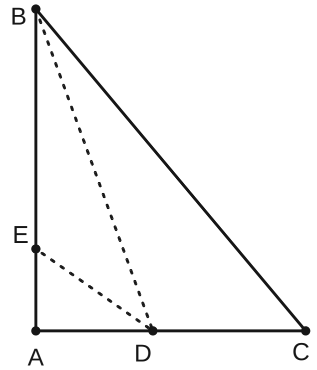
GARA DI MATEMATICA ON-LINE - BIENNIO (29/11/2021)



1. IL COLPO PERFETTO [125]

Se $B\hat{A}C = 90°$ e $A\hat{C}B = 50°$ allora $A\hat{B}C = 40°$ e $ABD = DBC = 20°$.
Segue che $A\hat{D}B = 180° - 90° - 20° = 70°$ e $A\hat{D}E = E\hat{D}B = 35°$.
$D\hat{E}B = 180° - 20° - 35 = 125°$.

2. MAIL BOMBING [192]

In questo momento i computer infetti sono 20. Tra dodici ore saranno il doppio e tra un giorno quattro volte tanti.
Il numero sarà pari a $20 \cdot 2^t$ dove t rappresenta il numero di volte che si è propagato il virus. Cerchiamo il più piccolo t per cui $20 \cdot 2^t > 10^6$, cioè
$2^{t+1} > 10^5$ che possiamo anche scrivere $2^{t+1} > 2^5 \cdot 5^5$, $2^{t-4} > 5^5 = 3125$. Ora siccome $2^{11} = 2048$ e $2^{12} = 4096$, $t - 4 = 12$ e quindi $t = 16$. Il numero di ore richiesto è $12 \cdot 16 = 192$.

3. GITA SUL MONTE FUJI [1820]

Viaggiando alla velocità di $90\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ $100\ \text{km}$ si percorrono in $t = \dfrac{100}{90} \cdot 3600\ \text{sec} = 4000\ \text{sec}$.
Il treno ci ha messo dalle 14:08 alle 15:45 e cioè $97\ \text{min} = 5820\ \text{sec}$. Il treno è stato fermo per $5820 - 4000 = 1820\ \text{sec}$.

4. LA COMBINAZIONE [3003]

Da 1 a 300 vi sono $300 : 10 = 30$ decine e la somma delle cifre delle unità di una decina vale 45. Vi sono inoltre 3 centinaia, e la somma delle cifre di una centinaia completa vale $45 \cdot 10$. Inoltre vi sono 100 volte le cifre 1 e 2 ed una sola volta la cifra 3 nella posizione delle centinaia.
Il totale è: $45 \cdot 30 + 45 \cdot 10 \cdot 3 + 3 \cdot 100 + 3 = 3003$.

5. VILLA GAVEZ [1860]

Detto x il lato corto e y il lato lungo del rettangolo, le informazioni del problema diventano:
$y^2 = 3720$ e $x : y = \dfrac{y}{2} : x$ che possiamo riscrivere $x^2 = \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{3720}{2} = 1860\ \text{m}^2$.

6. LETTERA A ZAZÀ [3750]

$$\left(\sqrt[6]{27} - \sqrt{6 + \frac{3}{4}}\right)^2 \cdot 5000 = \left(\sqrt[6]{3^3} - \sqrt{\frac{27}{4}}\right)^2 \cdot 5000 = \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 5000 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 5000 = \frac{3}{4} \cdot 5000 = 3750$$

7. I PROIETTILI DI JIGEN [402]

Chiudendo il settore circolare si ottiene un cono con circonferenza di base pari a $C = \dfrac{288}{360} \cdot 20\pi = 16\pi\ \text{mm}$ e apotema pari a $a = 10\ \text{mm}$. Il raggio della base risulta pari a $r = \dfrac{16\pi}{2\pi} = 8$. L'altezza del cono risulta pari a $h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{100 - 64} = 6\ \text{mm}$
Il volume è quindi $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 64 \cdot 6 = 128\pi \cong 402{,}1248\ \text{mm}^3$.

8. PASSATEMPI [58]

Lungo una delle tre direzioni il proiettile attraverserà tutti e venti i cubetti; aggiungendo la seconda dimensione, avremo altri 19 cubetti che verranno attraversati dal proiettile, così come lungo la terza. In totale il proiettile attraverserà al massimo $20+19+19=58$ cubetti.

9. POKER TRA AMICI [2860]

Partiamo dal risultato dell'ultima mano e risaliamo fino alle quantità iniziali di monete d'oro:

	Giocatore D	Giocatore C	Giocatore B	Giocatore A
Dopo la quarta mano	64	64	64	64 (P)
Dopo la terza mano	32	32	32 (P)	160
Dopo la seconda mano	16	16 (P)	144	80
Dopo la prima mano	8 (P)	136	72	40
All'inizio del gioco	132	68	36	20

La risposta richiesta è 2860.

10. LA CASSAFORTE IMPOSSIBILE [8430]

$36=9\cdot 4$ e quindi il numero dovrà seguire sia il criterio di divisibilità per 9 che per 4.
La somma delle cifre è pari a $33+A+B$, quindi $A+B\equiv 3 \bmod 9$, mentre la cifra B dovrà rendere il numero $80+B$ divisibile per 4, cioè dovrà essere 0, 4 o 8.
Se $B=0$, A può assumere il solo valore 3;
se $B=4$, $A\equiv 8 \bmod 9$ e quindi può assumere il solo valore 8;
se $B=8$, $A\equiv 4 \bmod 9$ e quindi può assumere il solo valore 4;
Il valore più grande si ottiene nel secondo caso, mentre quello più piccolo nel primo. La risposta è 8430.

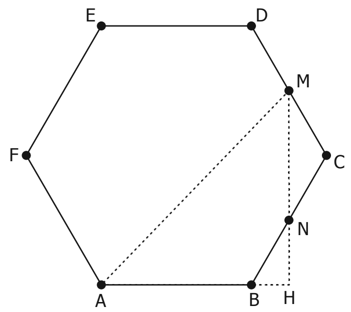
11. LA COLLANA DELLA REGINA [1923]

$4.037.880=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 19\cdot 23$.
La presenza contemporanea del 19 e del 23 fanno pensare al fatto che siano priprio loro il primo e l'ultimo dei cinque numeri consecutivi, infatti:
$19\cdot 20\cdot 21\cdot 22\cdot 23=19\cdot\left(2^2\cdot 5\right)\cdot\left(3\cdot 7\right)\cdot\left(2\cdot 11\right)\cdot 23=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 19\cdot 23$.

12. EREDITÀ [127]

Siano x le case ereditate a New York e y quelle ereditate a Los Angeles. Per semplicità di calcolo semplifichiamo tutti i valori per 100.000. Obiettivo, determinare il valore di $x+y$.
Il valore complessivo delle case è pari a $5x\cdot 28+14y\cdot 10=17780$, cioè $140x+140y=17780$, ovvero $x+y=127$.

13. RIFLESSIONE [3605]



Riferendosi alla figura a fianco, sia A il punto di partenza di Lupin ed M il punto in cui abbandona il sentiero per attraversare il prato percorrendo il segmento MA. Tracciamo la perpendicolare al lato AB uscente da M e calcoliamo le misure dei cateti AH e MH.
BNH è mezzo triangolo equilatero di lato 1, visto che MH deve attraversare BC nel suo punto medio, quindi $BH=\frac{1}{2}$ e cioè $AH=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

$MH=3\cdot NH=3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Per il teorema di Pitagora $AM = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{52}{4}} = \sqrt{13}$. Ci resta il problema di stimare il valore di $\sqrt{13}$ approfittiamo del fatto che il problema ci chiede la risposta in metri:
$\sqrt{13}\ \mathrm{km} = \sqrt{13} \cdot 1000\ \mathrm{m}$ e quindi dobbiamo calcolare l'approssimazione alla cifra delle unità di $\sqrt{13.000.000}$ ora sicuramente il valore cercato inizia con la cifra 3, perché $3 = \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$.
Procediamo per approssimazioni successive:
$36 = \sqrt{1296} < \sqrt{1300} < \sqrt{1369} = 37$;
$36 = \sqrt{1296} < \sqrt{1300} < \sqrt{1369} = 37$;
$360 = \sqrt{129600} < \sqrt{130000} < \sqrt{130321} = 361$ ed infine
$3605 = \sqrt{12.996.025} < \sqrt{13.000.000} < \sqrt{13.003.236} = 3606$.

14. QUESTIONE DI SPADA [150]
L'asse minore dell'ellisse è pari al diametro, quindi l'asse maggiore è $5 \cdot 30 = 150\ \mathrm{cm}$.

15. COMBINAZIONI ALGEBRICHE [9805]
Cerchiamo di fattorizzare uno dei due polinomi:
$x^4 + 6x^2 + 25 = x^4 + 10x^2 + 25 - 4x^2 = \left(x^2+5\right)^2 - 4x^2 = \left(x^2+2x+5\right)\left(x^2-2x+5\right)$.
Entrambi i polinomi di secondo grado sono irriducibili in $\mathbb{R}$.
Uno dei due è il candidato divisore di $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$.
Provando ad eseguire le due divisioni si scopre che $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5 = (3x^2+6x+1)(x^2-2x+5)$.
$p(x) = x^2 - 2x + 5$, $p(100) = 9805$.

16. LA TORTA[185 (8or 4 ver)]
Siano n i tagli perpendicolari al piano della torta. Il numero di fette è pari a $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.
Visto che per ogni taglio orizzontale il numero di fette raddoppia, con $12-n$ tagli orizzontali il numero di fette diventa $\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right) \cdot \left(12 - n + 1\right)$.
Dobbiamo scegliere n affinché $\left(\frac{n^2+n+2}{2}\right) \cdot \left(13-n\right)$ sia il più grande possibile. Procedendo per tentativi scopriamo che:

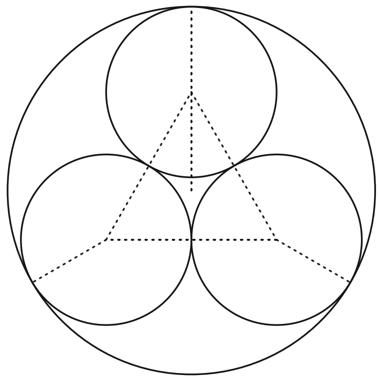
n	Fette
5	128
6	154
7	174
8	185
9	184
10	168

Il massimo (185) si ottiene con 8 tagli verticali e 4 orizzontali.

17. AVVERTIMENTO [2858]

$7 | n^2 + 3n - 4$. Fattorizzando il polinomio, $7 | (n-1)(n+4)$ ciò vuol dire che o $7 | (n-1)$ o $7 | (n+4)$.
Contiamo separatamente i valori di n:
$7 | (n-1) \Rightarrow n-1 = 7k \Rightarrow n = 7k+1$ da cui segue che essendo $0 \le n \le 10.000$, $0 \le 7k+1 \le 10.000$, $0 \le k \le 1428$ accade per 1429 valori di k.
$7 | (n+4) \Rightarrow n+4 = 7k \Rightarrow n = 7k-4$ da cui segue che essendo $0 \le n \le 10.000$, $0 \le 7k-4 \le 10.000$, $1 \le k \le 1429$ accade per altri 1429 valori di k.
In totale avremo 2858 valori possibili.

18. LE PERLE DELLA REGINA [46]



Unendo i centri delle tre circonferenze e prolungando uno dei tre raggi (r) fino a raggiungere il centro dalla circonferenza più grande, si può osservare come il raggio della scatola (R) sia pari alla misura di un raggio piccolo più i due terzi dell'altezza del triangolo equilatero:

$R = r + \frac{2}{3} r\sqrt{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} r$ da cui, ricavando r si ottiene che

$$r = \frac{3}{3+2\sqrt{3}} R = \frac{3\left(3-2\sqrt{3}\right)}{9-12} 100 = \left(2\sqrt{3}-3\right) \cdot 100 = 46,4 \text{ mm}.$$

19. LA ZINGARA [221]

Vi sono in tutto $20 \cdot 20 = 400$ possibilità. Rappresentiamo il tutto in una tabella e cerchiamo in quali casi si ottiene un quadrato perfetto:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	X			X					X							X				
2		X						X										X		
3			X									X								
4	X			X					X							X				
5					X															X
6						X														
7							X													
8		X						X												
9	X			X					X									X		
10										X						X				
11											X									
12			X									X								
13													X							
14														X						
15															X					
16	X			X					X							X				
17																	X			
18		X						X										X		
19																			X	
20					X															X

$$P(ab = n^2) = \frac{42}{400} = \frac{21}{200}$$

20. LA CASSETTA DEL NONNO [123]

Sommiamo le frazioni e cerchiamo di fattorizzare il numeratore ottenuto:

$$S = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2c + ab^2 + bc^2 + a^2b + ac^2 + b^2c}{abc} = \frac{(ab+bc+ac)(a+b+c) - 3abc}{abc}.$$

Inserendo le informazioni relative alle relazioni tra soluzioni e coefficienti si ottiene:

$$S = \frac{(ab+bc+ac)(a+b+c) - 3abc}{abc} = \frac{-12 \cdot 21 + 6}{-2} = 123.$$