GARA DI MATEMATICA ON-LINE (7/11/2018)

1. TUTTI AL CIRCO [86]

Se tutti i 200 posti fossero stati occupati da bambini l'incasso sarebbe stato di $1600\,€$. La differenza $2170-1600=570\,€$ è data dal numero di adulti paganti cioè $570:(13-8)=114$. Il numero dei bambini è $200-114=86$.

2. PALINDROMI CHE PASSIONE [2002]

Riscriviamo l'operazione in colonna sotto forma di addizione:

$$\begin{array}{cccc} & c & d & c & + \\ & & e & e & = \\ \hline a & b & b & a & \end{array}$$

Osserviamo che $d+e$ può avere al massimo riporto 1, quindi $c=9$, $a=1$ e $b=0$.

$$\begin{array}{cccc} & 9 & d & 9 & + \\ & & e & e & = \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

Segue immediatamente che $e=2$ e di conseguenza $d=7$.

$\overline{abba}+\overline{cdc}+\overline{ee}=1001+979+22=2002$.

3. TRE CIFRE [781]

Sia $\overline{abc}$ il numero cercato. Sappiamo che $b\cdot c=8$, che $b=a+c$ e che $a\neq c$. Sostituendo la seconda relazione nella prima otteniamo $(a+c)\cdot c=8$, cioè $ac+c^2=8$. c non può essere più grande di 2, ma nemmeno 2 altrimenti sarebbe $a=2$. Quindi $c=1$, $a=7$ e di conseguenza $b=8$.

Il numero cercato è 781.

4. IN PISTA [9420]

Ad ogni incontro, la somma dei due tragitti percorsi dai due ciclisti deve essere la lunghezza della pista. Dopo 15 incontri avranno percorso in totale $15\cdot\left(2\pi\cdot 100\right)\cong 9420\ \mathrm{m}$.

5. PIÙ DI 34 [15]

Il numero 9999 ha per somma delle cifre 36 ed è l'unico possibile.

Somma 35 ce l'hanno i numeri ottenuti permutando le cifre di 9998, che sono 4.

Per fare somma 34 possiamo permutare le cifre di 9997 (4 modi possibili) o di 9988 (6 modi possibili).

In totale abbiamo $10+4+1=15$ numeri che verificano la condizione richiesta.

6. VIA I QUADRATI [20]

Invece che fare l'operazione richiesta, immaginiamo di voler quadrettare il rettangolo. Quale dovrà essere la misura più grande del quadretto? $MCD(3000,2020)=20\ \mathrm{mm}$. L'ultimo quadrato che potremo togliere avrà necessariamente questa misura.

7. LA POTENZA DELLE POTENZE [254]

Dividiamo tutta l'espressione per 2^{2018}.

Otteniamo $k=2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2=2^8-2=254$.

8. CHE SCATOLE! [50]

Dal testo del problema si scopre che $V_A = \frac{180}{100}V_C$, che $V_B = \frac{120}{100}V_C$. Vogliamo calcolare $V_A = \frac{x}{100}V_B$.

Sostituendo nell'ultima relazione le prime due, otteniamo: $\frac{180}{100}V_C = \frac{x}{100}\cdot\frac{120}{100}V_C$. Semplificando e ricavando x si ottiene $x = \frac{180\cdot 100}{120} = 150\%$

Il volume della scatola A è più grande del 50% rispetto al volume della scatola B.

9. PANE TOSTATO [5]

In tutto si devono tostare 18 lati di fette di pane. Siccome $18:4 = 4{,}5$, se troviamo una strategia furba, dovremmo poterlo fare in 5 minuti. Effettivamente se tostiamo prima tutte le fette da un lato e poi dall'altro avremo sempre il tostapane impegnato su quattro fette di pane, tranne nell'ultimo minuto in cui avremo ancora due lati da tostare.

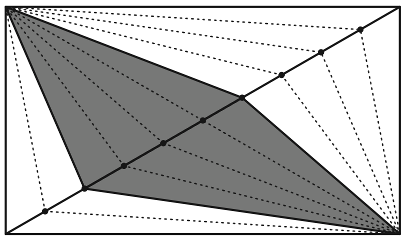
10. PROBABILITÀ AI DADI [4]

Indipendentemente dal risultato dei primi due dadi, è il terzo che stabilisce se la somma è un multiplo di 3 o no. Avremo sempre due possibilità per chiudere la somma con un multiplo di 3. Facciamo un esempio per capire: Se la somma dei primi due dadi fosse 7, l'uscita del 2 o del 5 ci darebbero un multiplo di 3.

In definitiva la probabilità cercata è $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

La risposta richiesta è $1+3=4$.

11. IL RETTANGOLO [126]



Se tracciamo i segmenti che dai vertici del rettangolo uniscono tutti i punti di divisione della diagonale, notiamo che il rettangolo risulta diviso in 20 triangolini tutti della stessa area.

La parte più scura ha area pari ai $\frac{8}{20}$ dell'area del rettangolo:

$A_{SCURA} = \frac{8}{20}15\cdot 21 = 126\ \text{cm}^2$.

12. SOMME DI CONSECUTIVI [285]

Se $x-3$, $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$ e $x+3$ sono i sette naturali consecutivi, la loro somma vale $7x$, quindi solo i multipli di 7 possono verificare le condizioni del problema.

Il più piccolo è $28 = 1+2+3+4+5+6+7$ ($x=4$), mentre il più grande è $2016 = 7\cdot 288$.

In totale avremo $288-4+1 = 285$ numeri possibili.

13. LE MATITE BICOLORE [66]

Una matita può essere realizzata scegliendo un colore su 12 possibili per una delle punte, ed uno degli 11 restanti per l'altra. Così facendo, però la matita con i colori AB e con i colori BA l'abbiamo contata due volte.

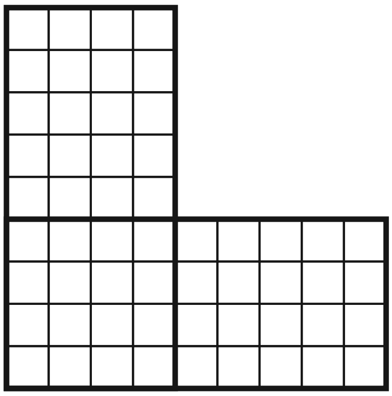
Il numero totale è $\frac{12\cdot 11}{2} = 66$.

14. LE MATITE BICOLORE (PARTE SECONDA) [56]
Ragioniamo sul caso peggiore. Supponiamo che Anna abbia scelto tutte le matite che non contengono uno specifico colore. Siccome un colore compare in 11 matite (assieme a ciascuno degli altri colori disponibili), Anna potrebbe aver scelto $66-11=55$ matite e non averne ancora trovata una con l'ultimo colore mancante. Alla 56-esima completerà il set.

15. SOLO DISPARI [3344]
Ricordiamo che la somma dei primi n numeri dispari vale n^2.
Prima della prima operazione vi sono 50 numeri dispari la cui somma è 2500.
I numeri pari da 2 a 100 diventano i numeri da 1 a 50, dove abbiamo 25 numeri dispari la cui somma è 625.
Dividendo i numeri pari rimasti per 2 ci restano i numeri da 1 a 25 in cui ci sono 13 numeri dispari la cui somma è 169.
Continuando in questo modo avremo i numeri da 1 a 12 che ha 6 numeri dispari la cui somma è 36. Quindi i numeri da 1 a 6 che ha 3 dispari che sommano a 9.
Ci restano i numeri 1, 2 e 3. $1+3=4$. Dividendo 2 otteniamo 1, l'ultimo degli addendi.
In totale abbiamo $2500+625+169+36+9+4+1=3344$.

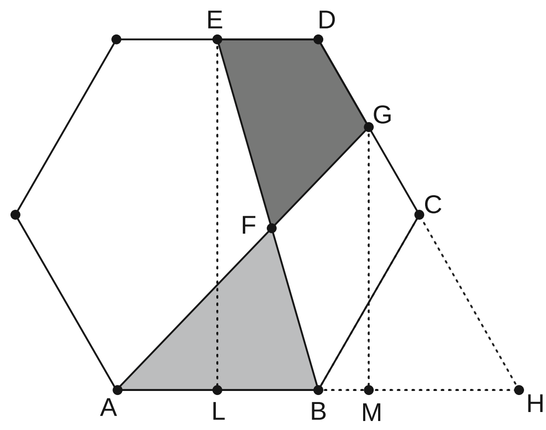
16. BUGIARDI O SINCERI ? [98]
Gli ultimi due della fila sono sicuramente un sincero ed un bugiardo, anche se non possiamo stabilirne l'ordine. L'affermazione del $97°$ della fila è certamente falsa e quindi tutti gli altri stanno dicendo la verità. In totale vi sono 98 sinceri.

17. TANTI RETTANGOLI [800]
Dividiamo la griglia come se fossero due rettangoli 9×4 sovrapposti.
Su un rettangolo 9×4 abbiamo la possibilità di disegnare $\frac{10\cdot9}{2}\cdot\frac{5\cdot4}{2}=450$ rettangoli.
Sul quadrato comune 4×4 possiamo disegnare $\left(\frac{5\cdot4}{2}\right)^2=100$ rettangoli.
Il totale sulla figura assegnata è infine $450+450-100=800$.



18. IL PUZZLE [234]
Dividiamo i lati per 5. La misura dei rettangoli diventa 18×13 che sono due numeri primi tra loro. Per ottenere un quadrato, dovremo posizionare 13 righe e 18 colonne di rettangoli assegnati così da ottenere un quadrato. Ci servono $18\cdot13=234$ rettangoli.

19. FRAZIONI DI ESAGONO [0]



Riferendoci alla figura a lato, prolunghiamo i lati dell'esagono in modo da costruire il triangolo equilatero BCH. Il problema è equivalente a calcolare la differenza tra l'area del triangolo AGH e il trapezio $BHDE$, visto che la parte $BHGF$ è in comune.

Sia $AB = l$ il lato dell'esagono e sia $EL = h$ l'altezza del trapezio.

Siccome G è punto medio del lato CD, $GM = \frac{3}{4}h$.

$A_{AGH} = \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{4}lh$.

$A_{BHDE} = \frac{1}{2}\left(l + \frac{l}{2}\right) \cdot h = \frac{3}{4}lh$.

Le due aree sono uguali e quindi la loro differenza è 0.

20. FRATELLI MATEMATICI [600]

Siano x e y le età del fratello e della sorella.

La frase detta dal fratello parla di quando l'età di y sarà diventata x, cioè di quando saranno passati $x - y$ anni e lui avrà $2x - y$ anni, ma si riferisce anche di un tempo nel passato di quando lui aveva l'età di lei, cioè di $x - y$ anni prima, in cui il fratello aveva y anni e la sorella $y - (x - y) = 2y - x$ anni.

La frase del fratello, tradotta in equazione diventa: $2x - y = 4(2y - x)$, cioè $x = \frac{3}{2}y$.

La frase della sorella precisa che $2x - y + x = 70$, cioè che $3x - y = 70$. Sostituendo l'informazione appena ricavata, otteniamo $\frac{9}{2}y - y = 70$, cioè $y = 20$. $x = \frac{3}{2} \cdot 20 = 30$.

La risposta richiesta è $20 \cdot 30 = 600$.