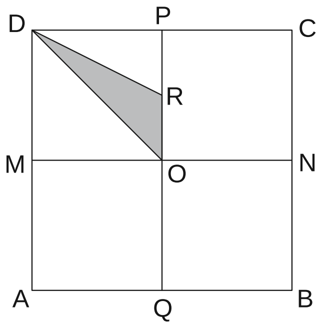
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (11/10/2021)

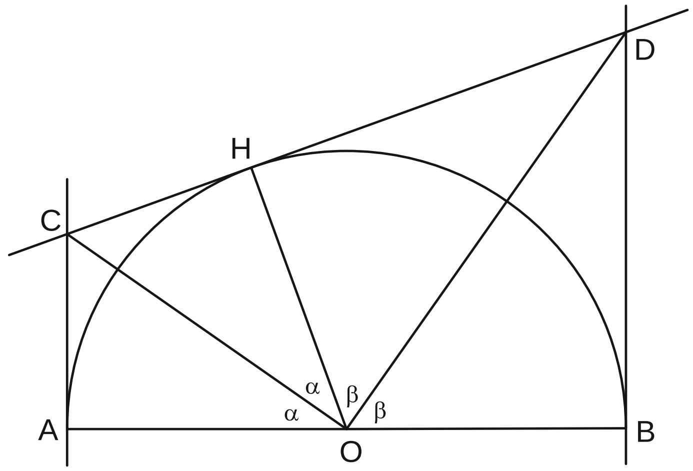
1. PROBLEMA QUADRATO [576]



Osserviamo che $A_{DOR} = A_{DPR}$.

$$A_{ABCD} = 4 \cdot A_{DMOP} = 4 \cdot 2 \cdot A_{DOM} = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot A_{DOR} = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 36 = 576 \text{ cm}^2$$

2. CIRCONFERENZA E TANGENTI [500]



Sia H il terzo punto di tangenza. Il triangolo COD è rettangolo, in quanto $2\alpha + 2\beta = 180°$ e quindi $\alpha + \beta = 90°$. La richiesta del problema diventa:

$AC^2 + BD^2 = CH^2 + DH^2 = (CH + DH)^2 - 2 \cdot CH \cdot DH = CD^2 - 2OH^2$, dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttato il Secondo Teorema di Euclide ($OH^2 = CH \cdot DH$).

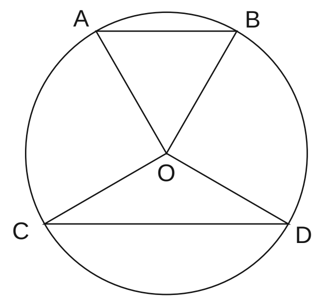
Dai dati iniziali possiamo calcolare:

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 = 300 + 600 = 900 \text{ cm}^2 \text{ e } OH = \frac{CO \cdot OD}{CD} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{6}}{30} = 10\sqrt{2} \text{ cm}.$$

La soluzione richiesta è

$$AC^2 + BD^2 = CD^2 - 2OH^2 = 900 - 2 \cdot 200 = 500 \text{ cm}^2.$$

3. CORDE NELLA CIRCONFERENZA [243]



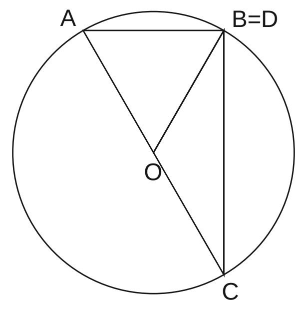
Prima soluzione:

Osserviamo che i due triangoli mistilinei AOC e BOD formano mezzo cerchio in quanto gli angoli al centro $A\hat{O}B = 60°$ e $C\hat{O}D = 120°$.

L'area del quadrilatero mistilineo è data da:

$$A_{ABDC} = 2 \cdot A_{AOC} + A_{ABO} + A_{CDO} = \frac{1}{2}\pi 10^2 + \frac{1}{2}10 \cdot \frac{10}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 5 =$$

$$= 50\pi + 50\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cong 243,68 \text{ cm}^2$$



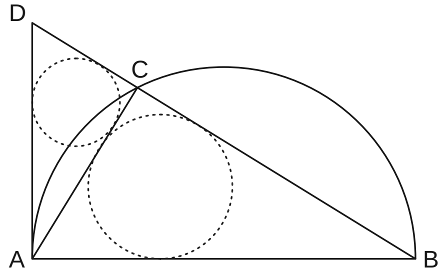
Seconda soluzione

Ruotando il triangolo COD fino a far coincidere D con B si costruisce un triangolo ABC rettangolo in B.

L'area cercata è la somma dell'area del triangolo con mezzo cerchio:

$$A = \frac{\pi 10^2}{2} + \frac{10\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 50\pi + 50\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cong 243,68 \text{ cm}^2.$$

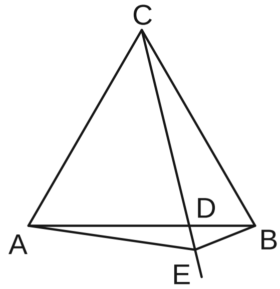
4. UN TRIANGOLO INSCRITTO [49]



I triangoli ABC e ADC sono simili ed il loro rapporto è anche il rapporto tra le due circonferenze richieste. Visto che, dai dati del problema, $\frac{BC}{AC}=7$, il rapporto $\frac{ABC}{ADC}=7^2=49$.

5. DA UN TRIANGOLO EQUILATERO [150]

Prima soluzione

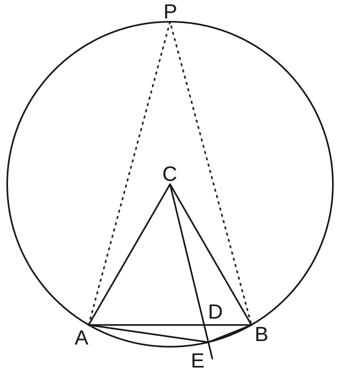


Sia $A\hat{C}E=2x$. Il triangolo ACE è isoscele, visto che $CA=CE=a$ e quindi $A\hat{E}C=\frac{180°-2x}{2}=90°-x$.

Anche il triangolo ECB è isoscele dato che $CE=CB$. L'angolo al vertice misura $E\hat{C}B=60°-2x$ e gli angoli alla base $C\hat{E}B=\frac{180°-(60°-2x)}{2}=60°+x$.

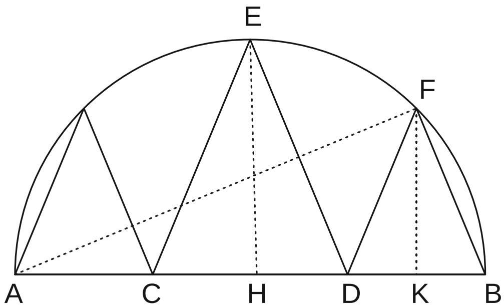
$A\hat{E}B=A\hat{E}C+C\hat{E}B=90°+x+60°-x=150°$.

Seconda soluzione



Tracciando da C la circonferenza Γ di raggio a, dai dati del problema, avremo che A, B ed E vi appartengono. Prendendo su Γ un ulteriore punto P avremo che il quadrilatero $APBE$ è ciclico. Siccome $A\hat{P}B=30°$ per il teorema degli angoli al centro e alla circonferenza, $A\hat{E}B=180°-A\hat{P}B=180°-30°=150°$.

6. TRE TRIANGOLI [585]



Riferendoci alla figura a fianco, sia $DK=KB=x$.

I tre triangoli, avendo gli stessi angoli, sono simili. Sia k il loro rapporto di similitudine. Accede che $CH=HD=kx$ e quindi $HB=EH=2x+kx=500\sqrt{2}$ cm ($x=\frac{500\sqrt{2}}{2+k}$). Sempre sfruttando la similitudine, $FK=\frac{2x+kx}{k}$

Il triangolo AFB è rettangolo, vale il Secondo Teorema di Euclide e quindi $AK\cdot KB=FK^2$ da cui si ottiene:

$(3x+2kx)kx=\left(\frac{2x+kx}{k}\right)^2$ cioè

$\cancel{x^2}(3k+2k^2)=\cancel{x^2}\left(\frac{2+k}{k}\right)^2$

$2k^2+3k=\frac{k^2+4k+4}{k}$

$2k^3+2k^2-4k-4=0$

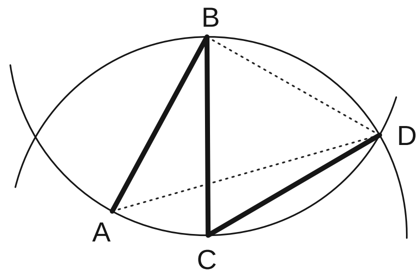
$k^3+k^2-2k-2=0$

$(k+1)(k^2-2)=0$

Essendo $k>0$, l'unica soluzione accettabile è $k=\sqrt{2}$.

$CD=2kx=2\sqrt{2}\frac{500\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2000}{2+\sqrt{2}}=\frac{2000(2-\sqrt{2})}{2}=1000(2-\sqrt{2})\text{ cm}=585{,}8\text{ cm}$.

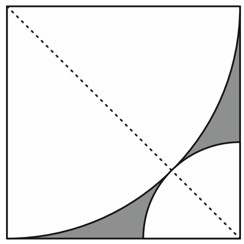
7. A ZIG ZAG [48]



Essendo $A\hat{B}C = 24°$ e $C\hat{D}A = 12°$, possiamo vedere la poligonale inserita nella circonferenza di centro B e raggio $BA = BC = BD$ utilizzando $A\hat{B}C$ come angolo al centro relativo all'angolo alla circonferenza . $C\hat{D}A$. Il triangolo BCD risulta essere equilatero e il triangolo BAD isoscele di base AD e angolo al vertice $60° + 24° = 84$.

$D\hat{A}B$ è l'angolo alla base e misura $\frac{180° - 84°}{2} = 48°$.

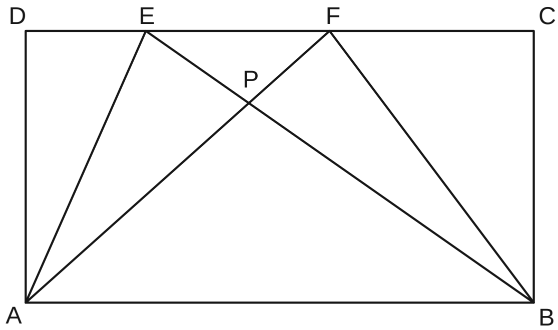
8. QUARTI NEL QUADRATO [798]



I raggi dei due quarti di cerchio misurano 100 cm e $100\sqrt{2} - 100 \text{ cm}$.
L'area della parte grigia si può ottenere per differenza tra l'area del quadrato e la superfice dei due quarti di circonferenza:

$$A = 100^2 - \frac{100^2 \pi}{4} - \frac{\left(100(\sqrt{2}-1)\right)^2 \pi}{4} = 100^2 \left(1 - \pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right) \cong 798,46 \text{ cm}^2 .$$

9. IL RETTANGOLO [408]



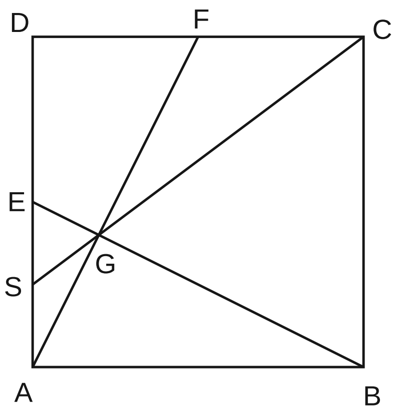
$ABFE$ è un trapezio. Per le note proprietà risulta che i triangoli ABP e EFP sono simili, con rapporto di similitudine $\sqrt{\frac{384}{24}} = 4$ e che $A_{APE} = A_{PBF} = \sqrt{384 \cdot 24} = 96 \text{ cm}^2$.
Ora l'area del trapezio può essere scritta in funzione della base e dell'altezza nel modo seguente:

$A_{ABFE} = \frac{(AB + EF) \cdot AD}{2} = \frac{5}{8} AB \cdot AD$ da cui possiamo ricavare:

$$A_{ABCD} = AB \cdot AD = \frac{8}{5} A_{ABFE} = \frac{8}{5}(384 + 96 + 96 + 24) = 960 \text{ cm}^2 .$$

$$A_{PBCF} = A_{ABCD} - A_{APED} - A_{EPF} - A_{ABP} = 960 - 144 - 384 - 24 = 408 \text{ cm}^2 .$$

10. SEGMENTI NEL QUADRATO [30]



Per come è costruita la figura, $AF \perp BE$, quindi AG è l'altezza del triangolo rettangolo ABE.

$$AG = \frac{24 \cdot 12}{\sqrt{24^2 + 12^2}} = \frac{24\sqrt{5}}{5} \text{ cm} .$$

$$EG = \sqrt{12^2 - \frac{24^2 \cdot 5}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ cm} .$$

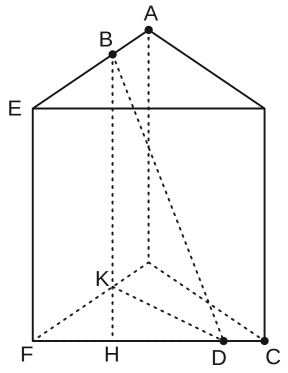
$$GB = 12\sqrt{5} - \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{48\sqrt{5}}{5} \text{ cm} .$$

Osserviamo che $\frac{GB}{EG} = 4$ che è il rapporto di similitudine tra i triangoli ABG e AGE.

Ora sono simili, con lo stesso rapporto, anche i triangoli ESG e CGB, quindi $ES = \frac{1}{4} BC = 6 \text{ cm}$.

S risulta essere il punto medio di EA, quindi $SG = ES$ in quanto mediana del triangolo rettangolo EGA.
Se $GC = 4 \cdot SG = 24 \text{ cm}$.
$CS = SG + GC = 30 \text{ cm}$.

11. UN SOLIDO ESPLOSO [118]



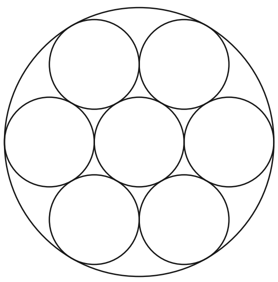
Il solido è un prisma a base triangolare. Sia K la proiezione di B sulla base inferiore del solido, e sia H la perpendicolare mandata da K sul lato FC. Il triangolo FHK risulta essere mezzo triangolo equilatero.

Si ha: $EB = FK = 72 \text{ cm}$, $FH = 36 \text{ cm}$, $KH = 36\sqrt{3} \text{ cm}$.

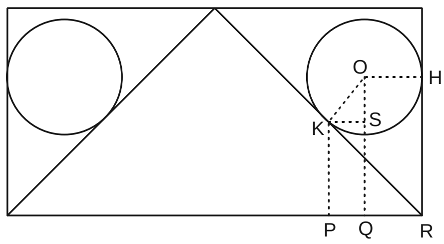
$HD = FC - FH - DC = 44 \text{ cm}$.

$BD = \sqrt{HD^2 + KH^2 + BK^2} = \sqrt{44^2 + (36\sqrt{3})^2 + 90^2} = 118 \text{ cm}$.

12. GEOMETRIA SOLIDA [22]



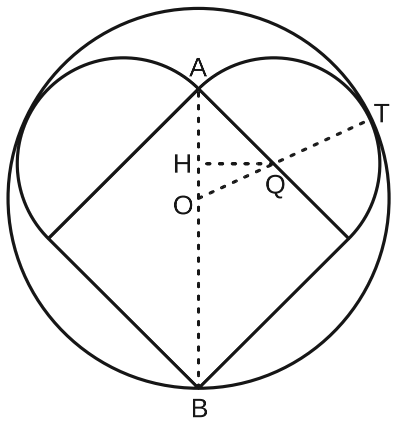
La situazione, guardando il problema dall'alto è quella riportata nella figura a sinistra. Le sei sferette hanno raggio pari ad un terzo del raggio del cilindro e misurano 10 cm.
Sezioniamo ora la figura con un piano perpendicolare alla base e passante per il centro di una delle sei sferette. La situazione è riportata nella figura a destra. Si formano angoli di 90° o di 45°, per cui:



$$OQ = OS + SQ = OS + KP = OS + PR = OS + KS + OH = 2OS + OH = 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} + 10 = 10 + 10\sqrt{2} \text{ cm}.$$

La risposta richiesta è $10 + 10 + 2 = 22$.

13. I ♥ GEOMETRIA [891]



Sia x la misura del raggio cercato. Tracciamo AB la diagonale del quadrato. Il centro O della circonferenza, il centro Q della semicirconferenza e il punto di tangenza sono tra loro allineati. Tracciamo la perpendicolare ad AB uscente da Q e sia H il piede di tale perpendicolare.

Sappiamo che $AB = \sqrt{2} \text{ m}$, $AQ = \frac{1}{2} \text{ m}$, $AH = QH = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ m}$.

$OQ = OT - QT = x - \frac{1}{2}$; $AO = AB - OB = \sqrt{2} - x$;

$OH = AO - AH = AB - OB - AH = \sqrt{2} - x - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} - x$.

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo OQH si ha:

$OH^2 + QH^2 = OQ^2$. Inserendo quanto trovato finora si ha l'equazione

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{9}{8} + \cancel{x^2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{8} = \cancel{x^2} + \frac{1}{4} - x$$

$$\left(\frac{3\sqrt{2} - 2}{2}\right)x = 1$$

$$x = \frac{2}{3\sqrt{2} - 2} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2} + 2}{14} = \frac{3\sqrt{2} + 2}{7} \text{ m} = \frac{3\sqrt{2} + 2}{7} \cdot 1000 \text{ mm} = 891{,}8 \text{ mm}$$

14. PIÙ TDN CHE GEO [18]

L'altezza h del triangolo misura $h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$ e quindi l'area vale $A=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$. $P=2a+b$.

Dai dati del problema si ha $2a+b=\frac{b^2}{16}\left(4a^2-b^2\right)$ che possiamo anche scrivere fattorizzando:

$$\cancel{2a+b}=\frac{b^2}{16}\cancel{(2a+b)}(2a-b)$$

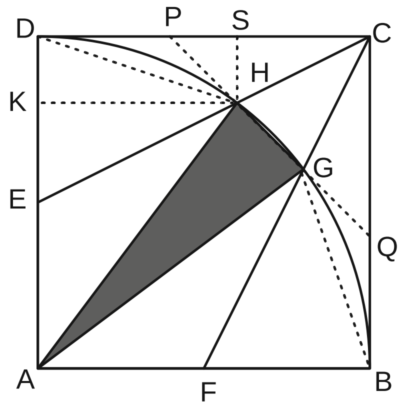
$16=b^2(2a-b)$. Ricaviamo a in funzione di b:

$$2a=\frac{16}{b^2}+b.$$

$$P=2a+b=\frac{16}{b^2}+2b.$$

Il massimo valore intero lo si ottiene per $b=1$ e quindi $P=18$.

15. L'AREA DEL TRIANGOLO [14]



Dal punto H tracciamo le perpendicolari ai lati fino a determinare i punti S e K. Prolunghiamo il segmento HG fino ad incontrare i lati nei punti P e Q.
Osserviamo che il triangolo CSH e il triangolo CDE sono simili. Siccome $CD=2DE$, sia $SH=x$ e $CS=2x$.
Applicando il Teorema di Pitagora sul triangolo AHK si ha:

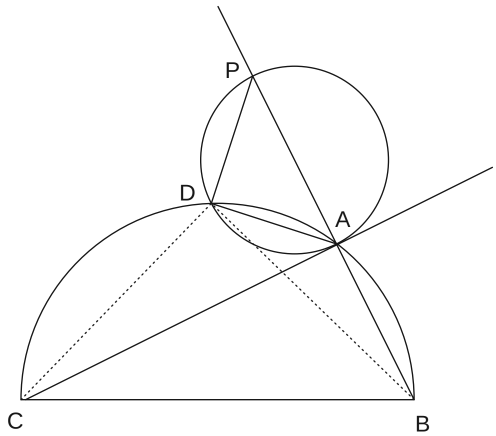
$AH^2=KH^2+AK^2$

$10^2=(10-2x)^2+(10-x)^2$ che risolta porta all'equazione

$x^2-12x+20=0$ la cui unica soluzione accettabile è $x=2\text{ cm}$.
Siccome $PQ\perp AC$, $PS=SH=2\text{ cm}$

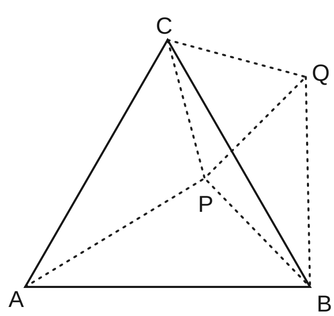
$$A_{AGH}=A_{ABCD}-A_{PCQ}-2A_{AHD}-2A_{DHP}=10^2-\frac{6\cdot 6}{2}-2\cdot\frac{10\cdot 6}{2}-2\cdot\frac{4\cdot 2}{2}=14\text{ cm}^2.$$

16. CIRCONFERENZE [71]



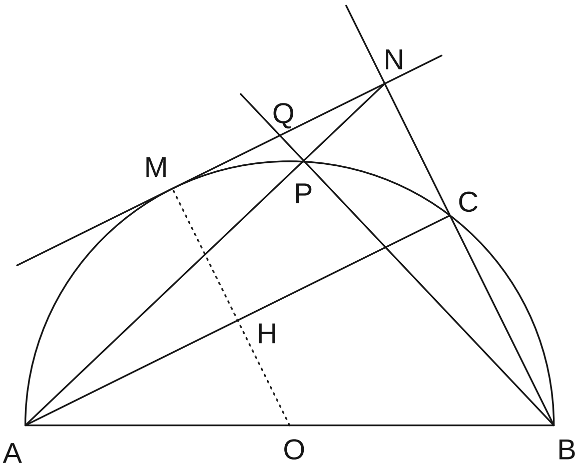
AP è il diametro della circonferenza Φ ed essendo $AD=DP$ per ipotesi, $P\hat{A}D=45°$.
Siccome $C\hat{A}P=90°$, $C\hat{A}D=45°$ e $C\hat{B}D=C\hat{A}D$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AD. Anche il triangolo CBD è rettangolo isoscele.
Osserviamo che i due triangoli CAD e BDP sono congruenti, in quanto $CD=BD$, $AD=DP$ e $C\hat{D}A=B\hat{D}P$ (visto che ad un angolo retto viene sommato lo stesso angolo $B\hat{D}A$).
In definitiva $PB=AC=\sqrt{85^2-13^2}=84\text{ cm}$.
$AP=PB-AB=84-13=71\text{ cm}$.

17. TROPPO FACILE? [150]



Sia Q tale che PCQ sia un triangolo equilatero e poniamo $P\hat{C}B=x$.
I triangoli APC e CBQ risultano essere congruenti per il Primo Criterio, infatti hanno $CP=CQ$, $AC=BC$ e $A\hat{C}P=B\hat{C}Q=60°-x$.
$AP^2=BP^2+CP^2$ può essere riscritto $QB^2=BP^2+PQ^2$ e quindi il triangolo PQB è rettangolo in P. $B\hat{P}C=90°+60°=150°$

18. SEMICIRCONFERENZA E TRIANGOLO [15]



Sia H l'intersezione tra OM e AC, $MH \perp AC$ per l'ipotesi su M punto medio dell'arco AC, inoltre $H\hat{C}N = C\hat{N}M = 90°$ e dunque anche $H\hat{M}N = 90°$. MN è tangente alla semicirconferenza.

Il triangolo QPN è retto in P e risulta essere simile a QBN, visto che sono entrambi rettangoli e hanno $P\hat{Q}N$ in comune.

Si ha che $QN : QB = QP : QN$, cioè $QN^2 = QB \cdot QP$ ma, applicando il teorema della tangente e della secante al punto Q, vale anche $QM^2 = QB \cdot QP$. Ne segue che $QN = QM = 6 \text{ cm}$ e di conseguenza $MN = 12 \text{ cm}$.

$OBNM$ risulta essere un trapezio rettangolo dove il raggio $r = OB = OM$ cercato è sia il lato obliquo che la base minore:

$r^2 = 12^2 + (24-r)^2$.

$144 + 576 - 48r = 0$

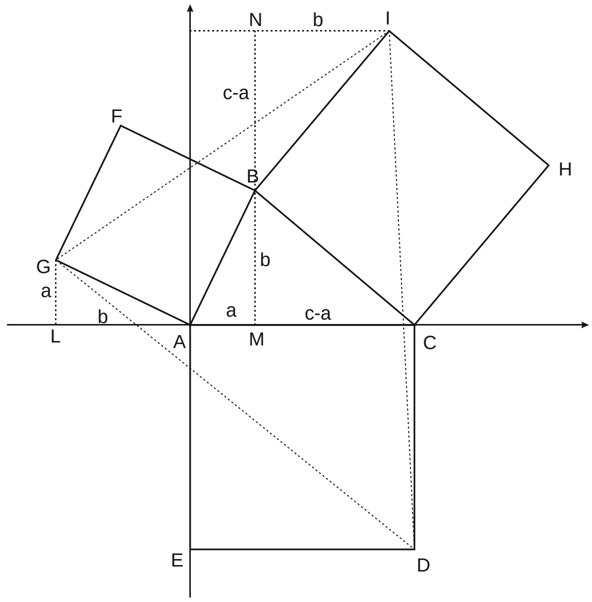
$r = 15 \text{ cm}$.

19. QUADRATI SUI LATI [21]

Premettiamo al calcolo della soluzione il seguente teorema.

TEOREMA: Dato un triangolo ABC, si costruiscano, esternamente sui lati i quadrati $ABFG$, $BCHI$ e $ACDE$. I baricentri dei triangoli ABC, GDI e FEH coincidono.

Dimostrazione



Poniamo il triangolo su un sistema di assi cartesiani, facendo coincidere A con l'origine e mettendo il punto C sul semiasse positivo delle ascisse e il punto B nel primo quadrante.

Sia $B(a,b)$ e $C(c;0)$

Il baricentro del triangolo ABC è $\left(\frac{a+c}{3};\frac{b}{3}\right)$

Scriviamo le coordinate cartesiane dei vertici del triangolo GDI:

$D(c;-c)$

$G(-b;a)$ sfruttando la congruenza dei triangoli GAL e BAM

$I(a+b;c-a+b)$ sfruttando la congruenza dei triangoli BMC e BNI.

Il baricentro del triangolo GDI è $\left(\frac{a+b-b+c}{3};\frac{c-a+b+a-c}{3}\right) = \left(\frac{a+c}{3};\frac{b}{3}\right)$ che coincide con quello di ABC.

Analogamente per FEH.

L'area del triangolo ABC può essere determinata tramite la formula di Erone:

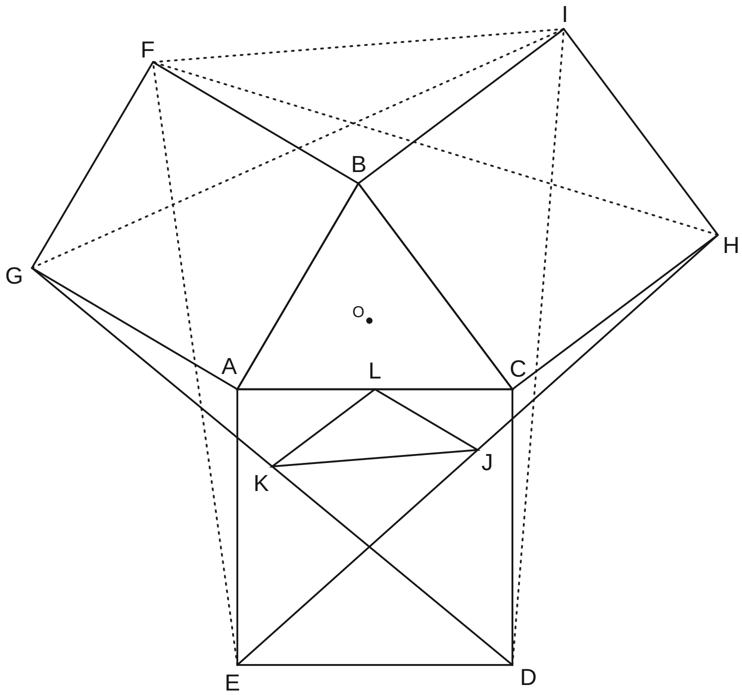
$A_{ABC} = \sqrt{21\cdot(21-13)(21-14)(21-15)} = 84 \text{ cm}^2$.

Tracciamo il segmento FI. Il triangolo FBI ha la stessa superfice del triangolo ABC (si dimostra facilmente visto che hanno gli stessi lati e gli angoli compresi tra loro supplementari).

Vogliamo provare che FBI è simile a JKL.

Tracciamo i triangoli GDI ed FEH. Per il teorema precedentemente dimostrato, i due triangoli hanno lo stesso baricentro (O) del triangolo ABC.

Il triangolo FBI si costruisce con un'omotetia di centro O e costante -2 a partire dal triangolo KJL (per le note proprietà del baricentro di dividere la mediana in due parti, una doppia dell'altra).



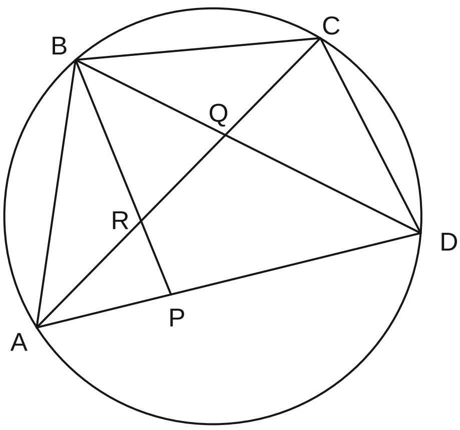
I due triangoli risultano simili con rapporto di similitudine $k=2$. Le aree hanno rapporto $k^2=4$.

$A_{KJL} = \frac{1}{4}A_{FBI} = \frac{1}{4}A_{ABC} = \frac{1}{4}\cdot 84 = 21 \text{ cm}^2$.

20. QUADRILATERO CICLICO [174]

Poiché $BC = CD$, AC è bisettrice di $P\hat{A}B$ e, per il teorema della bisettrice

$\frac{AP}{AB} = \frac{PR}{RB} = \frac{A_{APR}}{A_{ARB}} = \frac{A_{APR}}{90}$ da cui si ha $A_{APR} = 90\cdot\frac{AP}{AB}$



Ora, $AB = \frac{3}{5}AD = \frac{3}{5}\left(AP+PD\right) = \frac{3}{5}\mathrm{AP} + \frac{3}{5}\mathrm{AB}$ e quindi $\frac{2}{5}\mathrm{AB} = \frac{3}{5}\mathrm{AP}$

e cioè $\frac{\mathrm{AP}}{AB} = \frac{2}{3}$. Inserendo questo dato nella relazione trovata prima

abbiamo che $A_{APR} = 90\cdot\frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}\cdot 90 = 60 \text{ cm}^2$.

Sia $A_{RBQ} = x$ e $A_{PRQD} = y$

Sfruttiamo le relazioni $\frac{A_{ABP}}{A_{PBD}} = \frac{AP}{PD} = \frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}$ e $\frac{A_{AQD}}{A_{AQB}} = \frac{QD}{QB} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{3}$:

$$\begin{cases} \frac{150}{x+y} = \frac{2}{3} \\ \frac{60+y}{90+x} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 450 = 2x+2y \\ 180+3y = 450+5x \end{cases} \quad \begin{cases} 5x+5y = 1125 \\ -5x+3y = 270 \end{cases} \qquad y = \frac{1395}{8} \text{ cm} = 174{,}375 \text{ cm}.$$