GARA DI MATEMATICA ON-LINE (5/12/2018)

1. AUGURI [3456]

Riscriviamo le equazioni utilizzando P per il pupazzo di neve, R per il regalo, S per la pallina di natale e A per l'abete: $P-R+S=5$; $2A+P=12$ e $ASRP=20\cdot 18$.

Fattorizziamo ulteriormente l'ultima equazione: $ASRP=2^3\cdot 5\cdot 3^2$. Osserviamo, dalla prima equazione, che né P né S possono valere 5 altrimenti avremmo due cifre uguali. Analizziamo la seconda equazione: P deve essere pari. Se $P=2$, $A=5$. Se $P=4$, $A=4$ non è possibile. Se $P=6$ $A=3$ ed infine se $P=8$ $A=2$. L'ultima possibilità è da scartare in quanto nella fattorizzazione non abbiamo un 2^4.

Con un paio di tentativi si scopre che l'unica soluzione possibile è $P=6$, $A=3$, $R=5$ e $S=4$.

La risposta richiesta è $ASRP=3456$.

2. DUE PER UNO (1) [218]

Il primo termine è semplicemente un 1 seguito da 218 zeri, dal quale viene tolto qualcosa, e quindi da 219 cifre si passa a 218.

3. DUE PER UNO (2) [1782]

Da 10^{218} stiamo togliendo $20^{18}=2^{18}\cdot 10^{18}$.

Intanto il risultato termina con 18 zeri, che non influenzano la somma delle cifre. Siccome $2^{18}=262144$ avremo una parte che nella sottrazione che finisce con 737856, mentre le altre $218-18-6=194$ cifre saranno tutti dei 9. La somma delle cifre vale $194\cdot 9+36=1782$.

4. DIVISORI [56]

La somma dei divisori di 6 è $1+2+3+6=12$.

La somma dei divisori di 12 è $1+2+3+4+6+12=28$.

La somma dei divisori di 28 è$1+2+4+7+14+28=56$.

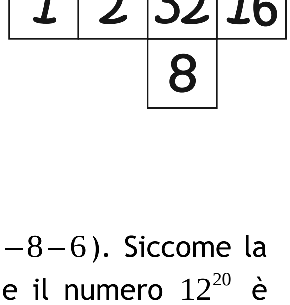
5. PROBLEMI TELEVISIVI [12]

Con il teorema di Pitagora scopriamo le dimensioni orizzontale e verticale del mio schermo: $(3x)^2+(4x)^2=160^2$, quindi $25x^2=160^2$, cioè $x=\frac{160}{5}=32\text{ cm}$. Il mio schermo ha dimensioni $128\times 96\text{ cm}$. Con un film in $16:9$ la dimensione orizzontale sarà proporzionale a 16 e quella verticale a 9, quindi $128:16=h:9$, da cui si ottiene $h=\frac{128\cdot 9}{16}=72\text{ cm}$. Le due bande orizzontali avranno un'altezza di $(96-72):2=12\text{ cm}$.

6. I DADI DI GIUSEPPE [215]

A parte il dado sulla cima, gli altri tre avranno due facce opposte nascoste. Siccome le coppie sono $1+32=33$, $2+16=18$ e $4+8=12$, per avere il massimo facciamo in modo che le facce nascoste siano tutte 4 e 8. Sul dado in cima, invece, avremmo una sola faccia nascosta, e possiamo fare in modo che sia il valore 1.

Avremo un totale di $(33+18)\cdot 3+2+4+8+16+32=215$.



7. PER COLPA DI UN VIRUS [56]

Possiamo calcolare l'ultima cifra sfruttando la periodicità delle potenze di 2 $(2-4-8-6)$. Siccome la potenza è 20 la cifra Y deve essere 6. Per calcolare la cifra X osserviamo che il numero 12^{20} è divisibile per 9 Sommando tutte le cifre modulo 9 si ottiene 4. La cifra mancante è $X=5$, l'unica cifra che sommata a 4 porta la congruenza uguale a 0 modulo 9.

8. FATTORIZZAZIONE CRIPTICA [144]
L'ultimo passaggio della fattorizzazione ci assicura che $F:F=A=1$.
$ABB=C^2\cdot F^4$ è un quadrato perfetto, con cifra iniziale 1 e due cifre uguali.
Il numero è 144, l'unico con questa caratteristica.

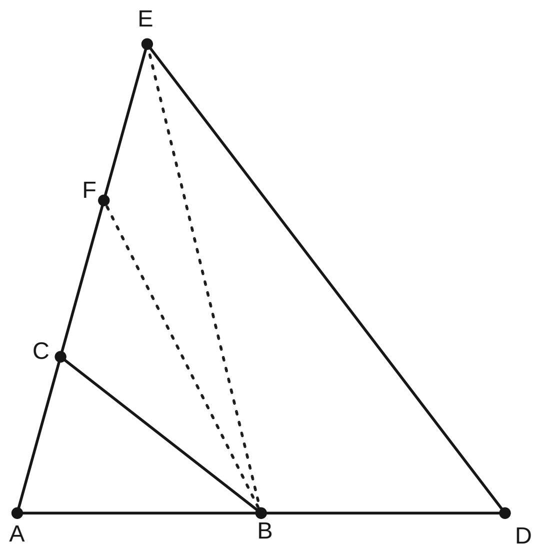
9. MINI-SUDOKU [810]
Le due soluzioni sono date dai due possibili riempimenti delle due caselle del primo quadrato. Il resto dello schema è obbligato. Le due soluzioni possibili sono riportate di seguito.

1	3	4	2
4	**2**	1	3
2	4	**3**	1
3	1	2	**4**

1	4	2	3
3	**2**	4	1
4	1	**3**	2
2	3	1	**4**

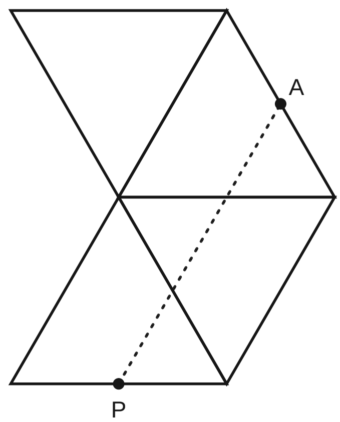
La differenza richiesta è $3124-2314=810$.

10. IL MOTOCICLISTA ATTENTO [90]
Siccome i due tratti di strada devono essere uguali, deve accadere che $\overline{ba}-\overline{ab}=\overline{a0b}-\overline{ba}$, cioè $10b+a-10a-b=100a+b-10b-a$, equazione che semplificata diventa $b=6a$. Essendo a e b due cifre, vi è la sola possibilità $a=1$ e $b=6$. I tre numeri sono 16, 61 e 106. La strada percorsa è $106-16=90$ km.



11. DAL TRIANGOLO AL QUADRILATERO [1250]
Sia F il punto del segmento CE tale che $AC=CF=FE$.
Si osserva che i triangoli ABC, CBF e FBE hanno tutti la stessa area, così come i triangoli ABE e EBD che hanno area tripla rispetto al triangolo di partenza. Il quadrilatero $BCED$ ha area pari a 5 volte il triangolo iniziale e cioè $1250\ \text{cm}^2$.

12. LO SCARABEO PIGRO [300]
Sviluppiamo sul piano la superficie laterale della Piramide e riportiamo sullo sviluppo il punto di partenza P e il punto di arrivo A (vedi figura a lato).
Il percorso è la lunghezza del segmento AP che è i $\frac{3}{2}$ della lunghezza del lato del triangolo, e cioè 300 m.



13. ALBERI DI BICCHIERI [18]
Una costruzione a piramide come quella descritta è fatta da $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ bicchieri (detti numeri triangolari).
Il problema chiede di calcolare per quanti valori di n accade che $1000\le\frac{n(n+1)}{2}\le 2000$, cioè $2000\le n(n+1)\le 4000$.
A questo punto proviamo a moltiplicare tra loro due numeri successivi cercando di avvicinarsi a 2000, superandolo e a 4000 rimanendo sotto. Si trova
$2000\le 45\cdot 46=2070$ e $62\cdot 63=3906\le 4000$.
Vi sono in totale $62-45+1=18$ possibili valori.

14. RADICI IN ORDINE [2864]

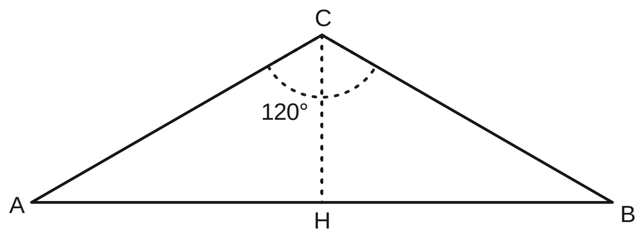
Analizziamo le radici a coppie. Elevando $\sqrt[3]{4}$ e $\sqrt[4]{6}$ alla dodicesima, otteniamo $4^4=256$ e $6^3=216$.
Quindi $\sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{4}$.
Elevando $\sqrt{2}$ e $\sqrt[4]{6}$ alla quarta otteniamo $2^2=4$ e 6, quindi $\sqrt{2}<\sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{4}$.
Confrontiamo ora $\sqrt{2}$ e $\sqrt[5]{8}$ elevando alla decima. Otteniamo $2^5=32$ e $8^2=64$, quindi $\sqrt{2}<\sqrt[5]{8}$.
Elevando $\sqrt[4]{6}$ e $\sqrt[5]{8}$ alla ventesima otteniamo $6^5=7776$ e $8^4=4096$ da cui $\sqrt[5]{8}<\sqrt[4]{6}$.
Quindi $\sqrt{2}<\sqrt[5]{8}<\sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{4}$.

15. TRE VOLTE [44]

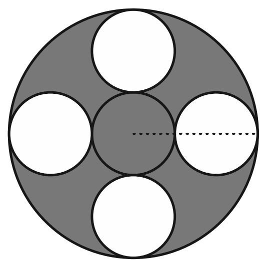
Il problema chiede di trovare i numeri naturali a e b tali che $3(a+b)=ab$.
Vista la simmetria del problema, se una coppia (a,b) verifica il problema, lo verifica anche la coppia (b,a).
Cerchiamo prima di tutto soluzioni del tipo (a,a): $6a=a^2$, cioè $a=6$. La coppia $(6,6)$ è una soluzione.
Supponiamo ora $a\neq b$. $3(a+b)=ab$ possiamo riscriverla $3a=b(a-3)$. Non potendo essere né $a=a-3$, né $a=b$, deve essere $3a=b$ e $a-3=1$, cioè $a=4$ e $b=12$. Sono soluzioni anche le coppie $(4,12)$ e $(12,4)$.
La somma richiesta è $6+6+4+12+12+4=44$.

16. PITAGORA [280]

Detta x l'altezza del triangolo relativo alla base AB, si osserva che il triangolo BCH ha gli angoli di $30°$, $60°$ e $90°$, quindi $BC=2x$ e $AB=2\cdot BH=2x\sqrt{3}$.
Per quanto affermato dal problema
$AB^2-2BC^2=3136$, cioè
$12x^2-8x^2=3136$
$4x^2=3136$
$x=28\text{ cm}=280\text{ mm}$.



17. CERCHI NEL CERCHIO [55]



Detto r il raggio del cerchio piccolo, il raggio del cerchio grande è $3r$.
L'area grigia è $\pi(3r)^2-4\cdot\pi r^2=5\pi r^2$.
La percentuale cercata è ottenuta risolvendo la proporzione $9\pi r^2:100=5\pi r^2:x$.

$$x=\frac{5\cancel{\pi x^2}}{9\cancel{\pi x^2}}\cdot 100\cong 55,55\%$$

18. GEMELLI DIVERSI [7392]

Enrico sceglierà la felpa in 12 modi diversi, mentre Martino in 11. Enrico avrà 8 scelte per i pantaloni, mentre a Martino ne rimarranno 7. Il totale è $12\cdot 11\cdot 8\cdot 7=7392$ modi diversi.

19. PROPRIETÀ DELLE POTENZE [49]

Utilizzando la proprietà distributiva e le proprietà delle potenze possiamo scrivere:
$\left((1+2+4)2^{2018}\right)^2=7^2\cdot 4^{2018}$, quindi $k=49$.

20. AUTOSCONTRO [25]

Riflettiamo sull'urto tra due macchinine. Dopo l'urto entrambe hanno invertito la loro marcia, quindi è come se nessuna delle due avesse invertito la marcia, continuando sulla sua strada, e le macchinine si fossero attraversate. In questo modo è facile capire che ogni macchinina di un gruppo dovrà attraversare ogni macchinina dell'altro gruppo per un totale di $5\cdot 5=25$ urti.