un dado (inizia Scimmia) e ognuno di loro si segna volta per volta la somma dei propri risultati. Il primo che ottiene una somma divisibile per 7 vince. Qual è la probabilità che Scimmia vinca? *Rispondere con la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione: la risposta è 0017. Sia x_k la probabilità che il giocatore che deve lanciare il dado vinca avendo per ora una somma che è $k \neq 0$ modulo 7. Si ha

$$x_k = \frac{1}{6} \sum_{l \neq k, l \in \{1,...,6\}} (1 - x_l) + \frac{1}{6}.$$

Se chiamiamo $s = \sum x_k$ troviamo che x_k non dipende da k e quindi $6x_k = s$ per ogni k. Sostituendo quindi nella somma abbiamo $x_k = \frac{6}{11}$. Chiaramente al primo turno non può vincere nessuno dei due, mentre dal secondo, qualsiasi sia il risultato del primo lancio, Scimmia vince con probabilità x_k.