GARA DI UDINE

9 marzo 2019

SOLUZIONI AI QUESITI

1. LA COMBINAZIONE DELLA PORTA [2]

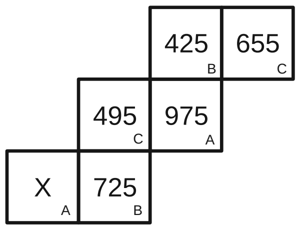
Eseguiamo le operazioni, accoppiando a due a due i termini a numeratore per facilitare il calcolo:

$$\frac{2+(-3+4)+(-5+6)+(-7+8)+(-9+10)+(-11+12)+(-13+14)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}=\frac{8}{2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)}=\frac{8}{4}=2.$$

2. MONSTERS UNIVERSITY [77]

La media dopo le prime tre prove è $\frac{67+68+60}{3}=65$. Per ottenere una media di 68 è necessario che il voto della quarta prova sia x, tale che $\frac{67+68+60+x}{4}=68$, cioè $195+x=272$ e quindi $x=77$.

3. L'ENERGIA ELETTRICA [175]



Le facce opposte sono indicate in figura dalle lettere A, B e C.
Si osserva che la somma di due facce opposte vale $725+425=495+655=1150$.
Il valore della faccia indicata sconosciuta deve essere $1150-975=175$.

4. LA PORTA DIMENTICATA [999]

La risposta è 999. Infatti possiamo prendere tutti i valori, tranne uno, superiori a 2019. Per la natura dei numeri interi, esisterà sempre un solo numero intero (negativo) che renderà la somma pari a -1.
Facciamo un esempio. Siano x_1, x_2, ... , x_{1000} i valori, tali che $x_1+x_2+...+x_{1000}=-1$. Se scegliamo $x_1=x_2=...=x_{999}=2020$, il valore $x_{1000}=-1-999\cdot 2020=-2017981$ è il valore che rende la somma uguale a -1, come richiesto.

5. UNA NUOVA AMICIZIA [12]

Per quanto affermato, deve essere vera la seguente uguaglianza:
$\frac{n-3}{9}=\frac{n-9}{3}$, equazione che risolta porta a
$3n-9=9n-81$, cioè
$n=12$.

6. L'INDAGINE [1000]

I passi di Sulley sono lunghi $\frac{6}{5}$ quelli di Mike e quindi ogni 5 passi di Sulley, Mike ne fa 6.

Detti x il numero dei passi fatti da Sulley, deve essere verificata la proporzione: $x:1200=5:6$, che porta a determinare $x=1000$ passi.

7. LA SCOPERTA [7]
Osserviamo che i due triangoli hanno entrambi la stessa altezza (metà del lato del quadrato) e quindi il rapporto tra le due aree è pari al rapporto tra le due basi.

Detta x la decima parte del lato del quadrato, Il rapporto tra le due aree vale $\frac{A_{CDO}}{A_{ABO}} = \frac{7x}{x} = 7$.

8. IL COMPLICE [1600]
C'è un solo modo per cui la somma di due o più quadrati dia come risultato 0 e cioè che ciascuno di essi valga 0. Ecco che deve essere $a = 125$, $b = 235$, $c = 540$ ed infine $d = 700$.
$a + b + c + d = 125 + 235 + 540 + 700 = 1600$.

9. LA STRANA PORTA [3200]
Il rettangolo contenuto all'interno della porta ha dimensioni $100 - 20 = 80\ \text{cm}$ e $80 - 20 = 60\ \text{cm}$. L'area della cornice la possiamo calcolare come differenza tra le aree dei due rettangoli:
$A = 100 \cdot 80 - 80 \cdot 60 = 3200\ \text{cm}^2$.

10. SULL'HIMALAYA [53]
Il più grande quadrato più piccolo di 2019 è 44, infatti $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$.
Il più grande cubo, più piccolo di 2019 è 12, infatti $12^3 = 1728$ e $13^3 = 2197$.
I valori che sono sia quadrati che cubi, devono essere potenze seste.
Osserviamo che $1^6 = 1$, $2^6 = 64$ e $3^6 = 729$. $4^6 = 4096$ è già fuori dai valori richiesti.
In totale abbiamo $44 + 12 - 3 = 53$ numeri che verificano la richiesta.

11. LO YETI [256]
Eseguiamo i calcoli rispettando l'ordine delle operazioni. Si ricorda che una potenza ha priorità su qualsiasi altro calcolo.

$$\frac{2^{2^{2^2}}}{\left[\left(2^2\right)^2\right]^2} = \frac{2^{2^4}}{2^8} = \frac{2^{16}}{2^8} = 2^8 = 256.$$

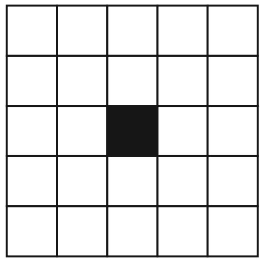
12. ENIGMI CON LO YETI [2014]
Il lato obliquo più piccolo possibile per il triangolo è $6\ \text{cm}$. Tra $2019\ \text{cm}$, valore massimo e $6\ \text{cm}$, valore minimo, ci sono 2014 possibili triangoli con lati di misura intera.

13. LA PORTA NEL VILLAGGIO [41]
Se una sola moneta da 50 centesimi diventasse da 2 € il mio guadagno sarebbe di $1{,}5$ €. Affinche il guadagno diventi di 27 €, le monete da 50 centesimi da convertire in monete da 2 € devono essere 18.

Tolte queste 18 che aumentano il valore, le altre sono in numero uguale: $\frac{100 - 18}{2} = 41$.

All'inizio abbiamo 41 monete da 2 € e $41 + 18 = 59$ monete da 50 centesimi.

14. LA SCOPERTA [19]

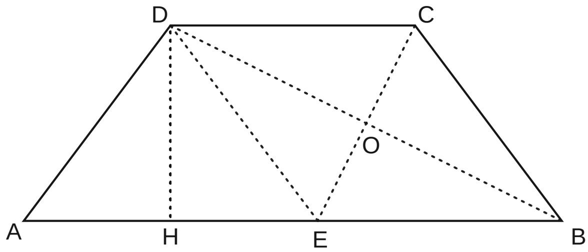


Procediamo per casi.
Vi è un solo quadrato 1×1.
Ci sono 4 quadrati 2×2, quelli che hanno il quadratino nero in uno dei quattro angoli.
Ci sono 9 quadrati 3×3 e tutti contengono il quadratino nero.
Quadrati 4×4 ve ne sono 4 e tutti contengono il quadratino nero.
Di quadrato 5×5 c'è solo l'intero schema, che ovviamente contiene il quadratino nero.
In totale abbiamo $1+4+9+4+1=19$ quadrati che contengono il quadratino nero.

15. LA SCONFITTA DI RANDALL [59]

Siccome $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$, e $\frac{m}{n}<1$, la somma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{m}{n}$ deve fare 2 e quindi $\frac{m}{n}=2-\frac{31}{30}=\frac{29}{30}$.
La somma richiesta è $m+n=29+30=59$.

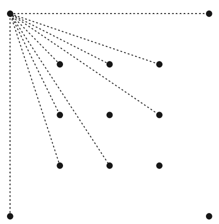
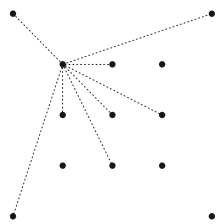
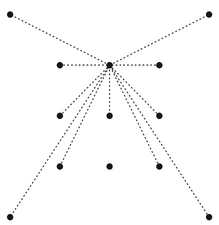
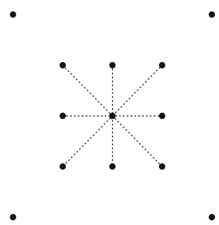
16. LA CENTRALE ELETTRICA [32]



Osserviamo la figura a lato. Affinché il punto C possa finire sul punto E della base AB, deve accadere che DB è perpendicolare a CE e $CO=OE$. Il quadrilatero $DCBE$ deve quindi essere un rombo.
Siccome $AD=BC=CD=EB=11-6=5\text{ Km}$, il triangolo ADE risulta essere isoscele. Tracciata la sua altezza DH, otteniamo che $AH=\frac{AE}{2}=3\text{ Km}$. Per il Teorema di Pitagora, $DH=\sqrt{5^2-3^2}=4\text{ Km}$ e quindi l'area del trapezio misura $A_{ABCD}=\frac{(11+5)\cdot 4}{2}=32\text{ Km}^2$.

17. NOSTALGIA [60]

Dividiamo il problema in quattro casi.

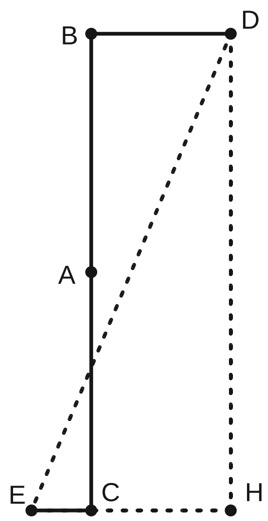
Tracciamo tutti i possibili segmenti a partire da uno dei vertici esterni:  in totale abbiamo 9 segmenti	Tracciamo tutti i possibili segmenti a partire da uno dei vertici interni:  in totale abbiamo 8 segmenti
Tracciamo tutti i possibili segmenti a partire dal punto medio di un lato:  in totale abbiamo 11 segmenti	Tracciamo tutti i possibili segmenti a partire dal punto centrale:  in totale abbiamo 8 segmenti.

Il numero di segmenti è $\frac{4\cdot 9+4\cdot 8+4\cdot 11+8}{2}=60$, dove abbiamo diviso per 2 in quanto ogni segmento è stato contato due volte.

18. MANUALE PER LA PRODUZIONE DI ENERGIA [1013]

Scomponiamo 2020 in fattori primi: $2020 = 101 \cdot 5 \cdot 2^2$. Per cercare di massimizzare $a+b+c$ dobbiamo fare si che uno dei tre fattori sia il valore più grande possibile. Se scegliamo $c=1$ e $b=2$ ci resta $a=1010$ che è il più grande fattore che possiamo ottenere dalla scomposizione di 2020.

Il valore cercato è $a+b+c=1010+2+1=1013$.



19. VISITA A UN'AMICA [26]

Rappresentiamo il problema graficamente (figura a lato):
dai dati del problema: $AB = AC = 12\ \mathrm{m}$; $BD = 7\ \mathrm{m}$ e $EC = 3\ \mathrm{m}$.

Per calcolare la distanza DE costruiamo il triangolo rettangolo EDH in cui abbiamo $EH = EC + BD = 10\ \mathrm{m}$ e $DH = BC = 24\ \mathrm{m}$.

Per il teorema di Pitagora $ED = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26\ \mathrm{m}$.

20. FINE DI UN'AVVENTURA [22]

Moltiplichiamo tra loro due delle tre relazioni note: $\frac{x\cancel{y}}{\cancel{z}} \cdot \frac{x\cancel{z}}{\cancel{y}} = 2 \cdot 8$; scopriamo così che $x^2 = 16$, cioè $x = 4$.

Analogamente moltiplicando la prima con la terza si ottiene $y^2 = 36$ e quindi $y = 6$ e di conseguenza $z = 12$.

La soluzione richiesta è $x + y + z = 4 + 6 + 12 = 22$.