GARA DI MATEMATICA ON-LINE (13/12/2021)

1. LE FAMIGLIE ALLARGATE [66]

Per massimizzare la somma di cubi è necessario avere il maggior numero possibile di 2. Eventuali 0 sono inutili e gli 1 si possono evitare. Sia x il numero di 2 e y il numero di -1.

Abbiamo che $2x-y=12$ e $4x+y=42$. Sommando le due equazioni si ottiene $6x=54$ da cui $x=9$ e di conseguenza $y=6$. $a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3=9\cdot 8-6\cdot 1=66$.

2. LO ZIO ARMANDO [200]

Prima di tutto calcoliamo il valore di $ab+bc+ac$ dalla relazione
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$.

Inserendo i valori noti ed esplicitando si ottiene $ab+bc+ac=-1$.

Analizziamo il primo elemento della somma: $\dfrac{1000}{ab+c-1}=\dfrac{1000}{ab+2-a-b-1}=\dfrac{1000}{ab-a-b+1}=\dfrac{1000}{(a-1)(b-1)}$,

dove nella prima uguaglianza abbiamo sostituito il valore di c con $2-a-b$, ricavato dalla prima uguaglianza fornita nelle ipotesi.

Possiamo eseguire la stessa cosa su tutti gli addendi, fino ad ottenere

$$\frac{1000}{ab+c-1}+\frac{1000}{bc+a-1}+\frac{1000}{ac+b-1}=1000\left(\frac{1}{(a-1)(b-1)}+\frac{1}{(b-1)(c-1)}+\frac{1}{(a-1)(c-1)}\right)=$$

$$1000\frac{a+b+c-3}{(a-1)(b-1)(c-1)}=1000\frac{(a+b+c)-3}{abc-(ab+ac+bc)+(a+b+c)-1}=1000\frac{2-3}{-7+1+2-1}=200.$$

3. L'ETÀ DEL CUGINO [11]

Per avere $f\left(f(n)\right)=4$ è necessario che $f(n)=4$ o $f(n)=13$ o $f(n)=22$ o $f(n)=31$ o $f(n)=40$.

Siccome il massimo valore nella somma delle cifre dei numeri $1\le n\le 100$ è 18 ottenuta da $n=99$, gli ultimi tre case indicati non potranno verificarsi.

Restano $f(n)=4$ che si ottiene per $n\in\{4,13,22,31,40\}$ e $f(n)=13$ per $n\in\{49,58,67,76,85,94\}$.

In tutto 11 valori possibili.

4. L'ANTIPASTO DI CARLA [181]

Ponendo $x=1$ nella prima relazione e $x=0$ nella seconda, otteniamo da entrambe $p(1)$, quindi $1+a+b+c=13$, e cioè $a+b+c=12$.

Ponendo $x=1$ nella seconda relazione e $x=0$ nella terza, otteniamo da entrambe $p(2)$, quindi $1+d+43+13=98$, da cui si ricava $d=41$.

Ponendo $x=0$ nella seconda relazione e $x=-1$ nella terza, otteniamo da entrambe $p(1)$, quindi $13=-1+44-e+98$, da cui si ricava $e=128$.

La risposta cercata vale $a+b+c+d+e=12+41+128=181$.

5. LE FIGURINE [71]

La probabilità di pescare due figurine uguali è $P(2 \text{ uguali}) = \dfrac{\binom{12}{2}}{\binom{18}{2}} = \dfrac{22}{51}$, mentre la probabilità di pescarne due diverse è $P(2 \text{ diverse}) = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{18}{2}} = \dfrac{5}{51}$. Per differenza, la probabilità di averne una di un tipo ed una dell'altro è $P(1 \text{ e } 1) = 1 - \dfrac{22}{51} - \dfrac{5}{51} = \dfrac{24}{51}$.

Sia p la probabilità di vincere di Elisa (e di conseguenza $1-p$ la probabilità di vittoria di Nicola). Rappresentiamo la situazione con uno schema ad albero:

	↗	2 diverse (vince E)
pesca Elisa	→	1-1 (ricomincia E)
	↘	2 uguali cede il gioco a Nicola

Quindi $p = \dfrac{5}{51} + \dfrac{24}{51} p + \dfrac{22}{51}(1-p)$ da cui, facendo i conti, si ricava $p = \dfrac{27}{49}$.

La probabilità cercata è $1 - p = 1 - \dfrac{27}{49} = \dfrac{22}{49}$.

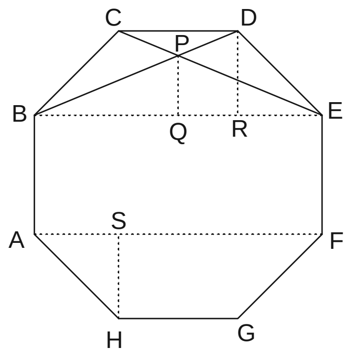
La risposta richiesta è $22 + 49 = 71$.

6. IL GIOCO A PREMI [3392]

Osserviamo che la richiesta $111_2 + 222_3 + ... + GGG_{17}$ è equivalente a $1000_2 + 1000_3 + ... + 1000_{17} - 16$ dove è stato aggiunta una unità a tutti gli addendi, e quindi:

$$1000_2 + 1000_3 + ... + 1000_{17} - 16 = 2^3 + 3^3 + ... + 17^3 - 16 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 17^3 - 17 = \left(\frac{17 \cdot 18}{2}\right)^2 - 17 = 23392.$$

7. IL TENDONE NEL GIARDINO [270]



Risolviamo il problema in generale. Sia l il lato dell'ottagono.

Dividiamo l'ettagono $ABPEFGH$ in un trapezio $AFGH$, un rettangolo $ABEF$ ed un triangolo BPE e determiniamo le tre aree separatamente.

$A_{ABEF} = AB \cdot AF = l \cdot (l + l\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2}) l^2$.

$$A_{AFGH} = \frac{(AF + GH)SH}{2} = \frac{(l + l\sqrt{2} + l) \cdot \frac{l}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})}{2} l^2$$

Per determinare l'area di BPE dobbiamo prima determinare la misura dell'altezza PQ. I triangoli BPQ e BDR sono simili, quindi $BR : DR = BQ : PQ$ e quindi

$$PQ = \frac{DR \cdot BQ}{BR} = \frac{\frac{l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{l + l\sqrt{2}}{2}}{l + \frac{l}{\sqrt{2}}} = \frac{l}{2}.$$

$$A_{BPE} = \frac{BE \cdot PQ}{2} = \frac{l(1+\sqrt{2}) \cdot \frac{l}{2}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})}{4} l^2.$$

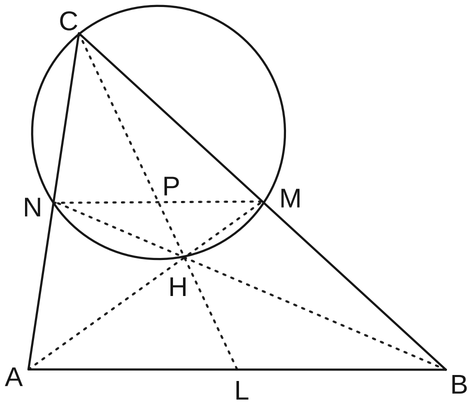
$$A_{ABPEFGH} = A_{ABEF} + A_{AFGH} + A_{BPE} = (1+\sqrt{2}) l^2 + \frac{(1+\sqrt{2})}{2} l^2 + \frac{(1+\sqrt{2})}{4} l^2 = \frac{7}{4}\left(1+\sqrt{2}\right) l^2.$$

Inserendo il valore noto del lato, si ottiene

$$A_{ABPEFGH} = \frac{7}{4}\left(1+\sqrt{2}\right) \cdot 64 \cong 270,39 \text{ m}^2$$

8. IL TAVOLO PER IL PRANZO DI NATALE [346]

Tracciamo il segmento MN e sia P il punto di intersezione con CL.



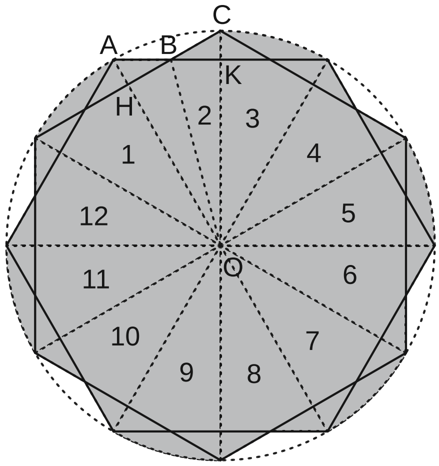
Detta x la lunghezza della mediana CL, abbiamo che $CP = \frac{1}{2}x$ e $CH = \frac{2}{3}x$. $NP = PM = 2\ \text{m}$ e quindi, per il Teorema delle Corde $CP \cdot PH = NP \cdot PM$ da cui otteniamo:

$\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x \right) = 1 \cdot 1$ che risolta ci da

$x = 2\sqrt{3}\ \text{m} = 200\sqrt{3}\ \text{cm} \cong 346,42\ \text{cm}$

9. IL CENTROTAVOLA [296]

La situazione è quella descritta dalla figura a lato. L'area da calcolare è quella grigia.



Le parti indicate con numeri dispari sono settori circolari la cui somma è esattamente mezzo cerchio. Le sei zone indicate con numeri pari possono essere suddivise ulteriormente in due triangoli congruenti (congruenti ad AOB) di cui possiamo determinare la misura dell'altezza per poterne calcolare l'area.

Sia $BH = x$ e $BC = y$. Siccome $AB = BC$ e $BH = BK$, abbiamo che $x + y = 5\ \text{cm}$.

Siccome $AH = AO - OK = 10 - 5\sqrt{3}\ \text{cm}$, possiamo applicare il teorema di Pitagora sul triangolo ABH: $y^2 - x^2 = \left(10 - 5\sqrt{3}\right)^2$.

Mettendo assieme le due equazioni otteniamo $x = 5(2\sqrt{3} - 3)$.

L'area cercata vale:

$$A = \frac{\pi 10^2}{2} + \frac{10 \cdot 5(2\sqrt{3} - 3)}{2} \cdot 12 = 50\pi + 600\sqrt{3} - 900\ \text{cm}^2 \cong 296,34\ \text{cm}^2.$$

10. L'INDOVINA IMBROGLIONA [175]

Raccogliamo a fatto comune $abcd$ all'interno della parentesi e portiamo fuori. Si ottiene

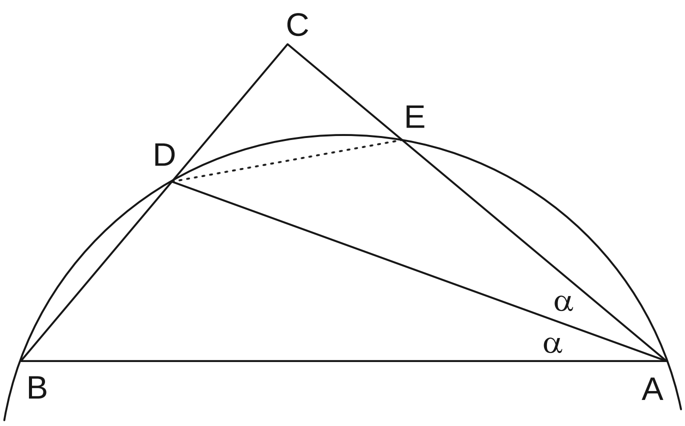
$$a^{10}b^{10}c^{10}d^{10}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{c} \right)^{10}.$$

Per avere $a^7b^8c^9d^6$ è necessario prendere $\left(\frac{1}{2a}\right)^3 \left(\frac{1}{3b}\right)^2 \left(\frac{1}{c}\right)^1 \left(\frac{1}{d}\right)^4$ il cui coefficiente è $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 4!}$

Il valore cercato è $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3^2} = 175$.

11. I TRUCCHI DI CARLA [39]

Per il Teorema della corda, $BD = DE$ dato che le due corde sono viste da un angolo della stessa misura.



Detto $x = BD = DE$ applichiamo il Teorema di Pitagora sul triangolo DCE: $x^2 = (15 - x)^2 + 3^2$ da cui otteniamo $x = \frac{39}{5}\ \text{cm}$ e quindi $CD = 15 - \frac{39}{5} = \frac{36}{5}\ \text{cm}$.

Sia $AB = y$ e $AC = z$.

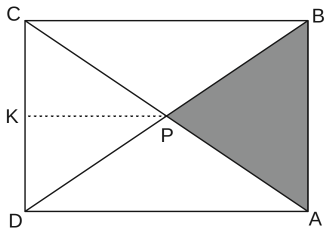
Per il Teorema della Bisettrice $y : z = \frac{39}{5} : \frac{36}{5}$ e per il Teorema di Pitagora sul triangolo ABC $y^2 = 15^2 + z^2$.

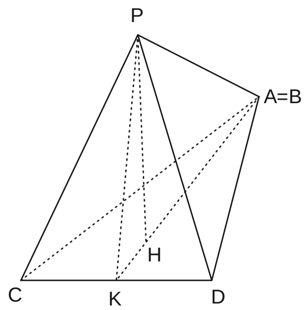
Mettendo le due equazioni a sistema si ottiene $z = 36\ \text{cm}$ e $y = 39\ \text{cm}$ che è la risposta richiesta.

12. L'INDOVINELLO DI ELISA [106]

Dobbiamo risolve l'equazione diofantea $36a+77b=200$, con l'ulteriore vincolo $a\geq 0$.
Possiamo semplificare l'equazione notando che sia 36 che 200 sono divisibili per 4 e quindi posto $b=4c$ abbiamo $9a+77c=50$. La soluzione dell'equazione omogenea è $(77k;-9k)$ con $k\in\mathbb{Z}$ ed una soluzione particolare si trova subito notando che $77-27=50$ e quindi $(-3;1)$.
La soluzione generale dell'equazione è $(-3+77k;1-9k)$
Il valore più piccolo che rende a positivo è $k=1$ che implica $c=-8$ e $b=-32$.
La lepre raggiungerà il valore di 200 (cm) con 74 salti in avanti da 36 cm e 32 salti indietro da 77 cm.
In totale $74+32=106$ salti.

13. IL REGALO DI CARLA [8748]





Risolviamo il problema in generale. Siano $AB=2a$ e $BC=2b$. $PK=b$ e $PD=PC=PA=\sqrt{a^2+b^2}$.
Determiniamo la misura di AK, altezza del triangolo isoscele CDA, base della piramide:
$AK=\sqrt{AD^2-KD^2}=\sqrt{4b^2-a^2}$. Sia $PH=h$ l'altezza della piramide. Guardando il triangolo APK possiamo scrivere che $\sqrt{PK^2-PH^2}+\sqrt{AP^2-PH^2}=AK$, quindi $\sqrt{b^2-h^2}+\sqrt{a^2+b^2-h^2}=\sqrt{4b^2-a^2}$.

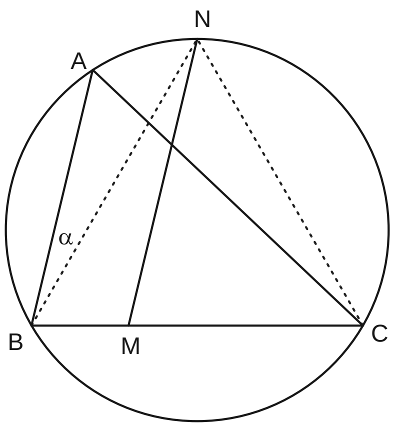
Risolvendo l'equazione possiamo determinare il valore di $h=a\sqrt{\dfrac{3b^2-a^2}{4b^2-a^2}}$.

Il volume del solido è $V_{ACDP}=\dfrac{1}{3}\dfrac{\cancel{2}a\cdot\sqrt{\cancel{4b^2-a^2}}}{\cancel{2}}\cdot a\sqrt{\dfrac{3b^2-a^2}{\cancel{4b^2-a^2}}}=\dfrac{a^2}{3}\sqrt{3b^2-a^2}$.

Con i valori in nostro possesso abbiamo

$$V_{ACDP}=\frac{27^2}{3}\sqrt{3(15\sqrt{3})^2-27^2}=8748\text{ cm}^3.$$

14. MISURARE LA TEMPERATURA [243]



Uniamo il punto N con B e C. Il triangolo BNC risulta essere equilatero in quanto $B\hat{N}C=B\hat{A}C$ e $BN=NC$ visto che N è il punto medio dell'arco BC. Sia l la misura del suo lato.
Detto $\alpha=A\hat{B}N$, osserviamo che $B\hat{N}M=A\hat{B}N=\alpha$ perché $AB\,||\,MN$, quindi $M\hat{N}C=60-\alpha=N\hat{B}C$. D'altra parte,
$A\hat{C}B=180°-B\hat{A}C-A\hat{B}C=180°-60°-(60°+\alpha)=60°-\alpha=M\hat{N}C$.
I triangoli ABC e MNC risultano essere simili, avendo due angoli congruenti ($B\hat{A}C=N\hat{C}M=60°$ e $A\hat{C}B=M\hat{N}C$).
La proporzione tra i lati è $MC:AB=NC:AC$.

Determinando MC: $MC=\dfrac{AB\cdot NC}{AC}=\dfrac{209\cdot l}{243}$.

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BC-MC}{MC}=\frac{l-\frac{209}{243}l}{\frac{209}{243}l}=\frac{\frac{34}{\cancel{243}}\cancel{l}}{\frac{209}{\cancel{243}}\cancel{l}}=\frac{34}{209}.$$

La risposta richiesta è $34+209=243$.

15. IL PAVIMENTO [4246]
Risolviamo il problema per ricorsione.
Sia $TN(n)$ il numero di modi per riempire una tabella $2\times n$ con le caselle della seconda riga tutte nere e sia $AB(n)$ il numero dei modi di riempire la stessa tabella ma con almeno una casella bianca nella seconda riga.
Osserviamo che, in generale $TN(n+1)=2\cdot TN(n)$ in quanto, noti i modi di colorare le caselle di una tabella $2\times n$, possiamo aggiungere un coppia di caselle potendo scegliere il colore solo della cella superiore, visto che quella della seconda riga deve essere nera. $AB(n+1)=3\cdot AB(n)+2\cdot TN(n)$. Infatti noti i modi per completare la tabella $2\times n$ in cui almeno una cella della riga inferiore è bianca, possiamo colorare le due nuove celle $N-N$, $B-B$ o $N-B$, ma non $B-N$ in quanto la casella nera risulterebbe bloccata. A queste vanno aggiunti i casi contati da $TN(n)$ in cui aggiungiamo una cella bianca nella seconda riga ed una cella di qualsiasi colore nella prima.
Siccome $TN(1)=2$ e $AB(1)=2$, possiamo riempire una tabella applicando la ricorsione fino al caso $n=7$ di cui ci interessa il valore $AB(7)+TN(7)$:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$TN(n)$	2	4	8	16	32	64	128
$AB(n)$	2	10	38	130	422	1330	4118

$AB(7)+TN(7)=128+4118=4246$

16. DOVE METTIAMO I REGALI? [839]
Cerchiamo qualche limitazione sulle variabili: $2x^2+5y^2\le 5+6xy$

$$x^2-3xy\le\frac{5}{2}(1-y^2)$$

$$x^2-3xy+\frac{9}{4}y^2\le\frac{5}{2}-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{4}y^2$$

$\left(x-\frac{3}{2}y\right)^2\le\frac{5}{2}-\frac{1}{4}y^2$, quindi

$\frac{5}{2}-\frac{1}{4}y^2\ge 0$ e di conseguenza $10-y^2\ge 0$ cioè $y=1$, $y=2$ oppure $y=3$.
Provando i tre casi si determina l'insieme A delle soluzioni che sono: $(1;1)$, $(2;1)$, $(3;1)$, $(2;2)$, $(3;2)$, $(4;2)$, $(4;3)$ e $(5;3)$.
La soluzione richiesta è $\sum_{(x;y)\in A}(x+y+100)=839$.

17. I DADI DI DANIELE [47]
Lanciamo prima di tutto il dado con i valori $\{1,2,3,7,8,9\}$.
Con probabilità $\frac{1}{2}$ otterrò un valore maggiore di 6 e quindi mi rimane una probabilità di $\frac{1}{6}$ di vedere i due dadi uguali dare lo stesso valore $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.
Con probabilità $\frac{1}{2}$ otterrò un valore minore di 6. Il secondo dado ha una probabilità di $\frac{1}{6}$ di darmi lo stesso valore e di $\frac{5}{6}$ di darmi un valore diverso. Nel primo caso il lancio del terzo dado è ininfluente, nel secondo, il terzo dado ha una probabilità di $\frac{2}{6}$ di darmi o il valore del primo dado o il valore del secondo.
Facendo le somme, la probabilità cercata è:

$$P(2\text{ dadi con lo stesso valore})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{11}{36}.$$

La risposta richiesta è $11+36=47$.

18. L'INCUBO DI AMEDEO [61]
I cavalieri si indicano uno con l'altro e quindi formano un ciclo. I furfanti possono fare quello che vogliono potendo creare anche cicli di lunghezza 2, indicandosi uno con l'altro. Per la condizione del problema che tutti puntano a persone differenti, si possono solo formare dei cicli chiusi di lunghezze variabili. La presenza di almeno un cavaliere ci assicura che il ciclo formato dai cavalieri è presente. L'unico caso in cui possiamo identificare con certezza il numero dei cavalieri si ha quando anche i furfanti formano cicli della stessa lunghezza. Siccome $3721=61^2$, l'unico caso possibile si ha quando sono presenti 61 cicli da 61 persone. I cavalieri sono 61.

19. ARMANDO COLPISCE ANCORA [6063]
Supponiamo sia n il grado del polinomio $p(x)$.

Dalla relazione assegnata osserviamo che il termine di sinistra avrà al massimo grado n, mentre quello di sinistra $2n-1$. Ne deduciamo che $n=1$ deve essere 1.

Sia $p(x)=ax+b$. A sinistra avremo un polinomio, mentre a destra dell'uguale avremo $\dfrac{a^2x^2+2abx+b^2}{2021x}$.

Da ciò si evince che $b=0$.
La relazione diventa quindi

$a(x-1)+ax+a(x+1)=\dfrac{a^2x}{2021}$, cioè $6063ax=a^2x$. Non potendo a essere uguale a 0 avremo che $a=6063$.

$p(1)=6063$.

20. IL SOGNO DI BEATRICE [1011]
Poniamo $y=0$ nella definizione, ottenendo $f\left(x+f(0)\right)=x+1$.

$f(0)$ è un valore fissato e quindi posso eseguire una traslazione $x \to x-f(0)$ ottenendo

$f\left(x\right)=x-f(0)+1$.

Poniamo $x=0$ ed otteniamo che $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

Quindi $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{2}$.

Il valore richiesto $f\left(\dfrac{2021}{2}\right)=\dfrac{2021}{2}+\dfrac{1}{2}=1011$.