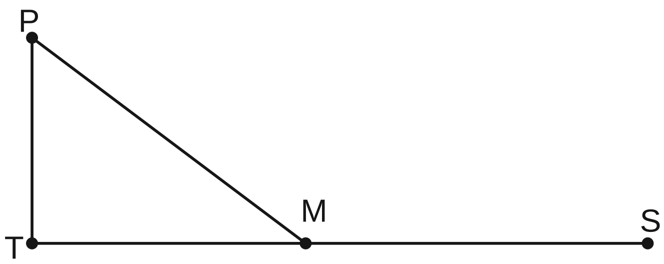
GARA DI MATEMATICA ON-LINE - BIENNIO (26/11/2018)

1. IL PAVONE E IL SERPENTE [24]



Riferendoci alla figura a lato, dal testo del problema sappiamo che $PT = 18\text{ m}$ e $TS = 54\text{ m}$.
Siano $x = PM = MS$.
Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo PTM si ottiene:
$x^2 = 18^2 + (54 - x)^2$, equazione che risolta permette di determinare $x = 30\text{ cm}$.
La distanza richiesta è $TM = 54 - 30 = 24\text{ cm}$.

2. DECORAZIONI QUADRATE [5000]

Ogni nuovo quadrato disegnato risulta avere l'area paria metà del quadrato di partenza.
L'area del terzo quadrato disegnato avrà area:

$$A_{OPQR} = \frac{1}{2} A_{ILMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} A_{EFGH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 200^2 = 5000\text{ braccia}^2$$

3. IL DODECAEDRO [100]

Consideriamo tutti i vertici del solido e accoppiamoli tra loro in tutti i modi possibili $\binom{20}{2}$. La maggior parte saranno diagonali interne, a meno che non siano un lato del dodecagono o una delle diagonali delle 12 facce. Siccome ogni faccia ha 5 diagonali, possiamo ottenere, per differenza, il numero di diagonali interne: $\binom{20}{2} - 30 - 5 \cdot 12 = 100$.

4. LEONARDO L'INDECISO [20]

Sia x la distanza tra la casa di Leonardo e il castello.
Leonardo cammina per $\frac{x}{2}$ poi torna indietro per $\frac{x}{4}$, quindi raggiunge il castello camminando per $\frac{3}{4}x$ percorrendo in tutto 30 miglia. Trasformando quanto detto in equazione si ha: $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{3}{4}x = 30$, cioè $x = 20\text{ miglia}$.

5. LE SCIMMIE [768]

Sia x il numero di scimmie. Il problema si traduce nell'equazione $x = \left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12$, cioè $x^2 - 64x + 768 = 0$.
Per le relazioni tra radici e coefficienti non serve nemmeno calcolare le soluzioni (una volta accertatisi che il discriminante è positivo) in quanto il termine noto dell'equazione è proprio il loro prodotto.
$x_1 x_2 = 768$. Per completezza le due soluzioni sono $x_1 = 16$ e $x_2 = 48$.

6. QUANTE CIFRE [19]

Osserviamo che il numero $8^5 \cdot 5^{17} \cdot 7^3$ possiamo riscriverlo usando le proprietà delle potenze:
$8^5 \cdot 5^{17} \cdot 7^3 = 2^{15} \cdot 5^{17} \cdot 7^3 = (2 \cdot 5)^{15} \cdot 5^2 \cdot 7^3 = 8575 \cdot 10^{15}$ che ha 19 cifre.

7. IL TINO PIENO D'ACQUA [691]
Calcolato il $m.c.m.(1,2,3,4)=12$ ci chiediamo quanti tini riusciamo a svuotare in 12 giorni aprendo un solo rubinetto. Usando il primo ne svuotiamo 12, con il secondo 6, con il terzo 4 ed infine 3 con il quarto, per un totale di 25 tini. Per svuotare un tino solo avremo bisogno di $\frac{12}{25}\cdot 24\cdot 60=691,2 \text{ minuti}$.

8. MULTIPLI [667]
Cerchiamo per quanti n, naturali, accade che $2000<3n<4000$ relazione che divisa per 3 diventa $667\le n\le 1333$. Vi sono $1333-667+1=667$ valori possibili per n.

9. IL PANETTONE [1705]
Il problema è risolto usando la proporzione $2:31=110 \text{ g}:x$ che porta a calcolare $x=\frac{110}{2}\cdot 31=1705 \text{ g}$.

10. LA LEGGENDA DELL'INVENZIONE DEGLI SCACCHI [15]
Il problema chiede le ultime due cifre di $1+2+2^2+...+2^{63}$, cioè di $2^{64}-1$.
Calcoliamo $2^{64} \bmod 100$. Siccome 2 e 100 non sono primi tra loro, procediamo per semplificazioni successive: sappiamo che $2^{10}=1024$ per cui
$2^{64}=\left(2^{10}\right)^6\cdot 2^4\equiv 24^6\cdot 16 \bmod 100$. Ora siccome $24^3=13824$,
$24^6\cdot 16\equiv 24^2\cdot 16\equiv 76\cdot 16\equiv 16 \bmod 100$.
La risposta cercata è $16-1=15$.

11. GLI SCACCHI E LA RITHMOMACHIA [9]
Per il principio di inclusione/esclusione deve accadere che il numero delle persone che partecipa ad uno dei tornei ($50-4=46$) è data dalla somma delle persone che partecipano al torneo di scacchi (30) più il numero di persone che partecipa al torneo di rithmomachia (25) diminuito il numero di persona che partecipa ad entrambi i tornei.
Il numero cercato è quindi $25+30-46=9$

12. GLI SCACCHI "A LA RABIOSA" [7224]
Valutiamo la posizione reciproca dei due re a partire dalla posizione del re bianco. Se posizioniamo il re in una casella d'angolo (4) vi sono $64-4=60$ posizioni da considerare per un totale di $60\cdot 4=240$.
Se il re bianco si trova in una casella di bordo scacchiera, ma non d'angolo (24), il re nero può essere messo in $64-6=58$ caselle diverse per un totale di 1392 posizioni diverse. Infine, se il re bianco si trova in casella di centro scacchiera (36), il re nero può essere posizionato in $64-9=55$ caselle, per un totale di 1980 posizioni. In totale abbiamo 3612 posizioni che verranno verificate in $3612\cdot 2=7224$ secondi.

13. UN POLIGONO CON MOLTI LATI [303]
Risolviamo, per ora, il problema senza tener conto dei salti all'indietro.
Al k-esimo salto Leonardo si troverà sul vertice $6+5k$. Risolvendo $6+5k\ge 1498$ otteniamo il numero di salti necessari a fare tutto il giro del poligono: $k\ge 299$.
Determiniamo ora quante volte Leonardo si troverà su un vertice identificato da una potenza di 2.
Osserviamo che ogni due salti Leonardo avanza di 10 caselle e quindi la cifra delle unità non cambia.
Siccome dopo due salti raggiunge la casella 16, arretrando di 2, Leonardo toccherà anche la casella 64, quindi la casella 512 prima di terminare il percorso.
Con 299 salti in avanti e 3 salti all'indietro Leonardo avrà raggiunto la casella $6+299\cdot 5-6=1495$. Servirà un ulteriore salto per superare la casella 1498, portando così il conto totale a 303 salti.

14. UN PROBLEMA DI MCD [199]
Siano $a<b<c$ e sia $d=M.C.D.(a,b,c)$ dispari. Affinché d sia il più grande possibile, i tre numeri devono essere $d<3d<5d<1000$. L'ultima disuguaglianza ci porta a determinare $d<\frac{1000}{5}=200$ cioè $d=199$.

15. I GETTONI [11]
Nelle prime tre partite è necessario che i tre soldati vincano una partita a testa. Se non fosse così ci sarebbe almeno un soldato che ha perso tre partite di fila e quindi è rimasto senza soli, interrompendo il gioco. Nelle restanti due partite, avendo ciascuno 3 soldi, come all'inizio del gioco, può accadere qualunque cosa.

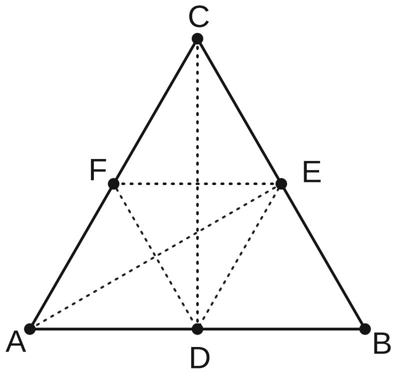
La probabilità cercata è $1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

16. ALLA RICERCA DI UN NUMERO DI DUE CIFRE [71]
L'informazione del punto c) ci rivela che una delle due cifre del numero è sicuramente 1.
I numeri primi che hanno 1 come cifra delle decine sono 11, 13, 17 e 19. Invertendo l'ordine delle cifre il numero deve essere ancora primo. 91 è divisibile per 7, mentre 71 è primo, ed è il più grande che possiamo avere.

17. TRIANGOLAZIONI [1385]
Sia A l'area del triangolo. I triangoli che posso scegliere sono di 4 tipi:

Congruenti a DEF o a AFE di area $\frac{1}{4}A$; congruenti a ACD di area $\frac{1}{2}A$ e, ovviamente, il triangolo ABC.

La somma delle aree è $2A=2\cdot 40\cdot\frac{40\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=800\sqrt{3}\cong 1385,68\text{ cm}^2$



18. LE ABITAZIONI DI CASCINA DISCRETA [36]
Sia x il numero delle abitazioni periferiche e il numero delle abitazioni centrali. Da ciascuna delle abitazioni periferiche escono due strade, così come da ciascuna di quelle centrali ne escono tre. Il numero totale di strade è $\frac{2x+3x}{2}=45$. Si ottiene $x=18$ e quindi il numero di abitazioni è $2x=36$.

19. UNA GRANDE SCACCHIERA. [1706]
Vi sono $\lfloor 75:2\rfloor=37$ coordinate pari e $\lfloor 75:3\rfloor=25$ coordinate multiple di 3. Coordinate che sono contemporaneamente pari e multiple di 3 sono $\lfloor 75:6\rfloor=12$.

Per il principio di inclusione/esclusione le caselle con una coordinata pari e l'altra multipla di 3 sono $37\cdot 25\cdot 2-12\cdot 12=1706$.

20. FRA I DISEGNI DI LEONARDO [105]
Il triangolo AHF risulta essere isoscele con angolo al vertice $F\hat{A}H=120°-90°=30°$. L'angolo alla base misura $F\hat{H}A=\frac{180°-30°}{2}=75°$ e di conseguenza l'angolo supplementare $E\hat{H}F=180°-75°=105°$.