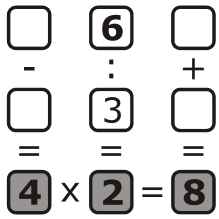
ALLENAMENTO ON-LINE Biennio
(9-11-2020)

1. PRIVET DRIVE [0428]



Si osserva che sopra la casella contenente il numero 3 può essere piazzato solamente il numero 6, e di conseguenza sotto di essa il numero2. A questo punto rimane una sola possibilità per la terza riga: $4 \times 2 = 8$. Non serve altro per dare la risposta richiesta.

2. RETTILARIO [0189]

Chiamando la base x, l'altezza risulta essere di $h = 2x + 3$. Sappiamo che il perimetro è di 60, quindi
$2(x+h) = 2(x+2x+3) = 60$, da cui segue che $x = 9$ e che $h = 21$. L'area richiesta è dunque $189\,\mathrm{m}^2$.

3. LETTERE DA NESSUNO [4264]

Rappresentiamo in una tabella la successione:

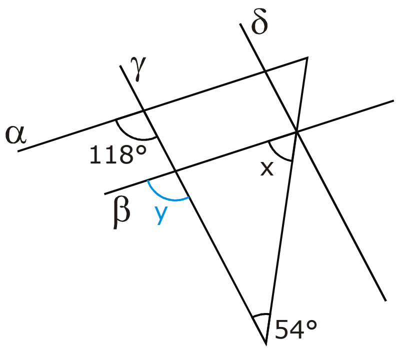
Mercoledì	$a_1 = 1$
Giovedì	$a_2 = 1$
Venerdì	$a_3 = 2a_2 + 10a_1 = 2 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 12$
Sabato	$a_4 = 2a_3 + 10a_2 = 2 \cdot 12 + 10 \cdot 1 = 34$
Domenica	$a_5 = 2a_4 + 10a_3 = 2 \cdot 34 + 10 \cdot 12 = 188$
Lunedì	$a_6 = 2a_5 + 10a_4 = 2 \cdot 188 + 10 \cdot 34 = 716$
Martedì	$a_7 = 2a_6 + 10a_5 = 2 \cdot 716 + 10 \cdot 188 = 3312$

Il totale di lettere ricevute è quindi $1+1+12+34+188+716+3312 = 4264$

4. IL CUSTODE DELLE CHIAVI [0000]

$1^x + 2^{2x} + 3^{3x} + 4^{4x} + 5^{5x} = 5$
Si osserva subito che l'unico modo per ottenere 5 dalla somma è che ciascun termine valga 1, cosa che avviene se tutti gli esponenti sono zero.
$x = 0$ è l'unica soluzione.

5. IL PAIOLO MAGICO [0064]



Osservando la figura si nota che l'angolo indicato con y vale anch'esso $118°$ in quanto angoli corrispondenti tra le due rette parallele α e β, ma è anche somma tra x e $54°$ in quanto angolo esterno del triangolo formato da β, γ e la trasversale. Ne segue che $x = 118° - 54° = 64°$

6. LA GRINGOTT [0054]

Indichiamo con una terna ordinata $(G;F;Z)$ quante monete per tipo prendiamo.
Osserviamo che il cambio dei maghi prevede 1 galeone = 493 zellini, quindi non potremmo prendere più di 2 galeoni.
Con 2 galeoni, ci restano da prendere 14 zellini, cosa che possiamo fare in un solo modo: $(2;0;14)$
Prendendo 1 galeone e il massimo numero di falci, avremmo $(1;17;14)$, infatti $1000 - 493 = 507$ e $507 : 29 = 17$ con resto 14. Abbiamo quindi 18 possibili scelte da $(1;17;14)$ a $(1;0;b)$ diminuendo ogni volta di 1 falce fino ad arrivare a zero e prendendo i relativi zellini, che non è necessario calcolare.
Scegliendo di non prendere alcun galeone, il massimo numero di falci è $1000 : 29 = 34$ con resto di 14.
Tra $(0;34;14)$ e $(0;0;1000)$ vi sono 35 possibili scelte.
In tutto ho $1 + 18 + 35 = 54$ diverse possibilità.

7. SFERE DI CRISTALLO [0990]

Se i diametri sono in relazione $2:3:4$, i volumi sono in relazione $2^3 : 3^3 : 4^3$.
Se la prima pesa $80\,\mathrm{kg}$, la seconda pesa $270\,\mathrm{kg}$ e la terza $640\,\mathrm{kg}$, per un totale di $990\,\mathrm{kg}$

8. DOLCI MAGICI [0016]
Dovendo mettere lo stesso numero di decorazioni su ogni torta, il massimo numero possibile di torte è il $M.C.D.(80;112;128)=16$.

9. IL BINARIO NOVE E TRE QUARTI [0400]
Indichiamo con s la lunghezza del tragitto e con t il tempo che impiega solitamente per percorrerlo.
Dai dati del problema possiamo scrivere che

$$s = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}(t - 84\,\text{min})$$
$$s = 50\frac{\text{km}}{\text{h}}(t + 96\,\text{min})$$

Confrontando le due relazioni e risolvendo, possiamo calcolare t:

$$80(t-84) = 50(t+96)$$
$$8(t-84) = 5(t+96)$$
$$8t - 672 = 5t + 480$$
$$3t = 1152$$
$$t = 384\,\text{min}$$

Possiamo calcolare s usando una delle due relazioni: $s = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}300\,\text{min} = 400\,\text{km}$

10. IN VIAGGIO VERSO HOGWARTS [1000]
Il biglietto del treno deve essere nella forma $ABCBA$, dove possiamo scegliere A, B e C in 10 modi possibili.
Il totale dei biglietti è $10^3 = 1000$

11. IL CAPPELLO PARLANTE [0565]
Raccogliamo le informazioni:
1. le 6 cifre che lo compongono sono tutte diverse
2. la cifra più piccola è la seconda
3. le prime due cifre sommate danno 4
4. la cifra più grande è la quinta
5. la terza cifra è un 2
6. la prima e l'ultima cifra differiscono per una unità
7. la somma di tutte le cifre è 16.
8. le due ultime cifre sommate danno 9

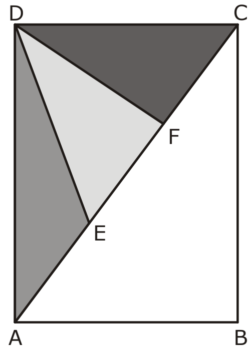
Se il numero è ABCDEF, la 5. ci permette di fissare la prima cifra: AB2DEF.
Ricordando la condizione 1., la condizione 2 e la condizione 3. per le prime due cifre AB ci da due possibilità: 40 o 31.
Osserviamo la condizione 8. e la condizione 6. che ci danno informazioni sulle ultime due cifre EF.
31 è compatibile solamente con 72, ma il 2 è già stato usato, mentre è incompatibile con 36, visto che il 3 non può essere ripetuto.
40 è compatibile solamente con 63 e non con 45 in quanto il 4 non può essere ripetuto
Ci resta 1 sola possibilità:
402D63
Ora la condizione 7. ci permette di scoprire che il valore di D è 1.
Il numero cercato è 402163

12. IL MAESTRO DELLE POZIONI [0060]
Da $MCD(o,l)=3$ segue che $o = 3\cdot o'$ e $l = 3\cdot l'$;
da $MCD(l,a)=4$ segue che $l = 3\cdot 4\cdot l''$ e $a = 4\cdot a'$;
da $MCD(o,a)=5$ segue che $o = 3\cdot 5\cdot o''$ e $a = 4\cdot 5\cdot a'$

Le quantità sono minimi, quindi $a''=1$, $o''=1$ e $l''=1$ e
$a = 20$, $o = 15$ e $l = 12$ che hanno $m.c.m.(20;15;12) = 60$

13. LEZIONE DI VOLO [0465]
Hermione è alta $160\,\mathrm{cm}$ mentre Harry $155\,\mathrm{cm}$.
Se x è la lunghezza dell'ombra di Harry e di $x+15$ l'ombra di Hermione, possiamo impostare la seguente proporzione:
$160:155 = x+15 : x$

Da cui segue che
$160x = 155(x+15)$
$5x = 155 \cdot 15$
$x = 465\,\mathrm{cm}$



14. LA SIGNORA GRASSA [0400]
I tre triangoli hanno tutti la stessa area in quanto usando $AE = EF = FC$ come base, l'altezza per tutti e tre è la medesima.
Il rettangolo è quindi scomposto in 6 triangoli tutti della stessa area.

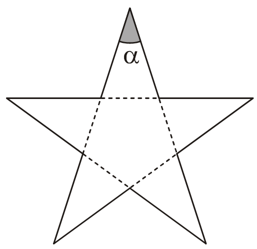
l'area di DEF è quindi $\dfrac{80 \cdot 30}{6} = 400$ spanne quadrate.

15. TROLL [0004]
Calcoliamo la cifra delle unità dei singoli addendi.
5^{2011}, essendo un potenza di 5 ha sicuramente 5 come ultima cifra, così come 6^{2011}, visto che tutte le potenze di 6 hanno proprio 6 come cifra finale.
Resta da calcolare l'ultima cifra di 7^{2011}.
Calcoliamo le prime potenze di 7 alla ricerca della sua periodicità:
7^1 ha come ultima cifra 7
7^2 ha come ultima cifra 9 ($7 \cdot 7$)
7^3 ha come ultima cifra 3 ($9 \cdot 7$)
7^4 ha come ultima cifra 1 ($3 \cdot 7$)
7^5 ha come ultima cifra 7 ($1 \cdot 7$)
La periodicità è quindi 4.

$2011 : 4 = 502$ con resto 3, quindi 7^{2011} ha la stessa ultima cifra di 7^3, cioè 3.

La cifra finale di $5^{2011} + 6^{2011} + 7^{2011}$ è 4, infatti $5+6+3=14$.

16. QUIDDITCH [0040]
Possiamo semplificare il problema immaginando Terence Fermo ed Harry che fa il giro dello stadio 8 volte in due minuti. Così risulta semplice calcolare che in 10 minuti, Harry incontra Terence 40 volte.



17. UN REGALO SPECIALE [0036]
Gli angoli interni di un pentagono sono di 108°, quindi il suo supplementare è di 72°.
La misura dell'angolo cercato è $\alpha = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$

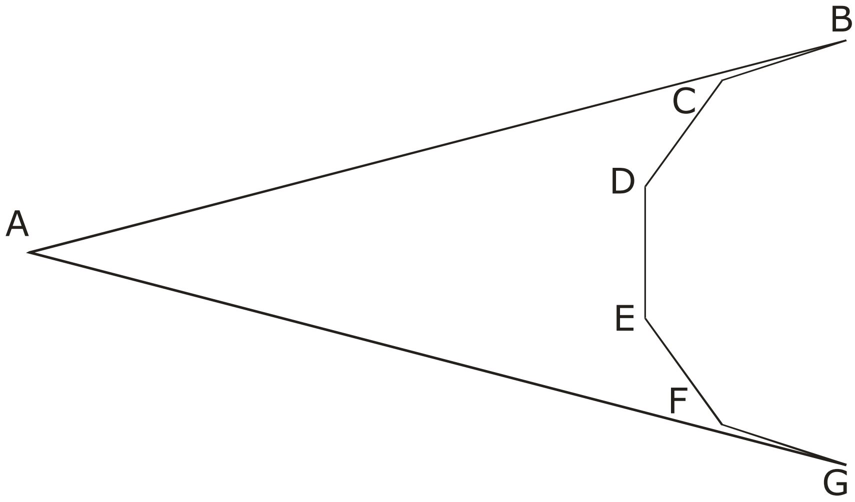
18. NICOLAS FLAMEL [1025]
Il numero cercato è nella forma:

A	B	C	D	E	4	x
					4	
4	A	B	C	D	E	

Semplicemente svolgendo i calcoli si trovano via via tutte le cifre:

1	0	2	5	6	4	x
					4	
4	1	0	2	5	6	

19. LA FORESTA PROIBITA [0010]

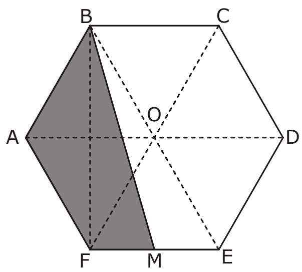


Un possibile ettagono concavo è quello rappresentato in figura.
Si osserva che dai vertici B e G è possibile tracciare 4 diagonali, mentre dai vertici C,D,E e F si possono tracciare solo 3 diagonali. Il calcolo fatto sui vertici, però conta 2 volte una stessa diagonale.

$$diagonali = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{2} = 10$$

20. FUFFI [0800]

I due triangoli ABF e BFM ha un'area pari a quella di BOC in quanto ciascuno ha un'altezza doppia ed una base pari a metà lato.



$$A_{ABMF} = A_{ABF} + A_{BFM} = 2 \cdot A_{BOC} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2400 = 800\,\mathrm{dm}^2$$

21. LE CHIAVI ALATE [3179]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Prima riflessione:
In posizione 10 può starci solo lo 0, mentre in posizione 5 ci va la cifra 5 senza altre possibilità.
In posizione 2-4-6-8 vanno le cifre pari, mentre in posizione 1-3-7-9 vanno le cifre dispari (5 esclusa)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				5					**0**
1 3 7 9	2 4 6 8	1 3 7 9	2 4 6 8		2 4 6 8	1 3 7 9	2 4 6 8	1 3 7 9	

Esaminiamo ora la cifra in posizione 4.
Il criterio di divisibilità per 4 ci porta ad escludere immediatamente le cifre 4 e 8 da questa posizione (infatti 14,34,74,94,18,38,68,98 non sono divisibili per 4)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				5					**0**
1 3 7 9	2 4 6 8	1 3 7 9	2 6		2 4 6 8	1 3 7 9	2 4 6 8	1 3 7 9	

Il blocco 4-5-6 deve dare un numero divisibile per 3, visto che le cifre 1-2-3 lo saranno certamente.
Si aprono 2 sole possibilità:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			2	5	8				0
1 3 7 9	4 6	1 3 7 9				1 3 7 9	4 6	1 3 7 9	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			6	5	4				0
1 3 7 9	2 8	1 3 7 9				1 3 7 9	2 8	1 3 7 9	

<u>Analizziamo la prima:</u>
valutiamo le due possibilità date dalla scelta delle cifre pari mancanti:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	4		2	5	8		6		0
1 3 7 9		1 3 7 9				1 3 7 9		1 3 7 9	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	6		2	5	8		4		0
1 3 7 9		1 3 7 9				1 3 7 9		1 3 7 9	

In posizione 7 deve esserci una cifra che faccia si che il blocco 6-7-8 sia divisibile per 8 (criterio di divisibilità per 8)
La seconda scritta (quella con il 4 in posizione 8 non ha alcuna soluzione (814, 834, 874 e 894 non sono divisibili per 8)
La prima ha due sole terne di numeri che rispettano il criterio di divisibilità per 8:
816 oppure 896, di cui solo la seconda è accettabile per il criterio di divisibilità per 9 che prevede che la somma delle cifre delle celle 7-8-9 sia divisibile per 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	4		2	5	8	9	6	3	0
1 7		1 7							

Nessuna delle configurazioni delle prime 7 cifre rimaste mi darà un numero divisibile per 7.

<u>Analizziamo la seconda:</u>
valutiamo le due possibilità date dalla scelta delle cifre pari mancanti:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2		6	5	4		8		0
1 3 7 9		1 3 7 9				1 3 7 9		1 3 7 9	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	8		**6**	**5**	**4**		**2**		**0**
1 3 7 9		1 3 7 9				1 3 7 9		1 3 7 9	

La prima è già da scartare perché non rispetta il criterio di divisibilità per 8 delle caselle 6-7-8.

Le solo cifre che possono occupare la posizione 7 della seconda possibilità sopra scritta sono 3 e 7 si aprono 4 possibili scenari:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	8		**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
7 9		7 9		5					

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	8		**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**7**	**0**
1 9		1 9							

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	8		**6**	**5**	**4**	**7**	**2**	**3**	**0**
1 9		1 9							

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	8		**6**	**5**	**4**	**7**	**2**	**9**	**0**
1 3		1 3							

Nessuna delle prime 3 configurazioni rispetta la divisibilità per 7, solo l'ultimo caso riportato è risolto da:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**8**	**1**	**6**	**5**	**4**	**7**	**2**	**9**	**0**

22. LA SCACCHIERA [0084]
Vi sono $7 \cdot 7$ quadrati 2x2,
$5 \cdot 5$ quadrati 4x4
$3 \cdot 3$ quadrati 6x6
ed un solo quadrato 8x8, per un totale di $49+25+9+1=84$ quadrati.

23. L'ENIGMA DELLE POZIONI [0060]
Dovendo scegliere 2 ingredienti da coppie diverse, Hermione ha a sua disposizione 12 ingredienti per la prima scelta e 10 per la seconda, da dividere per 2 in quanto l'ordine di scelta non conta

$\frac{12 \cdot 10}{2} = 60$ pozioni

24. L'UOMO DAI DUE VOLTI [0021]
Primo metodo:

osservo che:

$$1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2-\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{9}{1000}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^4-\left(\frac{1}{10}\right)^5=\frac{9}{100000}$$

Etc…

Quindi la somma cercata è:

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{100000}+\ldots=0,\overline{90}=\frac{90}{99}=\frac{10}{11}$$

Secondo metodo:

Metto assieme tutti i numeri positivi e quelli negativi:

$$P=1+\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\ldots=1,\overline{01}=\frac{101-1}{99}=\frac{100}{99}$$

$$N=\frac{1}{10}+\frac{1}{1000}+\ldots=0,\overline{10}=\frac{10}{99}$$

$$P-N=\frac{90}{99}=\frac{10}{11}$$