GARA DI MATEMATICA ON-LINE (15/10/2018)

1. GIUSTO PER INIZIARE [1]

Moltiplichiamo per x la seconda frazione e per xy la terza. Otteniamo

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}.$$

Sapendo che $xyz=1$ possiamo semplificare le ultime due frazioni per ottenere:

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{1+x+xy}+\frac{xy}{1+x+xy}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1$$

2. EQUAZIONI E RADICI [3]

Dalle relazioni tra coefficienti e radici, si ottiene

$$\begin{cases} a+b+c=a \\ ab+ac+bc=b \\ abc=c \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} c=-b \\ ab+ac+bc=b \\ ab=1 \end{cases}$$

Dove nella terza equazioni abbiamo potuto scartare il caso $c=0$ per le condizioni del problema.
Ora sostituito la c nella seconda equazione:

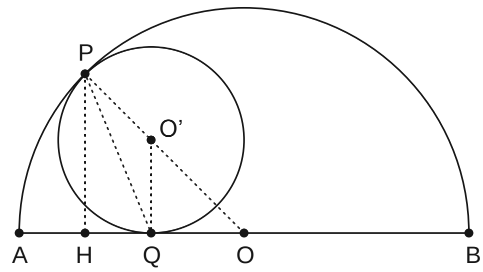
$$ab+ac+bc=b$$
$$ab-ab-b^2=b$$
$$b^2+b=0.$$

Non potendo essere $b=0$ abbiamo che l'unica soluzione possibile è $b=-1$ e di quindi $a=-1$ e $c=1$.
La soluzione richiesta è $(-1)^2+(-1)^2+1^2=3$.

3. TANTI, TANTI, MA PROPRIO TANTI VALORI ASSOLUTI [2018]

Prima di tutto osserviamo che la presenza di 2018 valori assoluti, implica la presenza di 2018 sottrazioni di una unità, il che ci dice che tutte le soluzioni dovranno essere necessariamente pari.
Ora il massimo valore possibile per una soluzione è 2018, mentre il minimo lo otteniamo quando il valore assoluto più interno assume valore 2017. $|x-1|=2017$ con $x<0$ diventa $1-x=2017$ cioè $x=-2016$.
Le soluzioni $x=2k$ sono quindi $-2016\le 2k\le 2018$ che sono 2018.

4. CERCHI E SEMICERCHI [1464]



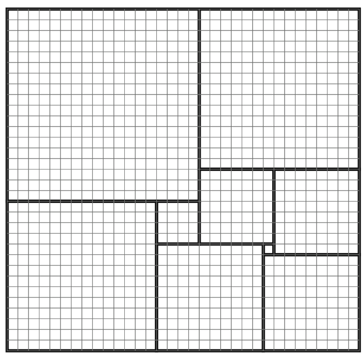
Tracciamo l'altezza PH del triangolo OPQ relativa alla base OQ.

Si osserva che essendo O , O' e Q allineati, $PH=\frac{100}{\sqrt{2}}=50\sqrt{2}\ \text{cm}$.

Sia x il raggio della circonferenza interna.
Dalle informazioni sul problema sappiamo che $O'P=O'Q=OQ$, di conseguenza $OP=x+x\sqrt{2}$.
Risolvendo l'equazione $x+x\sqrt{2}=100$ si ottiene che $x=100(\sqrt{2}-1)$.

L'area cercata è $A_{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot 50\sqrt{2}\cdot 100(\sqrt{2}-1)=2500(2-\sqrt{2})\cong 1464,5\ \text{cm}^2$.

5. RETTANGOLI E QUADRATI [2113]



Calcoliamo l'area del rettangolo, sommando le aree di tutti i quadrati:
$A_{rett}=1^2+4^2+7^2+8^2+9^2+10^2+14^2+15^2+18^2=1056\ \text{cm}^2$ Ora siccome $1056=2^5\cdot 3\cdot 11$ e siccome c'è un quadrato di lato 18, le due dimensioni possono essere: 22×48, 24×44 e 32×33.
I primi due sono da scartare in quanto posizionato il quadrato 18×18 non si riesce a riempire la striscia 18×4 o 6×18 che si forma tra un lato del quadrato e il bordo del rettangolo.
Per il rettangolo 32×33 una possibile soluzione è mostrata a lato.
La soluzione richiesta è $32^2+33^2=2113$.

6. DENTRO AD UN CUBO [6912]

L'unico modo per inscrivere, secondo le richieste del problema, un tetraedro regolare all'interno di un cubo è scegliendo due vertici sulla diagonale di una faccia e due vertici sulla diagonale opposta della faccia opposta. Di questo tipo di tetraedri ce ne sono solo due, ciascuno di lato $24\sqrt{2}$ cm che è pari alla diagonale della faccia quadrata. L'intersezione dei due tetraedri è l'ottaedro che si forma unendo i centri delle sei facce del cubo, e quindi di spigolo $12\sqrt{2}$ cm.

Il volume del solido ottenuto unendo i due tetraedri è dato dalla somma dei loro volumi diminuita della loro intersezione: $V_{solido}=2\cdot V_{Tetraedro}-V_{Ottaedro}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}\left(24\sqrt{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(12\sqrt{2}\right)^2\cdot 24=9216-2304=6912\ \text{cm}^3$

7. SOMME TRA FRAZIONI [40]

Riscriviamo i denominatori sfruttando la formula di Gauss:

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+20}=\frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}}+\frac{1}{\frac{3\cdot 4}{2}}+\ldots+\frac{1}{\frac{20\cdot 21}{2}}$$

che possiamo anche scrivere:

$$\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2}{20\cdot 21}=2\cdot\sum_{i=2}^{20}\frac{1}{i(i+1)}.$$

Ora sfruttando l'identità $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$, con A e B numeri reali, possiamo calcolare i valori di A e B che rendono valida l'uguaglianza. Trovato che $A=1$ e $B=-1$ la sommatoria diventa una serie telescopica:

$$=2\cdot\sum_{i=2}^{20}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=2\left(\frac{1}{2}\cancel{-\frac{1}{3}}\cancel{+\frac{1}{3}}\cancel{-\frac{1}{4}}+\ldots\cancel{+\frac{1}{20}}-\frac{1}{21}\right)=\cancel{2}\cdot\frac{21-2}{21\cdot\cancel{2}}=\frac{19}{21}.$$

8. FRAZIONI DI FRAZIONI [1432]

Eseguiamo la divisione con resto della frazione assegnata:

$$\frac{37}{30}=1+\frac{7}{30}=1+\frac{1}{\frac{30}{7}}=1+\frac{1}{4+\frac{2}{7}}=1+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{7}{2}}}=1+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}$$

La soluzione cercata è 1432.

9. SEMPRE SETTE [71]

I numeri scritti da Giuseppe sono del tipo $x=7a+2$ con $0\le a\le 288$.

Siccome il primo multiplo di 5 è 30, limitandoci a scrivere i soli multipli di 5, possiamo rappresentarli con $x=30+7\cdot 5\cdot k$. Il massimo valore permesso per k è 56 che porta a $x=1990$. Al momento abbiamo 57 fattori 5.

Cerchiamo ora se vi sono contributi da numeri multipli di 25.

Il primo multiplo della lista è 100, quindi i multipli di 25 sono del tipo $100+7\cdot 25\cdot k$ con $0\le k\le 10$. Abbiamo altri 11 fattori 5

I multipli di 125 sono solo due: 1500 e 625. Quest'ultimo contiene un ulteriore fattore 5 essendo 5^4.

In totale abbiamo $57+11+2+1=71$ fattori 5.

Di fattori 2 ve ne sono in abbondanza, quindi il valore n cercato è 71.

10. SOMME DI POTENZE DIVERSE [1426]

Il numero $\overline{abc}$ può essere scritto nella forma $100a+10b+c$. Il problema allora diventa $100a+10b+c=a+b^2+c^3$ che possiamo riscrivere nella forma:
$99a=b(10-b)+c(c+1)(c-1)$.

A questo punto o b è un multiplo di 3 o lo è $10-b$ visto che 99 è divisibile per 3 e nell'ultimo prodotto abbiamo 3 numeri consecutivi; quindi $b\neq 2$, $b\neq 5$ e $b\neq 8$.

La condizione di avere un numero di tre cifre impone che $c\geq 3$.

Compiliamo una tabella in cui calcoliamo tutti i possibili valori di b^2+c^3.

Eliminiamo le celle che danno solo due cifre e sommiamo la cifra delle centinaia del numero trovato, verificando la condizione del problema:

	b (b^2)	**0 (0)**	**1 (1)**	**3 (9)**	**4 (16)**	**6 (36)**	**7 (49)**	**9 (81)**
c (c^3)								
3 (27)		27	28	36	43	63	76	108
4 (64)		64	65	73	80	100	113	145
5 (125)		125	126	**134**	141	161	**174**	206
6 (216)		216	217	225	232	252	265	297
7 (343)		343	344	352	359	379	392	424
8 (513)		512	**513**	521	528	548	561	**593**
9 (729)		729	730	738	745	765	778	810

Le soluzioni sono 135, 175, 518 e 598.

La soluzione richiesta dal problema è $135+175+518+598=1426$.

11. IL PAMPALUGO [11]

Risolviamo prima un caso più facile. Immaginiamo che Luca abbia 2 carte, di cui una il "pampalugo" e Claudia una carta sola. Dovendo pescare Claudia, sia p la probabilità di una sua vittoria.

Ora se pesca il "pampalugo" ($\frac{1}{2}$), il gioco si ribalta e quindi sarà Luca ad avere la probabilità p di vincere, e Claudia $1-p$. Se invece pesca l'altra carta ($\frac{1}{2}$) Claudia vince. Deve essere che $p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-p)$, cioè $p=\frac{2}{3}$.

Ora se il gioco iniziasse con 3 carte più il "pampalugo" nella mano di Luca, Claudia avrebbe una probabilità di vittoria p data dalla somma di due casi: Se pesca il "pampalugo" ($\frac{1}{4}$) vincerebbe con probabilità $1-p$, mentre se non pesca il "pampalugo" ($\frac{3}{4}$) porterebbe il gioco nella situazione analizzata precedentemente e quindi vincerebbe con probabilità $\frac{2}{3}$.

$p=\frac{1}{4}(1-p)+\frac{3}{4}\frac{2}{3}$, cioè $p=\frac{3}{5}$.

Ripetendo lo stesso ragionamento ancora una volta si ottiene che la probabilità richiesta dal problema è data da: $p=\frac{1}{6}(1-p)+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}$, cioè $p=\frac{4}{7}$

La risposta richiesta è $4+7=11$.

12. DADI TRUCCATI [62]
Se p è la probabilità che esca 1,allora $2p$ è quella che esca 2, $4p$ è quella che esca 3 e $8p$ è quella che esca 4. Ovviamente deve accadere che $p+2p+4p+8p=15p=1$ cioè che $p=\frac{1}{15}$.
La probabilità che escano due numero uguali è data dalla somma dei vari casi, e quindi:
$P(\text{numeri uguali})=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{15}+\frac{2}{15}\cdot\frac{2}{15}+\frac{4}{15}\cdot\frac{4}{15}+\frac{8}{15}\cdot\frac{8}{15}=\frac{85}{225}=\frac{17}{45}$
La soluzione richiesta è $17+45=62$.

13. CUORI E PICCHE [157 31/126]
Il problema è equivalente a pescare 5 carte a caso ottenendo prima tutti i cuori e poi tutte le picche (o viceversa).
$P(CCCCC)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}$.
$P(CCCCP \text{ o } PCCCC)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot 2$
$P(CCCPP \text{ o } PPCCC)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot 2$
Più tutti gli analoghi casi in cui sono scambiate le picche con i cuori, che possiamo ottenere dalla somma delle tre probabilità calcolate, moltiplicando per 2.

La probabilità richiesta è $P=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot 2+\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot 2\right)\cdot 2=\frac{31}{126}$.
La soluzione richiesta è $31+126=157$.

14. TUTTI AMICI IN FINALE [9155]
Due squadre si scambiano tra loro 49 strette di mano. In totale sono state scambiate $\frac{35\cdot 34}{2}\cdot 49=29155$ strette di mano. La risposta richiesta è 9155.

15. BRISCOLA A COPPIE [1855]
Ci sono 7 modi per scegliere la squadra formata dalla coppia marito-moglie, mentre le altre 6 coppie devono essere divise. Immaginando di chiamare x_1, … x_6 i mariti rimasti e y_1, … y_6 le relative mogli, immaginiamo di mantenere fissi i mariti e di permutare le mogli. In questo modo nessuna moglie deve avere l' stesso indice del marito, il che equivale a calcolare le dismutazioni (o permutazioni senza posto fisso) di ordine 6. Ricordando la formula ricorsiva $D_n=(n-1)\left(D_{n-1}+D_{n-2}\right)$ e i due casi $D_1=0$ e $D_2=1$ si ottiene $D_6=265$.
Il numero di possibilità è $7\cdot 265=1855$.

16. DIVIDENDO E DIVISORE [90]
Il problema chiede per quali valori di a, b, c, d ed e accade che $\overline{abde}\,|\,\overline{abcde}$. Per le proprietà dei divisori, è vero $\overline{abde}\,|\,\overline{abcde}\leftrightarrow\overline{abde}\,|\left(\overline{abcde}-10\cdot\overline{abde}\right)$, cioè $\overline{abde}\,|\left(\overline{abcde}-\overline{abde0}\right)=\overline{abde}\,|\left(\overline{cde}-\overline{de0}\right)$.
Ora un numero di quattro cifre ne divide uno di tre se e solo se quello di tre cifre in realtà è 0, cioè quando $e=d=c=0$. Restano liberi solo a e b. Abbiamo quindi $9\cdot 10=90$ possibilità.

17. SOMME DIVERSE [1023]
Pensiamo al numero 11 rappresentato da 11 asterischi e mettiamo delle sbarrette tra ogni asterisco: "*|*|*|*|*|*|*|*|*|*|*". Ora possiamo rimuovere quante sbarrette vogliamo. Quello che resta ci rappresenta un modo possibile di ottenere il numero 11 come somma ordinata di addendi positivi. Ad esempio "****|*|****|**" rappresenta $4+1+4+2$. Siccome ogni sbarretta può essere lasciata o rimossa, abbiamo 2^{10}, possibilità, meno il caso in cui le togliamo tutte, che è escluso dal problema.
Vi sono $2^{10}-1=1023$ possibilità diverse.

18. ETÀ [99]
Siano c, e ed s le età di Carlo, Enrico e Salvatore.
La frase “quando Enrico aveva l’età di Carlo” si riferisce a quello che è accaduto $e-c$ anni fa’, e cioè $c=2(s-(e-c))$, cioè $2e=2s+c$.
La frase “quando Carlo avrà il doppio degli anni che Enrico ha oggi” si riferisce a quello che accadrà tra $2e-c$ anni e cioè quando salvatore avrà $s+2e-c$. Per quanto trovato prima $s+2e-c=s+2s=3s$
Salvatore avrà il triplo dell’età che ha oggi, e quindi 99 anni.

19. NUMERI IN CERCHIO [34]
Siccome 250 non è divisibile per 4, i numeri scritti nei cerchietti dovranno necessariamente essere scritti alternati e accoppiati in modo che due successivi abbiano somma 50. Al posto della x dovrà esserci il numero $50-16=34$.

20. IL COLTELLO [200]
Tutti i quadrati hanno la cifra delle decine pari, tranne il 16 e il 36. Questo significa che nell’ultimo mucchietto sono rimasti 6 €. Mancano 4 € per pareggiare il conto. Se il coltellino vale x euro, allora Giovanni ha intascato $10n-x$ euro e Paolo $10(n-1)+6+x$ e le due cifre di denaro devono essere uguali:
$10n-x=10(n-1)+6+x$, cioè $\cancel{10n}-x=\cancel{10n}-4+x$, $x=2\text{ €}=200\text{ centesimi}$.