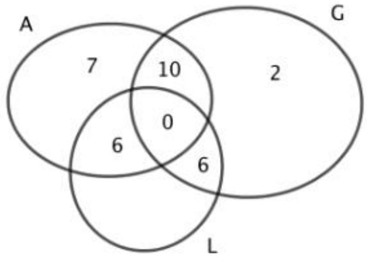
Soluzioni VII CDI 29-10-18

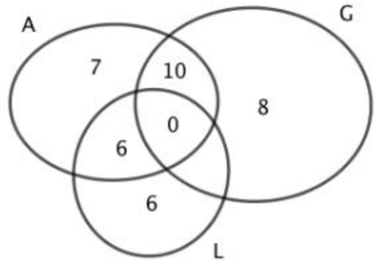


1. I Proci ad Itaca [68]

Analizziamo i 6 Proci che suonano la lira ma non sanno tirare con l'arco:

- se tutti e 6 sanno lanciare il giavellotto il valore minimo per il totale N_1 dei Proci è $N_1 = 10+7+6+6+2 = 31$
- se nessuno di loro invece è abile nel lancio del giavellotto il valore massimo N_2 è dato da $N_2 = 10+7+6+6+8 = 37$

Pertanto $N_1 + N_2 = 31+37 = 68$



2. La tela di Penelope [5]

Calcoliamo

$f(1)=2,\ f(2)=5,\ f(3)=3,\ f(4)=-2,\ f(5)=-5,\ f(6)=-3,\ f(7)=2\ \ldots$

Dopo aver osservato che $f(7)=f(1)$ deduciamo che la successione è periodica di periodo 6.

Essendo $2018 = 6\cdot 336+2$ risulta $f(2018)=5$

3. Il Concilio degli dei [8990]

Siano $A=\{n\in \mathrm{N}_0$ con n divisibile per 12 e $n\le 9999\}$ e $B=\{n\in \mathrm{N}_0$ con n divisibile per 30 e $n\le 9999\}$.

Ricordando che $\bar{A}\cap\bar{B}=\overline{A\cup B}$ e $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$, possiamo calcolare $|\bar{A}\cap\bar{B}|$.

$$|A|=\left\lfloor\frac{9999}{12}\right\rfloor=833,\quad |B|=\left\lfloor\frac{9999}{30}\right\rfloor=333,\quad |A\cap B|=\left\lfloor\frac{9999}{60}\right\rfloor=166$$

Risulta: $|A\cup B|=833+333-166=1000$.

E dunque $R=(9999-9)-1000=8990$

4. La ninfa Calipso [27]

Siano $x,\ y,\ z$ tre interi positivi per i quali risulta $xyz=2233=1\cdot 7\cdot 11\cdot 29$.

Allora ciascuna delle terne $(7,\ 11,\ 29)$, $(1,\ 29,\ 77)$, $(1,\ 7,\ 11\cdot 29)$, $(1,\ 11,\ 7\cdot 29)$ genera $3!=6$ soluzioni, mentre la terna $(1,\ 1,\ 2233)$ ne genera 3.

Il numero totale di soluzioni è dunque $6\cdot 4+3=27$

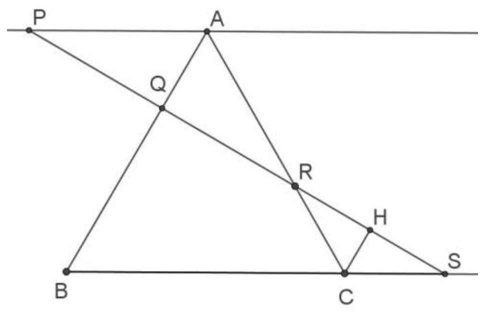
5. Atena protettrice di Ulisse [40]

Essendo $PQ=QR$ e $PAQ=QAR=60°$ il triangolo PAR è isoscele sulla base PR e gli angoli alla base misurano 30° ciascuno. Allora anche il triangolo RCS, isoscele sulla base RS, ha gli angoli alla base di 30°.

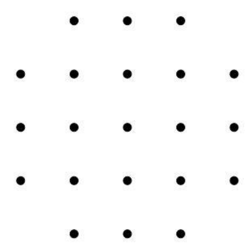
Osserviamo che i due triangoli QAR e RHC sono simili con rapporto di similitudine $k=2$ in quanto $QR=RS=2RH$.

Se poniamo $RC=2x$ risulta $AR=4x$.

Dunque $2x+4x=120$ da cui $x=20$ e quindi $CS=RC=40$

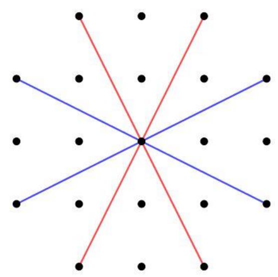


6. Telemachia [90]



- Contiamo dapprima le terne di punti allineati orizzontalmente:

  $N_1 = 1 + 3 \cdot \binom{5}{3} + 1 = 32$
- Per simmetria vi sono $N_2 = 32$ terne di punti allineati verticalmente.
- Contiamo ora le terne di punti che si trovano su rette inclinate di 45° rispetto alla direzione orizzontale: $N_3 = 3 + 2 \cdot \binom{4}{3} = 11$
- Per simmetria vi sono $N_4 = 11$ terne di punti appartenenti a rette inclinate di 135° rispetto alla direzione orizzontale.
- Infine vi sono 4 terne di punti allineati come in figura.



Dunque in totale vi sono $64 + 22 + 4 = 90$ terne di punti allineati.

7. Ulisse lascia Ogigia [5]

Osservato che l'equazione data si può scrivere come differenza di quadrati, otteniamo:
$\left(3^x - 2^y\right) \cdot \left(3^x + 2^y\right) = 17$ e dunque si trasforma nel seguente sistema

$\begin{cases} 3^x - 2^y = 1 \\ 3^x + 2^y = 17 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ ed è l'unica soluzione in quanto il sistema non è simmetrico.

Pertanto il risultato è uguale a $2 + 3 = 5$

8. Ulisse salvato dai Feaci [273]

Si chiede di calcolare $a^4 + b^4 + c^4$ sapendo che $a,\ b,\ c$ soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 21 \\ a^3 + b^3 + c^2 = 73 \end{cases}$$

Sappiamo che $\left(a + b + c\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot \left(ab + ac + bc\right) \;\Rightarrow\; ab + ac + bc = \dfrac{49 - 21}{2} = 14$

$\left(a + b + c\right)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3 \cdot \left(ab + ac + bc\right) \cdot \left(a + b + c\right) - 3abc \;\Rightarrow\; abc = \dfrac{73 + 3 \cdot 14 \cdot 7 - 7^3}{3} = 8$

$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 = 441 \;\Rightarrow\; a^4 + b^4 + c^4 + 2 \cdot \left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right) = 441$

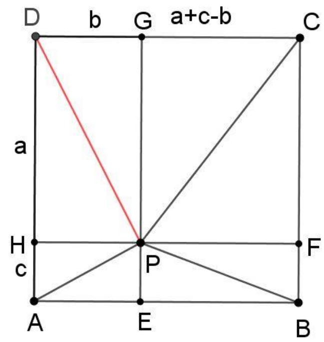
Ma $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \left(ab + ac + bc\right)^2 - 2 \cdot \left(a^2bc + ab^2c + abc^2\right) \;\Rightarrow\; a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 14^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 = 84$

Pertanto

$a^4 + b^4 + c^4 = 441 - 2 \cdot 84 = 273$

9. La terra dei Lotofagi [1800]

Sapendo che $AP=30,\ BP=40,$ CP=50 poniamo $DH=a,\ DG=b,\ AH=c$.
Le condizioni diventano:



$$\begin{cases} b^2+c^2=900 \\ c^2+(a+c-b)^2=1600 \\ a^2+(a+c-b)^2=2500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+c^2=900 \\ a^2-c^2=900 \\ c^2+(a+c-b)^2=1600 \end{cases}$$

da cui $a^2+b^2=1800$

10. La terra dei Ciclopi [3991]

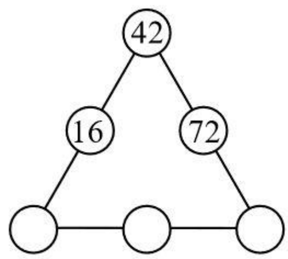
Per calcolare la somma dei primi 2018 termini della seguente somma

$$1+2+1+\underbrace{2+2+2}+1+\underbrace{2+2+2+2+2}+\cdots$$

- contiamo quante pecore sono entrate prima che entri la $(n+1)-sima$ pecora nera: sicuramente sono entrate *n* pecore nere e $1+3+...+(2n-1)=n^2$ pecore bianche per un totale di n^2+n pecore
- troviamo il più grande *n* per cui $n^2+n\le 2018 \Rightarrow n=44$
- pertanto le pecore entrate prima della $45-esima$ pecora nera sono $44^2+44=1980$
- subito dopo entra una pecora nera e poi entrano 37 pecore bianche per arrivare al totale di 2018 pecore entrate
- in conclusione la somma richiesta dal problema è uguale a $44+2\cdot 44^2+1+2\cdot 37=3991$

11. L'otre dei venti [20]

Osservato che: $16=2^4,\ 42=2\cdot 3\cdot 7,\ 72=2^3\cdot 3^2 \Rightarrow$ i tre numeri interi positivi $x,\ y,\ z$ da scrivere nei cerchi in basso devono soddisfare le seguenti condizioni:



$$\begin{cases} xyz=x\cdot 2^5\cdot 3\cdot 7 \\ xyz=z\cdot 2^4\cdot 3^3\cdot 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz=2^5\cdot 3\cdot 7 \\ x\cdot 2^5\cdot 3\cdot 7=z\cdot 2^4\cdot 3^3\cdot 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x=9z \\ yz=2^5\cdot 3\cdot 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9k \text{ e } z=2k \\ y\cdot 2k=2^5\cdot 3\cdot 7 \end{cases}$$

Pertanto $yk=2^4\cdot 3\cdot 7$ ossia $y=\dfrac{2^4\cdot 3\cdot 7}{k}$. Affinchè *y* sia un intero positivo occorre che *k* sia un divisore di $2^4\cdot 3\cdot 7=336$, ma $d(336)=20$ dunque possiamo scrivere i tre numeri richiesti in 20 modi differenti.

12. I Lestrigoni [4]

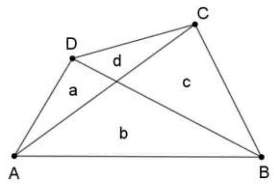
Sapendo che $MCD(a,b)=30=2\cdot 3\cdot 5$ e $mcm(a,b)=3000=2^3\cdot 3\cdot 5^3$ possiamo dire:

- sia *a* che *b* devono avere il fattore 3 e nessun fattore 3^k con $k>1$,
- esattamente uno dei due numeri deve avere il fattore 2 e l'altro deve avere il fattore 2^3,
- analogamente per il 5 e il 5^3

Pertanto esistono solo 4 coppie che soddisfano tali condizioni.

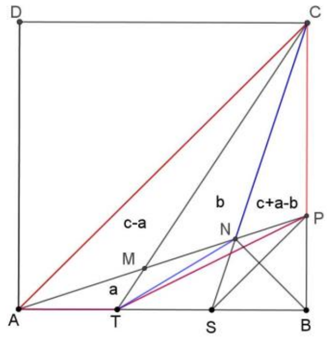
13. La maga Circe [21]

Soluzione 1:



Usiamo la proprietà dei quadrilateri relativa alle aree:
in ogni quadrilatero, indicate con $a,\ b,\ c,\ d$ le aree delle 4 regioni indicate in figura, risulta $a \cdot c = b \cdot d$.

Sia $S = AB^2 = 14^2$, poniamo $a = [ATM]$, $b = [MNC]$ e $c = [APB] = [ACT] = \frac{S}{6} = \frac{14^2}{6}$



- Consideriamo il quadrilatero *ATPC*:

  essendo $[ATP] = \frac{c}{3} \Rightarrow [MTP] = \frac{c}{3} - a$

  inoltre $[AMC] = c - a$ e $[MPC] = 2c - (c-a) = c + a$

  pertanto: $\left(\frac{c}{3} - a\right) \cdot (c-a) = a \cdot (c+a)$ ossia $a = \frac{c}{7}$ (1)

- Consideriamo il quadrilatero *ATNC*:

  essendo $[TSN] = [SNB] = [BPN] = \frac{a+c-b}{2}$ risulta

  $[MTN] = c - b - \frac{a+c-b}{2} = \frac{c-b-a}{2}$

  e quindi $(c-a) \cdot \left(\frac{c-b-a}{2}\right) = a \cdot b$ ossia $(c-a) \cdot (c-b-a) = 2 \cdot a \cdot b$ (2)

  da (1) e (2) abbiamo:

$$\begin{cases} a = \frac{c}{7} \\ (c-a)\cdot(c-b-a) = 2\cdot a\cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c}{7} \\ b = \frac{9}{14}c \end{cases}$$ e quindi $[MNC] = b = \frac{9}{14} \cdot \frac{14^2}{6} = 21$

Soluzione 2:

Fissiamo un sistema i coordinate cartesiane con origine $A(0,0)$. Posto $AB = a$ abbiamo:

$A(0,0), B(a,0), C(a,a), D(0,a), P\left(0, \frac{a}{3}\right), T\left(\frac{a}{3}, 0\right), S\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$

Le rette *AP*, *CT*, *CS* hanno equazione rispettivamente

$AP: x - 3y = 0$

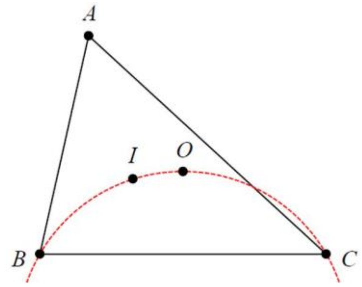
$CT: 3x - 2y = a$

$CS: 3x - y = 2a$

Con semplici calcoli si trova che

$M\left(\frac{3a}{7}, \frac{a}{7}\right), N\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}\right)$. Pertanto: $[CMN] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ \frac{3a}{7} & \frac{a}{7} & 1 \\ \frac{3a}{4} & \frac{a}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{28}a^2 = 21$

14. La discesa nell'Ade [60]



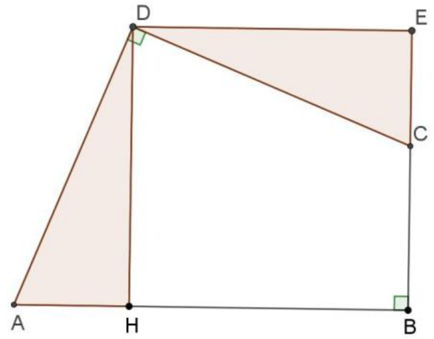
Dalla ciclicità del quadrilatero *BCOI*, posto $BAC = \alpha$ abbiamo

$BOC = BIC = 180° - \alpha$

Dato che *I* è l'incentro di *ABC* è noto che $BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$

Pertanto $180° - \alpha = 90° + \frac{\alpha}{2}$ e dunque $\alpha = 60°$

15. Ulisse e le Sirene [1900]



Con una rotazione antioraria di centro *D* e angolo di 90° il triangolo rettangolo *DAH* si sovrappone al triangolo *DCE* della figura.
Pertanto la regione data è equivalente al quadrato *DHBE*.
Osservato che la distanza richiesta dal problema non è altro che il lato del quadrato *DHBE* abbiamo:

$DH^2 = 3.61\ km^2 = 361 \cdot 10^4 m^2$ dunque $DH = 1900\ m$

16. Otto anni da Calipso! [3979]

Poniamo $S = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + 1 + \cdots + \frac{1}{50\cdot51\cdot52}$

Osserviamo che il termine generico si può scrivere nella forma:

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$$

Pertanto

$$S = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{50}\left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{51}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{52}\right)\right) = \frac{25}{51} - \frac{25}{104} = \frac{25\cdot53}{51\cdot104}$$

e dunque la differenza richiesta è: $51\cdot104 - 25\cdot53 = 3979$

17. I preparativi alla volta di Itaca! [81]

Ad ogni turno vengono giocate 50 partite in quanto ogni partecipante ne sfida un altro.

- Indichiamo con d_1 il numero di partite giocate da sole donne nel primo turno; ne restano $30 - 2d_1$ che, sempre nel primo turno, giocano tutte necessariamente con uomini; in tal modo restano $70 - 30 + 2d_1$ uomini che giocheranno tra di loro in $20 + d_1$ partite.
  Concludiamo che nel primo turno vi sono $20 + d_1$ partite tra soli uomini.
- Se d_2 è il numero di partite giocate da sole donne nel secondo turno allora, con ragionamento analogo, in tale turno saranno giocate $20 + d_2$ partite tra soli uomini.
- Infine se d_3 è il numero di partite giocate da sole donne nel terzo turno allora, in tale turno, saranno giocate $20 + d_3$ partite tra soli uomini.

In conclusione, nei primi tre turni saranno giocate $20 + d_1 + 20 + d_2 + 20 + d_3$ partite tra soli uomini.

Ma $20 + d_1 + 20 + d_2 + 20 + d_3 = 60 + (d_1 + d_2 + d_3) = 60 + 21 = 81$

18. Ulisse da Eumeo [2421]

L'equazione data può essere scritta nella forma:

$(y-x)\cdot(y+x)=4035=3\cdot 5\cdot 269$ dove x e y sono interi positivi per i quali $0<x<y<2018$

Essendo $y-x<y+x$ basta analizzare i seguenti casi:

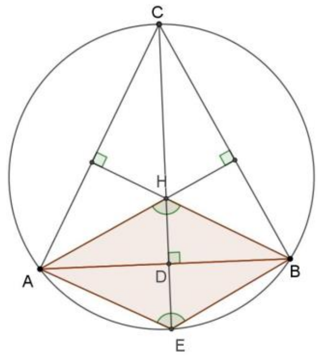
$\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=4035 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2017 \\ y=2018 \end{cases}$ ma non è accettabile.

$\begin{cases} y-x=3 \\ y+x=1345 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=671 \\ y=674 \end{cases}$; $\begin{cases} y-x=5 \\ y+x=807 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=401 \\ y=406 \end{cases}$ e infine $\begin{cases} y-x=15 \\ y+x=269 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=127 \\ y=142 \end{cases}$

Pertanto:

$\sum(x_i+y_i)=671+674+401+406+127+142=2421$

19. Il cane Argo [64]



- Posto $ACB=\gamma$, risulta $AEB=AHB=180°-\gamma$ e dunque il triangolo *AEB* è il simmetrico di *AHB* rispetto alla retta *AB* e quindi $DE=DH=9$
- Osserviamo che $AD=DB$ e $CD=16$ dunque, per il teorema delle corde, $AD^2=9\cdot 16 \Rightarrow AD=12$ e $AB=24$.
- $AC=CB=\sqrt{144+256}=20$ per il teorema di Pitagora applicato al triangolo *ADC*.
- $AB+2\cdot AC=24+2\cdot 20=64$

20. La vecchia nutrice Euriclea [2401]

Se $n=\overline{abcd}$, ponendo $s=a+b+c+d$, dobbiamo trovare *n* affinchè risulti $n=s^4$

- se $s=5 \Rightarrow 5^4=625 \Rightarrow$ *n* non ha 4 cifre pertanto $s\geq 6$
- se $s=6 \Rightarrow 6^4=1296 \Rightarrow n=1296$ ma $1+2+9+6\neq 6$ per cui 1296 non è accettabile
- se $s=7 \Rightarrow 7^4=2401 \Rightarrow n=2401$ è una soluzione accettabile essendo $2+4+1=7$
- se $s=8 \Rightarrow 8^4=4096 \Rightarrow n=4096$ ma $4+9+6\neq 8$ per cui 4096 non è accettabile
- se $s=9 \Rightarrow 9^4=6561 \Rightarrow n=6561$ ma $6+5+6+1\neq 9$ per cui 6561 non è accettabile
- se $s>9 \Rightarrow s^4$ ha più di 4 cifre

Pertanto l'unica soluzione accettabile è $n=2401$

21. L'arco di Ulisse [382]

Indichiamo con a_n il numero di regioni in cui rimane divisa la sfera quando su di essa si considerano *n* circonferenze massime con la proprietà che mai tre di esse passino per uno stesso punto.

Se $n=1 \Rightarrow a_1=2$

se $n=2 \Rightarrow a_2=4 \Rightarrow a_2=a_1+2\cdot 1$

se $n=3 \Rightarrow a_3=8 \Rightarrow a_3=a_2+2\cdot 2$

se consideriamo il termine $n-esimo$ risulta $a_n=a_{n-1}+2\cdot(n-1)$ in quanto la $n-esima$ circonferenza incontra le $n-1$ circonferenze precedenti in $2\cdot(n-1)$ punti che danno origine a $2\cdot(n-1)$ nuove regioni.

Sommando membro a membro nelle precedenti uguaglianze otteniamo:

$$a_n=2+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k=2+2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}=n^2-n+2$$

Pertanto $a_{20}=400-20+2=382$

22. La sconfitta dei Proci [4]
Soluzione 1:

Sapendo che $\frac{4}{x+3} < \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} < \frac{4}{x}$

Dobbiamo determinare i valori interi $x > 0$ per i quali:

$$\begin{cases} \frac{319}{420} < \frac{4}{x} \\ \frac{319}{420} > \frac{4}{x+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{723}{319} \\ x < \frac{1680}{319} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \frac{723}{319} < x < \frac{1680}{319}$$

I possibili valori di x sono solo $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$.
Per $x = 3$ otteniamo la somma di 4 frazioni che non hanno il fattore 7 al denominatore dunque sicuramente non renderà vera l'uguaglianza assegnata.
Per $x = 4$ abbiamo un'identità.
Per $x = 5$ risulta $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{533}{840} \neq \frac{319}{420}$ $\Rightarrow$ l'unica soluzione intera positiva è $x = 4$.

Soluzione 2:

Se x è un numero intero positivo indichiamo con $H = \dfrac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}}$
la media armonica dei numeri $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$

e con $M = \frac{x + x+1 + x+2 + x+3}{4} = x + \frac{3}{2}$ la loro media aritmetica.
Poiché $H \le M \Rightarrow \dfrac{4}{\frac{319}{420}} < x + \frac{3}{2}$ ossia $x > \frac{1680}{319} - \frac{3}{2} \Rightarrow x > \frac{2403}{638}$ ed essendo x un intero
deve risultare $x \ge 4$. Osserviamo che $x = 4$ è una soluzione perchè $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{319}{420}$
mentre se $x > 4$ risulta $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} < \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{319}{420}$ e quindi x non è soluzione dell'equazione data.
Concludendo $x = 4$ è l'unico valore intero positivo che soddisfa l'equazione data.

23. Il segreto del talamo nuziale [3720]
Sia $n = 2^a \cdot 5^b \cdot 7^c$ con $a,\ b,\ c$ interi positivi.
Indicando con $d(n)$ il numero dei divisori di n risulta $d(n) = (a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$

$$5n = 2^a \cdot 5^{b+1} \cdot 7^c \quad \Rightarrow \quad d(5n) = (a+1)\cdot(b+2)\cdot(c+1)$$
$$8n = 2^{a+3} \cdot 5^b \cdot 7^c \quad \Rightarrow \quad d(8n) = (a+4)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$$

Dai dati del problema risulta:

$$\begin{cases} d(5n) = d(n) + 8 \\ d(8n) = d(n) + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)\cdot(b+2)\cdot(c+1) = (a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1) + 8 \\ (a+4)\cdot(b+1)\cdot(c+1) = (a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1) + 18 \end{cases} \Rightarrow$$

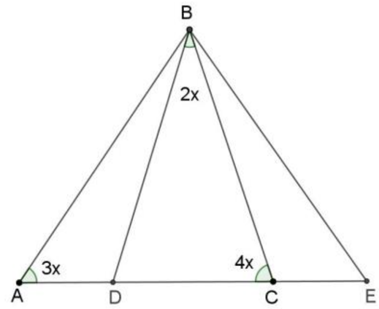
$$\begin{cases}(a+1)\cdot(c+1)\cdot(b+2-b-1)=8\\(b+1)\cdot(c+1)\cdot(a+4-a-1)=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+1)\cdot(c+1)=8\\(b+1)\cdot(c+1)\cdot 3=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+1)\cdot(c+1)=8\\(b+1)\cdot(c+1)=6\end{cases}$$

I casi $a+1=1$ o $b+1=1$ o $c+1=1$ sono impossibili perché $a,\ b,\ c$ sono interi positivi.
Poiché $c+1$ è un fattore comune alle due equazioni, $c+1\neq 3$ e $c+1\neq 6 \Rightarrow c+1=2$ ossia $c=1$ da cui:

$$\begin{cases}a=3\\b=2\\c=1\end{cases}\Rightarrow\quad n=2^3\cdot 5^2\cdot 7$$

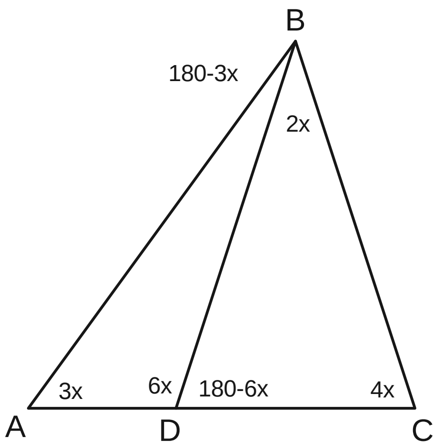
Pertanto la somma S dei divisori di n è $S=\dfrac{2^4-1}{2-1}\cdot\dfrac{5^3-1}{5-1}\cdot\dfrac{7^2-1}{7-1}=15\cdot 31\cdot 8=3720$

24. Finale alternativo … [180]



- Osserviamo che $3x+4x+2x<180° \Rightarrow x<20°$ pertanto ACB è acuto e inoltre, essendo $4x>3x$, risulta $AB>AC$
- sul prolungamento di AC dalla parte di C prendiamo un punto E tale che $BE=AB$
- per costruzione il triangolo ABE è isoscele sulla base AE $\Rightarrow$ $AEB=3x$
- per il teorema dell'angolo esterno $CBE=x$ e dunque il triangolo BDE è isoscele sulla base BE $\Rightarrow DB=DE$
- essendo per ipotesi $DB=AC \Rightarrow DE=AC$ e, per differenza di segmenti uguali, $AD=CE$
- ne segue che i triangoli ABD ed EBC sono congruenti per il primo criterio di congruenza $\Rightarrow$ $ABD=CBE=x$
- nel triangolo ABC risulta $4x+3x+2x+x=180$ da cui $10x=180$.

Soluzione "alternativa"



Sia, senza perdita di generalità, $AC=BD=1$.
Osserviamo che dai dati del problema $3x+4x+2x<180°$, cioè $x<20°$
Per il Teorema dei Seni applicato ai triangoli ADB e BDC si ottengono:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}3x}=\frac{AD}{\operatorname{sen}9x}\qquad\text{e}\qquad\frac{1}{\operatorname{sen}4x}=\frac{DC}{\operatorname{sen}2x}$$

Cioè

$$AD=\frac{\operatorname{sen}9x}{\operatorname{sen}3x} \qquad \text{e} \qquad DC=\frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}4x}$$

Siccome $AD+DC=1$, deve essere verificata l'equazione

$$\frac{\operatorname{sen}9x}{\operatorname{sen}3x}+\frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}4x}=1.$$

$$\operatorname{sen}9x\operatorname{sen}4x+\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}2x=\operatorname{sen}4x\operatorname{sen}3x.$$

Usiamo la formula di Werner $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$, l'equazione diventa:

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left(\cos 5x-\cos 13x\right)+\cancel{\frac{1}{2}}\left(\cos x-\cos 5x\right)=\cancel{\frac{1}{2}}\left(\cos x-\cos 7x\right)$$

$$\cancel{\cos 5x}-\cos 13x+\cancel{\cos x}-\cancel{\cos 5x}=\cancel{\cos x}-\cos 7x$$

$$\cos 13x=\cos 7x$$

le cui soluzioni sono $13x=\pm 7x+k\cdot 360°$, cioè

$x=k\cdot 60°$ e $x=k18°$.

Solo $x=18°$ verifica le limitazioni del problema.